

F. マンドル/G. ショー 『場の量子論』  
第1巻 量子電磁力学

本稿は場の量子論の教科書

F. マンドル, G. ショー, 2011, 場の量子論 第1巻 量子電磁力学 (樺沢宇紀訳),  
丸善プラネット株式会社, 東京

を, 要点と途中計算の分離した見通しの良い自己完結的テキストへと再構成し, さらに補足・考察を加えたノートである. ただし本稿は教科書の内容をほぼ網羅しているものの, 章末問題をはじめとして内容を多少, 取捨選択してある. さらに本稿には筆者の誤りや勘違いが潜んでいるかもしれないことをあらかじめ断っておく. 言うまでもなく, 原著を当てるに越したことはない.

なお本稿の他にも理論物理の各種ノートを以下のページで公開している (F. マンドル/G. ショー『場の量子論』第2巻のノートを含む).

<http://everything-arises-from-the-principle-of-physics.com/>

## 目次

第1章 光子と電磁場	2
第2章 ラグランジアン形式の場の理論	35
第3章 Klein-Gordon 場	49
第4章 Dirac 場	73
第5章 光子: 共変な理論	96
第6章 S 行列展開	116
第7章 QED のダイアグラム規則	128
第8章 最低次の QED 過程	157
第9章 輻射補正	200
第10章 正則化	233
付録 A テンソルの変換則とその周辺	255
付録 B 粒子系に関する対称性と保存則	260
付録 C 場の Lorentz 変換とスピノル・Dirac 場	265
教科書の付録 A	291

# 第 1 章 光子と電磁場

## 1.1 粒子と場

導入として、場の量子論の歴史的経緯と成り立ちについて簡単にまとめる。

- 「電磁輻射場そのものが光子によって構成されている」
  - Planck の光量子化説
  - Einstein による Planck の輻射則の統計力学的解析・光電効果の考察
  - Compton 効果の解析
- Dirac による電磁場の量子化 → 場の量子論  
粒子は場の量子として捉え直される (粒子間相互作用も他の粒子によって媒介される)  
→ 粒子数が変化する過程に対応できる
- 相互作用が弱いとき → 摂動論が成功
  - 強い相互作用についても、  
その作用が比較的弱くなる短距離の問題 [第 15 章参照] に摂動論を応用
  - Feynman ダイアグラムの利用 (摂動論の技法) ← Lorentz 共変な形式の導入を要する

以下に最終段落を引用する (p.2).

この導入の章では、より単純に非共変な形式を採用するが、これで事の足りる応用例も多く、ここから場の量子論に関わるいろいろな概念を導き出すこともできる。ここでは完全な古典論——Maxwell 理論——が存在する電磁力学の問題を考察する。後から再び正式に量子電磁力学を導くので、本章に限り、すべての手続きを正当化して議論を進めるのではなく、時折もっともらしく見える通念に頼ることにする。

## 1.2 電荷を含まない空間における電磁場

### 1.2.1 古典的な電磁場

古典電磁気学における輻射場の取り扱いを復習する [本節はまだ量子論ではない]。教科書全体を通して、電磁気学の単位系として Lorentz-Heaviside 有理化単位系が採用される\*1。

Coulomb ゲージ  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  において、真空中では

$$0 = \rho = \nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \left( -\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = -\nabla^2 \phi$$

であり、無限遠でゼロになるという境界条件の下で許容される解は  $\phi \equiv 0$  である。すると場の方程式はベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  に対する波動方程式に帰着する。

$$0 = \frac{1}{c} \mathbf{j} = \square \mathbf{A} + \nabla \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} \right) = \square \mathbf{A}.$$

\*1 Gauss(c.g.s) 有理化単位とも呼ばれる。これに対し通常の Gauss 単位系は有理化されていない。

場の実数性 ( $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$ ) を考慮すると、ベクトルポテンシャルは

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}, r} \left( \frac{\hbar c^2}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} \boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k}) [a_r(\mathbf{k}, t)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + a_r^*(\mathbf{k}, t)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}] \quad (1.15)$$

と Fourier 展開される。ただし便宜的に場を 1 辺  $L$ 、体積  $V = L^3$  の立方体領域  $0 \leq x, y, z \leq L$  において考え、周期的境界条件  $\mathbf{A}(0, y, z, t) = \mathbf{A}(L, y, z, t)$ , etc. を課す。すると許容される波数ベクトルは  $\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L}\mathbf{n}$  ( $\mathbf{n}$  は整数を成分に持つベクトル) と離散化されるため、取り扱いが容易になる。また  $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \sim \mathbf{A}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)}$  とすると

$$\text{ゲージ条件 } \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad \rightarrow \quad \text{横波条件 } \mathbf{k} \cdot \mathbf{A}_0 = 0$$

となることから、偏極ベクトル  $\boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k})$  としては互いに直交し、それぞれが  $\mathbf{k}$  ととも直交する 2 つの単位ベクトル  $\boldsymbol{\varepsilon}_1(\mathbf{k}), \boldsymbol{\varepsilon}_2(\mathbf{k})$  をとる。

$$\boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_s(\mathbf{k}) = \delta_{rs}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} = 0, \quad r = 1, 2.$$

再び場  $\mathbf{A}$  が波動方程式を満たすことを考慮すると、基準モードの各振幅  $a_r(\mathbf{k}, t)$  は振動数  $\omega_{\mathbf{k}} \equiv c|\mathbf{k}|$  の調和振動子となる。

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} a_r(\mathbf{k}, t) = -\omega_{\mathbf{k}}^2 a_r(\mathbf{k}, t), \quad \therefore a_r(\mathbf{k}, t) = a_r(\mathbf{k}) e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t}.$$

ここから輻射場のエネルギーは

$$H_{\text{rad}} = \frac{1}{2} \int (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) d^3x = \sum_{\mathbf{k}, r} \hbar\omega_{\mathbf{k}} a_r^*(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}) \quad (1.18)$$

と計算される [本稿次節で導出]。自由場のエネルギーに対して期待されるように、最右辺からは時間依存性が消えていることに注意する。

### 1.2.1 について

■ Fourier 展開 (1.15) について 式 (1.15) が  $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$  の Fourier 展開になっていることを確かめる。3 変数関数  $f(\mathbf{x})$  を 1 変数ずつ Fourier 展開すると  $f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} C_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$  となる:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \sum_{k_1} A_{k_1}(y, z) e^{ik_1 x} = \sum_{k_1} \left( \sum_{k_2} B_{k_1 k_2}(z) e^{ik_2 y} \right) e^{ik_1 x} \\ &= \sum_{k_1} \left\{ \sum_{k_2} \left( \sum_{k_3} C_{k_1 k_2 k_3} e^{ik_3 z} \right) e^{ik_2 y} \right\} e^{ik_1 x} = \sum_{\mathbf{k}} C_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

実数  $f(\mathbf{x})$  に対して  $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(f(\mathbf{x}) + f^*(\mathbf{x}))$  であることにも注意すると、実ベクトル  $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$  は  $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} (\mathbf{C}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \text{複素共役})$  の形に展開される。ここですでに定まっている展開係数  $\mathbf{C}(\mathbf{k}, t)$  の  $\boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k})$  方向の成分 (を  $\left(\frac{\hbar c^2}{2V\omega_{\mathbf{k}}}\right)^{1/2}$  で割った値) を  $a_r(\mathbf{k}, t)$  と置いたものが Fourier 展開 (1.15) である。

■  $H_{\text{rad}}$  の式 (1.18) の導出

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \sum_{\mathbf{k}, r} \left( \frac{\hbar c^2}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} \boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k}) \frac{i\omega_{\mathbf{k}}}{c} \{ a_r(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}} t)} - a_r^*(\mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}} t)} \}, \\ \therefore \mathbf{E}^2 &= \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \sum_{r, s} \frac{\hbar c^2}{2V(\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'})^{1/2}} \boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_s(\mathbf{k}') \frac{-\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'}}{c^2} \\ &\quad \times \{ a_r(\mathbf{k}) a_s(\mathbf{k}') e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} - a_r(\mathbf{k}) a_s^*(\mathbf{k}') e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} - a_r^*(\mathbf{k}) a_s(\mathbf{k}') e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} + a_r^*(\mathbf{k}) a_s^*(\mathbf{k}') e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} \}. \end{aligned}$$

ただし

$$\mathbf{k} \equiv (\omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}), \quad \mathbf{k}' \equiv (\omega_{\mathbf{k}'}, \mathbf{k}'), \quad x \equiv (ct, \mathbf{x})$$

という表記を導入した (以下, 同じ).

次に恒等式

$$\begin{aligned} [\nabla \times \mathbf{a} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}]_i &= \varepsilon_{ijk} \partial_j (a_k e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}) = \varepsilon_{ijk} (ik_j) a_k e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \\ &= [i\mathbf{k} \times \mathbf{a} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}]_i, \\ (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) &= (\varepsilon_{ijk} A_j B_k) (\varepsilon_{ilm} C_l D_m) = (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}) A_j B_k C_l D_m \\ &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \end{aligned}$$

の助けを借りて  $\mathbf{B}^2$  を計算すると

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} = \sum_{\mathbf{k}, r} \left( \frac{\hbar c^2}{2V \omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} (i\mathbf{k} \times \boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k})) \{ a_r(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}} t)} - a_r^*(\mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}} t)} \}, \\ \therefore \mathbf{B}^2 &= \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \sum_{r, s} \frac{\hbar c^2}{2V (\omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}'})^{1/2}} \{ -(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}') (\boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_s(\mathbf{k}')) + (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_s(\mathbf{k}')) (\mathbf{k}' \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k})) \} \\ &\quad \times \{ a_r(\mathbf{k}) a_s(\mathbf{k}') e^{-i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} - a_r(\mathbf{k}) a_s^*(\mathbf{k}') e^{-i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} - a_r^*(\mathbf{k}) a_s(\mathbf{k}') e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} + a_r^*(\mathbf{k}) a_s^*(\mathbf{k}') e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} \}. \end{aligned}$$

を得る.

これらを  $H_{\text{rad}}$  の式 (1.10) に代入すると

$$\begin{aligned} H_{\text{rad}} &= \frac{1}{2} \int (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) d^3x \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \sum_{r, s} \frac{\hbar c^2}{2(\omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}'})^{1/2}} \left[ \frac{-\omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}'}}{c^2} \boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_s(\mathbf{k}') + \{ -(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}') (\boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_s(\mathbf{k}')) + (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_s(\mathbf{k}')) (\mathbf{k}' \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k})) \} \right] \\ &\quad \times \int \frac{d^3x}{V} \{ a_r(\mathbf{k}) a_s(\mathbf{k}') e^{-i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} - a_r(\mathbf{k}) a_s^*(\mathbf{k}') e^{-i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} - a_r^*(\mathbf{k}) a_s(\mathbf{k}') e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} + a_r^*(\mathbf{k}) a_s^*(\mathbf{k}') e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} \} \end{aligned}$$

となる. ここで

$$\int \frac{d^3x}{V} e^{\pm i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} = \delta_{\mathbf{k} \mathbf{k}'}$$

に注意して空間積分を実行すると

$$\begin{aligned} H_{\text{rad}} &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \sum_{r, s} \frac{\hbar c^2}{2(\omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}'})^{1/2}} \left[ \frac{-\omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}'}}{c^2} \boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_s(\mathbf{k}') + \{ -(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}') (\boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_s(\mathbf{k}')) + (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_s(\mathbf{k}')) (\mathbf{k}' \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k})) \} \right] \\ &\quad \times \{ a_r(\mathbf{k}) a_s(\mathbf{k}') e^{-i(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}'} t)} \delta_{\mathbf{k}, -\mathbf{k}'} - a_r(\mathbf{k}) a_s^*(\mathbf{k}') e^{-i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'} t)} \delta_{\mathbf{k} \mathbf{k}'} \\ &\quad - a_r^*(\mathbf{k}) a_s(\mathbf{k}') e^{i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'} t)} \delta_{\mathbf{k} \mathbf{k}'} + a_r^*(\mathbf{k}) a_s^*(\mathbf{k}') e^{i(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}'} t)} \delta_{\mathbf{k}, -\mathbf{k}'} \} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r, s} \frac{\hbar c^2}{2\omega_{\mathbf{k}}} \left[ \left\{ \cancel{\frac{-\omega_{\mathbf{k}}^2}{c^2} \boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_s(-\mathbf{k})} + \cancel{\mathbf{k}^2 \boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_s(-\mathbf{k})} + \underbrace{(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_s(-\mathbf{k}))}_{=0} \underbrace{(-\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k}))}_{=0} \right\} \right] \\ &\quad \times \{ a_r(\mathbf{k}) a_s(-\mathbf{k}) e^{-2i\omega_{\mathbf{k}} t} + a_r^*(\mathbf{k}) a_s(-\mathbf{k}) e^{2i\omega_{\mathbf{k}} t} \} + \left( \frac{\omega_{\mathbf{k}}^2}{c^2} + \mathbf{k}^2 \right) \delta_{rs} \{ a_r(\mathbf{k}) a_s^*(\mathbf{k}) + a_r^*(\mathbf{k}) a_s(\mathbf{k}) \} \\ &= \sum_{\mathbf{k}, r} \hbar \omega_{\mathbf{k}} a_r^*(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}) : (1.18) \end{aligned}$$

を得る.

### 1.2.2 調和振動子

まずは調和振動子の量子論とこれに関連する生成・消滅演算子について、一通り要約を行う(式の導出は本稿次節に回す).

ハミルトニアン

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$$

によって記述される 1 次元調和振動子を考える. 量子論では一般化座標  $q$  と一般化運動量  $p$  を演算子として正準交換関係  $[q, p] = i\hbar$  が課せられる. これは新たに定義した演算子

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(m\omega q + ip), \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(m\omega q - ip) \quad (1)$$

に対する交換関係

$$[a, a^\dagger] = 1 \quad (2)$$

を含意する. これを調和振動子の交換関係と呼ぶ.

演算子  $a, a^\dagger$  に対して個数演算子  $N \equiv a^\dagger a$  を定義すると, ハミルトニアンは

$$H = \hbar\omega \left( N + \frac{1}{2} \right) \quad (3)$$

と書き直される. よって  $N$  と  $H$  は交換するから,  $N$  の固有値  $n$  に属する,  $H$  との同時固有ケット  $|n\rangle$  が存在する. このとき  $a, a^\dagger$  は  $|n\rangle$  に作用して, それぞれ固有値を 1 だけ減少, 増加させた  $N$  の固有ケットを作る:

$$a|n\rangle \propto |n-1\rangle, \quad a^\dagger|n\rangle \propto |n+1\rangle. \quad (4)$$

このことから  $a$  は消滅演算子,  $a^\dagger$  は生成演算子と呼ばれる. さらに任意のケット  $|\alpha\rangle$  に対して  $\langle\alpha|\alpha\rangle \geq 0$  が成り立つという要請 [1, p.17] から, 固有値  $n$  はゼロ以上の整数であることが結論される. そして固有値  $n=0$  に属する固有ケット  $|0\rangle$  に対して

$$a|0\rangle = 0$$

となる.

$|0\rangle$  を  $\langle 0|0\rangle = 1$  と規格化された基底状態 (真空状態) として, これに  $a^\dagger$  を逐次作用させると, 規格化された  $N$  の一連の固有状態

$$|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{n!} |0\rangle \quad (5)$$

が得られる. 対応するエネルギー固有値は  $E_n = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right)$  である [1, pp.120-124].

最後に Heisenberg 描像に移る. 演算子  $a(t)$  に対する Heisenberg 方程式は

$$\frac{da(t)}{dt} = -i\omega a(t) \quad (6)$$

となり, 解は  $a(t) = a(0)e^{-i\omega t}$  で与えられる [1, p.128].

#### 1.2.2 節, 式の導出など

■調和振動子の交換関係 (2) の導出 正準交換関係  $[q, p] = i\hbar$  より

$$[a, a^\dagger] = \frac{1}{2\hbar m\omega} [m\omega q + ip, m\omega q - ip] = \frac{1}{2\hbar m\omega} (-im\omega [q, p] + im\omega [p, q]) = \frac{1}{2\hbar m\omega} \cdot 2 \cdot (-im\omega) [q, p] = 1 : (2).$$

■調和振動子に対するハミルトニアンを表式 (3) の導出 演算子  $a, a^\dagger$  の式 (1) を  $q, p$  について逆に解くと

$$q = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger), \quad p = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(-a + a^\dagger)$$

なので, 調和振動子のハミルトニアンは

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 = \frac{1}{4}\hbar\omega\{(-a + a^\dagger)^2 + (a + a^\dagger)^2\} = \frac{1}{2}\hbar\omega(aa^\dagger + a^\dagger a)$$

と計算される. 交換関係 (2): を用いて最右辺において  $aa^\dagger = a^\dagger a + 1 =$  と書き換えると, 式 (3):

$$H = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega\left(N + \frac{1}{2}\right)$$

を得る.

■交換関係 (2):  $[a, a^\dagger] = 1$  の帰結  $a, a^\dagger$  は交換関係 (2):  $[a, a^\dagger] = 1$  を課すと式 (4):

$$a|n\rangle \propto |n-1\rangle, \quad a^\dagger|n\rangle \propto |n+1\rangle$$

を満たす消滅, 生成演算子となることを示す. 交換関係 (2) を用いると

$$[N, a] = [a^\dagger a, a] = a^\dagger[a, a] + [a^\dagger, a]a = -a \quad (7)$$

$$[N, a^\dagger] = [a^\dagger a, a^\dagger] = a^\dagger[a, a^\dagger] + [a^\dagger, a^\dagger]a = a^\dagger \quad (8)$$

が導かれる. ここから

$$\begin{aligned} N(a|n\rangle) &= (aN + [N, a])|n\rangle = a(N-1)|n\rangle = (n-1)(a|n\rangle), \\ N(a^\dagger|n\rangle) &= (a^\dagger N + [N, a^\dagger])|n\rangle = a^\dagger(N+1)|n\rangle = (n+1)(a^\dagger|n\rangle) \end{aligned}$$

を得る. これらは  $a|n\rangle, a^\dagger|n\rangle$  がそれぞれ固有値  $n-1, n+1$  に属する  $N$  の固有ケットであることを意味する. よって  $c_\pm$  を数定数として

$$a|n\rangle = c_-|n-1\rangle, \quad a^\dagger|n\rangle = c_+|n+1\rangle$$

と書ける. これは式 (4) に他ならない.

次に固有値  $n$  がゼロ以上の整数に限られることを示す. まず上式の係数  $c_\pm$  を定めるに当たり, 各固有値  $n$  に対する固有ケット  $|n\rangle$  が  $\langle n|n\rangle = 1$  と規格化されていることを要求しよう. すると

$$\begin{aligned} |c_-|^2 &= (\langle n-1|c_-^*) \cdot (c_-|n-1\rangle) = (\langle n|a^\dagger) \cdot (a|n\rangle) \\ &= n\langle n|n\rangle = n, \\ |c_+|^2 &= (\langle n+1|c_+^*) \cdot (c_+|n+1\rangle) = (\langle n|a) \cdot (a^\dagger|n\rangle) = \langle n|a^\dagger a + [a, a^\dagger]|n\rangle \\ &= \langle n|N+1|n\rangle = (n+1)\langle n|n\rangle = n+1 \end{aligned}$$

を得る. 係数  $c_\pm$  の位相は物理的に意味がないから  $c_\pm$  を実の正数にとって良く, このとき  $c_- = \sqrt{n}, c_+ = \sqrt{n+1}$  なので

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad (9)$$

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \quad (10)$$

となる。式 (9) によれば、ある固有ケット  $|n\rangle$  から初めて  $N$  の固有ケットに消滅演算子  $a$  をかける操作を繰り返すと、固有ケット

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad a|n-1\rangle = \sqrt{n-1}|n-2\rangle, \quad \dots$$

が得られることになる。ゼロの整数  $n$  から始めればいずれ

$$a|1\rangle = |0\rangle, \quad a|0\rangle = 0$$

が得られ、 $n=0$  よりも小さい固有値  $n$  を持つ固有ケット  $|n\rangle$  が作られることはない。一方、非整数の  $n$  から始めれば、負の値をとるいくらでも小さい固有値  $n$  を持つ固有ケット  $|n\rangle$  が作られることになる。ところで任意のケット  $|\alpha\rangle$  に対して  $\langle\alpha|\alpha\rangle \geq 0$  が成り立つという要請から、固有値  $n$  は

$$0 \leq (\langle n|a^\dagger) \cdot (a|n\rangle) = \langle n|N|n\rangle = n$$

を満たさなければならない。以上より固有値  $n$  として許されるのはゼロ以上の整数のみである。なお固有ケット (5):

$$|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{n!} |0\rangle$$

が適正に規格化されていることは、上式 (10) から理解できる [1, pp.120–124].

■ $a(t)$  に対する Heisenberg 方程式 (6) の導出 Heisenberg 描像の演算子  $a(t), a^\dagger(t)$  も調和振動子の交換関係 (2) を、従って式 (7):  $[N, a] = -a$  を満たすので、Heisenberg 方程式を書き下すと

$$i\hbar \frac{da}{dt} = [a, H] = \hbar\omega[a, N] = \hbar\omega a, \quad \therefore \frac{da(t)}{dt} = -i\omega a(t) : (6)$$

となる。

### 1.2.3 輻射場の量子化

- ハミルトン演算子を  $H_{\text{rad}} = \sum_{\mathbf{k}, r} \hbar\omega_{\mathbf{k}} (a_r^\dagger(\mathbf{k})a_r(\mathbf{k}) + \frac{1}{2})$  として、 $a_r^\dagger(\mathbf{k}), a_r(\mathbf{k})$  に調和振動子の交換関係を課すと、固有状態

$$|\dots, n_r(\mathbf{k}), \dots\rangle = \prod_{\mathbf{k}} \prod_r \frac{[a_r^\dagger(\mathbf{k})]^{n_r(\mathbf{k})}}{\sqrt{n_r(\mathbf{k})!}} |0\rangle$$

を得る。

[ハミルトニアンの中の  $\sum_{\mathbf{k}, r} \frac{1}{2} \hbar\omega_{\mathbf{k}}$  の項は、量子論に移行する際の正規順序化定数 (後述).]

これは電磁輻射場が

$$\text{モード } (\mathbf{k}, r) \text{ を占有する } \left\{ \begin{array}{l} \text{運動量 } \hbar\mathbf{k} \\ \text{エネルギー } \hbar\omega_{\mathbf{k}} \\ \text{偏極ベクトル } \boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k}) \end{array} \right\} \text{ の } n_r(\mathbf{k}) \text{ 個の光子}$$

で構成されることを意味する。

- 円偏光  $\leftrightarrow$  光子のスピン
- ハミルトニアンに現れるエネルギーの無限大の項  $\sum_{\mathbf{k}, r} \frac{1}{2} \hbar\omega_{\mathbf{k}}$  は“定数”だから落とせる。
- 占有数  $n_r(\mathbf{k}) = 0, 1, 2, \dots$  ( $\rightarrow$  Pauli の排他律は働かない [粒子は互いに区別できない])  
 $\rightarrow$  光子は Bose-Einstein 統計に従う

- 演算子  $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}^+(\mathbf{x}, t) + \mathbf{A}^-(\mathbf{x}, t)$ ,

$$\mathbf{A}^\pm(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}, r} \left( \frac{\hbar c^2}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} \boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k}) \begin{Bmatrix} a_r(\mathbf{k}) \\ a_r^\dagger(\mathbf{k}) \end{Bmatrix} e^{\pm i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}} t)},$$

$$\begin{cases} \mathbf{A}^+ : e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t} \text{を含む正振動数部分, 消滅演算子のみを含む} \\ \mathbf{A}^- : e^{i\omega_{\mathbf{k}} t} \text{を含む負振動数部分, 生成演算子のみを含む} \end{cases}$$

- 非相対論的な量子力学における, エネルギー  $E$  の状態の時間依存性  $e^{-i\omega t}$  (ただし  $\omega = E/\hbar$ ) と比べてとき, 振動数にあたる量の正負  $\pm\omega_{\mathbf{k}} \geq 0$  に応じて「正振動数部分」「負振動数部分」という呼び方が用いられる.
- 位置  $\mathbf{x}$  は観測量でなくパラメータ
- 全光子数が確定した状態  $|N\rangle$  に対し  $\langle N|\mathbf{E}|N\rangle = \mathbf{0}$  より,  $|N\rangle$  は古典的な場を実現しない.
  - コヒーレント状態に関する問題 1.1 も参照.

### 1.2.3 について

■ Einstein の光量子論の再考 決まった振動数  $\omega_{\mathbf{k}} = c|\mathbf{k}|$  を持つ単色光を考える. 例えば光電効果において, 古典的な光の波動論では波の振幅の 2 乗は波のエネルギーを表すが, それは多数の光子全体のエネルギーに対応し, 光子 1 個のエネルギーには対応しないことが重要である:

$$\text{光の強さ (エネルギー)} \leftrightarrow \begin{cases} \text{光子数} \\ \text{波の振幅の 2 乗} \end{cases} \leftrightarrow \text{光子 1 個のエネルギー}$$

このことは輻射場のエネルギーの式 (1.37):

$$H_{\text{rad}} = \frac{1}{2} \int (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) d^3x = \sum_{\mathbf{k}, r} \hbar\omega_{\mathbf{k}} a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k})$$

に見て取れる.

■ 「光子はスピン 1 を持つ粒子のように振舞う」 (p.10, l.1) について 粒子の静止系では軌道角運動量がゼロになるので, 粒子のスピン  $\mathbf{S}$  は静止系での全角運動量として定義できる. ところが光子はすべての慣性系に対して光速で運動しているので, この定義を適用することはできない. このように光子のスピン概念は限られた意味しか持たない [2, pp.376-377]. しかしながら素朴には光子のスピンを 1 と見なせることは次のように理解できる [3, pp.59-60]. 光子が  $z$  方向に運動している場合を考えれば, 軌道角運動量の  $z$  成分はゼロになるので, スピンの  $z$  成分  $S_z$  は全角運動量の  $z$  成分  $J_z$  として求まる. そこで場の Fourier 成分 (1.15) から, 波数が  $z$  方向を向いた  $\mathbf{k} = (0, 0, k)$  の項を取り出すと

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \left( \frac{\hbar c^2}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} \left\{ (a_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1 + a_2 \boldsymbol{\varepsilon}_2 e^{i(kz - \omega_{\mathbf{k}} t)} + (\text{複素共役}) \right\}$$

となる. 偏極ベクトル  $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2$  ( $xy$  面内の単位ベクトルである) をそれぞれ  $x, y$  方向に選ぶと,  $z$  軸周りの角度  $\phi$  の空間回転は振幅の変更の規則

$$\begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{pmatrix} = R_z(\phi) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad R_z(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

に帰着する。[これは光子場を考えているからである。]  $R_z(\phi) = e^{-iJ_z\phi/\hbar}$  から角運動量 (の行列表現) $J_z$  を読み取ると

$$J_z = i\hbar \lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{R_z(\phi) - 1}{\phi} = \hbar \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

であり, これは

$$\begin{aligned} \text{固有値 } J_z = +\hbar & \quad \text{固有ベクトル } \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \\ \text{固有値 } J_z = -\hbar & \quad \text{固有ベクトル } \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を持つ。固有値  $J_z = \pm\hbar$  より光子はスピン 1 と見なせる。ただし「スピンの第 3 成分 [ $J_z = 0$ ] は, 光子場の横波の性質 [あるいは第 5 章のゲージ条件] のために現れない」(p.10, 1.1-2)。なお古典的な描像では,  $J_z = \pm\hbar$  に対応する振幅  $(a_1, a_2) \sim (1, \pm i)$  は場

$$\mathbf{A} \sim (\varepsilon_1 \pm i\varepsilon_2)e^{i(kz - \omega_k t)}$$

を意味する。古典電磁気学で学んだように [4, pp.130–131], これは右回りと左回りの円偏光状態を表す。

■「すなわち光子数が確定した状態において  $\mathbf{E}$  の期待値はゼロになってしまう」(p.11, 1.9,10) について「光子数が確定した状態」を  $|N\rangle \equiv \underbrace{|\dots, n_r(\mathbf{k}), \dots\rangle}_{\text{合計数 } N}$  とする。生成・消滅演算子の 1 次である  $\mathbf{E}$  を  $|N\rangle$  に作用させると  $|N \pm 1\rangle$  の線形結合になって  $|N\rangle$  と直交し,  $\langle N|\mathbf{E}|N\rangle = \mathbf{0}$  となる。

一般にエネルギー固有状態において観測量の期待値は時間変化しないので,  $|N\rangle$  は  $\mathbf{E}$  の期待値が古典場と同様に振動する状態とはなり得ない [1, pp.101–102,p.130]。

### 1.3 電気双極子相互作用

前節では輻射場の量子化を行った。占有数演算子  $a_r^\dagger(\mathbf{k})a_r(\mathbf{k})$  は輻射場のハミルトニアン (1.37) と可換なので, 自由場において占有数  $n_r(\mathbf{k})$  は運動の定数 (保存量) である。(中略) 本節では単純で実際的でもある特例として, 荷電粒子の系が双極子能率を通じて輻射場と相互作用する問題を考察する。1.4 節では, より完全な取扱い (非共変ではあるが) を提示し, 本節で主張するいくつかの点を正当化する予定である。(p.11 より)

位置  $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(t)$  を古典的に与えることのできる, 非相対論的な荷電粒子 (電荷  $e_i$ ) の系 (原子) と輻射場の相互作用を考える。引き続き Coulomb ゲージ  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  を採用すると, 輻射場は横波の場  $\mathbf{E}_T = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$  で表される\*2。ここで

1. 磁場  $\mathbf{B}$  との相互作用を無視する。
2. 荷電粒子系の拡がりの中で, 遷移を起こす電場  $\mathbf{E}_T$  の空間的变化を無視し, これを電荷分布の代表点 (原点  $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ ) において評価する。

\*2 ここでは電荷の間にも Coulomb 相互作用があり,  $\nabla \times \mathbf{E}_L$  を満たす縦波の場  $\mathbf{E}_L = -\nabla\phi$  の寄与を持つ (全電場は  $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ , 1.4 節)。

以上の近似の下で相互作用ハミルトニアンを

$$H_I = -\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}_T(\mathbf{0}, t), \quad \mathbf{D} = \sum_i e_i \mathbf{r}_i : \text{電気双極子能率}$$

と書く (電気双極子相互作用).

電気双極子近似が妥当となるのは, 放射・吸収される光の波長  $\lambda$  が荷電粒子系の寸法  $R$  に比べてはるかに長い場合 ( $\lambda \gg R$ ) である (次節).

- 原子の光学的遷移 ( $R \sim 1\text{\AA}$ ,  $\lambda$  は 4000-7500 $\text{\AA}$ )  
→ 適用できる.
- 原子核からのガンマ線の放射 ( $R \sim 1\text{f}$ ,  $\lambda/2\pi = [197/(E \text{ in MeV})]\text{f}$ )  
→ ガンマ線のエネルギーが非常に高くない限り適用できる.

さて, 場  $\mathbf{A}$  は, したがって  $H_I$  は光子の消滅演算子と生成演算子それぞれについて 1 次なので, 電気双極子遷移では 1 つの光子の吸収または 1 つの光子の放射が起こると考えられる. そこで光子放出過程

$$\text{原子 } |A\rangle, \text{光子 } |\cdots, n_r(\mathbf{k}), \cdots\rangle \rightarrow \text{原子 } |B\rangle, \text{光子 } |\cdots, n_r(\mathbf{k}) + 1, \cdots\rangle$$

を考えよう. 原子の系に共通の電荷 ( $-e$ ) をくくり出して  $\mathbf{D} = -e\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x} \equiv \sum_i \mathbf{r}_i$  と書き, 行列要素  $\mathbf{x}_{BA} = \langle B|\mathbf{x}|A\rangle$  を定義する. すると時間に依存する摂動論より, 偏極  $\boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k})$  を持つ光子が波数  $\mathbf{k}$  の立体角範囲  $d\Omega$  に放出される単位時間当たりの確率 (遷移率) は

$$w_r d\Omega = \frac{e^2 \omega^3 d\Omega}{8\pi^2 \hbar c^3} [n_r(\mathbf{k}) + 1] |\boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}_{BA}|^2 \quad (1.50)$$

と計算される (導出は下記). ただし  $E_A, E_B$  をそれぞれ原子の始・終状態  $|A\rangle, |B\rangle$  でのエネルギーとして, Bohr の振動数条件

$$\omega_{\mathbf{k}} = \omega \equiv \frac{E_A - E_B}{\hbar}$$

を満たす波数  $\mathbf{k}$  を考えなければならない. 上式 (1.50) を分けて書き,

$$\underbrace{\frac{e^2 \omega^3 d\Omega}{8\pi^2 \hbar c^3} |\boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}_{BA}|^2}_{\text{自発 [自然] 放射}} + \underbrace{n_r(\mathbf{k}) \times \frac{e^2 \omega^3 d\Omega}{8\pi^2 \hbar c^3} |\boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}_{BA}|^2}_{\text{誘導放射 (モード } (\mathbf{k}, r) \text{ の光子数 } n_r(\mathbf{k}) \text{ を含むため)}}$$

と解釈できる.

ここから例えば, 与えられた原子の始・終状態  $|A\rangle, |B\rangle$  に対して, 単位時間に自発放射を起こす全確率

$$w_{\text{total}}(A \rightarrow B) = \frac{e^2 \omega^3}{3\pi \hbar c^3} |\mathbf{x}_{BA}|^2 \quad (1.53)$$

が求まる (導出は下記).

以下に 1.3 節の最終段落を引用する.

最後に, 電気双極子遷移による光子の吸収に関して成立する同様の式を示しておく. 行列要素,

$$\langle B, n_r(\mathbf{k}) - 1 | H_I | A, n_r(\mathbf{k}) \rangle$$

を表す式 (1.44) [本稿下記] に対応する式は, 因子  $[n_r(\mathbf{k}) + 1]^{1/2}$  の代わりに  $[n_r(\mathbf{k})]^{1/2}$  を含む. 結果としては, 式 (1.50) において  $[n_r(\mathbf{k}) + 1]$  を  $[n_r(\mathbf{k})]$  で置き換えたものが得られる.  $d\Omega$  は入射す

る輻射場の立体角であり，行列要素  $\mathbf{x}_{BA}$  は式 (1.51) [ $\langle B|\mathbf{x}|A\rangle$ ] であるが，ここではエネルギーの関係が  $E_B > E_A$  となるような状態  $|A\rangle$  から  $|B\rangle$  への遷移が起こる．振動数  $\omega$  は式 (1.46) の代わりに  $\hbar\omega = E_B - E_A$  によって決まる．

### 1.3 節，式の導出など

■遷移確率 (1.50) の導出 相互作用ハミルトニアン (1.40):  $H_I = -\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}_T(\mathbf{0}, t)$  において

$$\mathbf{E}_T(\mathbf{0}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{0}, t)}{\partial t} = i \sum_{\mathbf{k}, r} \left( \frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2V} \right)^{1/2} \boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k}) [a_r(\mathbf{k})e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t} - a_r^\dagger(\mathbf{k})e^{i\omega_{\mathbf{k}}t}]$$

なので，始・終状態間の行列要素は

$$\begin{aligned} & \langle B, n_r(\mathbf{k}) + 1 | H_I | A, n_r(\mathbf{k}) \rangle \\ &= i \left( \frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2V} \right)^{1/2} \langle n_r(\mathbf{k}) + 1 | a_r^\dagger(\mathbf{k}) | n_r(\mathbf{k}) \rangle \langle B | \boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{D} | A \rangle e^{i\omega_{\mathbf{k}}t} \\ &= i \left( \frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2V} \right)^{1/2} [n_r(\mathbf{k}) + 1]^{1/2} \langle B | \boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{D} | A \rangle e^{i\omega_{\mathbf{k}}t} \end{aligned} \quad (1.44)$$

と計算される (第 2 の等号は式 (1.24):  $a|n\rangle = n^{1/2}\sqrt{n-1}|n-1\rangle$ ,  $a^\dagger|n\rangle = (n+1)^{1/2}|n+1\rangle$  による) [本稿次節で補足]．始状態から終状態への単位時間当たりの遷移確率は，時間に依存する摂動論の公式

$$w = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle B, n_r(\mathbf{k}) + 1 | H_I | A, n_r(\mathbf{k}) \rangle|^2 \delta(E_A - E_B - \hbar\omega_{\mathbf{k}}) \quad (1.45)$$

で求まる [本稿次節で補足]．ここにデルタ関数の因子はエネルギー保存則を保証しており，放射される光子のエネルギー  $\hbar\omega_{\mathbf{k}}$  は Bohr の振動数条件

$$\omega_{\mathbf{k}} = \omega \equiv \frac{E_A - E_B}{\hbar}$$

を満たさなければならない．波数空間の範囲  $d^3k$  に含まれる状態数

$$\frac{Vd^3k}{(2\pi)^3} = \frac{Vk^2dkd\Omega}{(2\pi)^3} \quad (1.47)$$

を掛け， $k = |\mathbf{k}|$  に関する積分を施すと，偏極  $\boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k})$  を持つ光子が波数  $\mathbf{k}$  の立体角範囲  $d\Omega$  に放出される単位時間当たりの確率

$$w_r d\Omega = \int \frac{Vk^2dkd\Omega}{(2\pi)^3} \frac{2\pi}{\hbar} \delta(E_A - E_B - \hbar\omega_{\mathbf{k}}) \left( \frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2V} \right) [n_r(\mathbf{k}) + 1] |\langle B | \boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{D} | A \rangle|^2 \quad (1.49)$$

が得られる [上式 (1.47), (1.49) について，本稿次節で補足]． $\mathbf{D} = -e\mathbf{x}$  を代入し，積分を具体的に実行すると式 (1.50) に到達する [本稿次節で補足]．

■自発放射の全確率 (1.53) の導出 自発放射を考えるので遷移確率 (1.50) において  $n_r(\mathbf{k}) = 0$  とおく．その上で  $r = 1, 2$  についての和をとると，

$$\sum_{r=1}^2 w_r d\Omega = \frac{e^2\omega^3 d\Omega}{8\pi^2\hbar c^3} \sum_{r=1}^2 |\boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}_{BA}|^2.$$

ここで

$$(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{x}_{BA})(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{x}_{BA}^*) = (\mathbf{x}_{BA} \cdot \mathbf{x}_{BA}^*) \cos^2 \theta$$

と書いて、複素ベクトル  $\mathbf{x}_{BA}$  と方向単位ベクトル  $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$  の“成す角”  $\theta$  を定義すると、最右辺において

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^2 |\boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}_{BA}|^2 &= \mathbf{x}_{BA} \cdot \mathbf{x}_{BA}^* - (\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{x}_{BA})(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{x}_{BA}^*) \\ &= (\mathbf{x}_{BA} \cdot \mathbf{x}_{BA}^*)(1 - \cos^2 \theta) \\ &= |\mathbf{x}_{BA}|^2 \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (11)$$

と書き換えられる [本稿次節で補足]. よって [ $\theta$  を文字通り  $\hat{\mathbf{k}}$  の天頂角と見て] 立体角について積分すると、全確率

$$w_{\text{total}}(A \rightarrow B) = \frac{e^2 \omega^3}{8\pi^2 \hbar c^3} |\mathbf{x}_{BA}|^2 \int \sin^2 \theta d\Omega = \frac{e^2 \omega^3}{3\pi \hbar c^3} |\mathbf{x}_{BA}|^2 : (1.53)$$

を得る ( $\int \sin^2 \theta d\Omega = \frac{8\pi}{3}$ ).

### 1.3 について

■「自由場において占有数  $n_r(\mathbf{k})$  は運動の定数 (保存量) である」(1.3 節, 1.2,3) について 占有数と固有エネルギーが保存することは、生成・消滅演算子の導入が一見すると保存則に矛盾するのではないかという疑問に対する答である.

■電気双極子相互作用 (1.40):  $H_I = -\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}_T(\mathbf{0}, t)$  について ここでの取扱いでは、輻射場  $\mathbf{E}_T$  は電荷の系にとって一様な外場であって、各粒子のポテンシャル・エネルギーは  $-e_i \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{E}_T$  と表される.

■電気双極子近似の適用条件  $\lambda \gg R$  (p.12)(および「これを非相対論的に扱い」(p.11)) について これは電磁波の輻射を双極子によって記述できる条件として、古典電磁気学においてよく知られているものでもある [4, pp.195–196]. 以下では Gauss 単位系を用いて、この点を簡単にまとめておこう.

運動している電荷の系が遠方に作る場を考察する. すなわち図 1 のように記号を定義すると  $R_0 \gg r$  であり、このとき

$$R = |\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}| \simeq R_0 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}$$

と近似される. 遅延ポテンシャルは

$$\phi = \int \frac{\rho_{t-R/c}}{R} dV \simeq \frac{1}{R_0} \int \rho_{t-\frac{R_0}{c} + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{c}} dV, \quad \mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}_{t-R/c}}{R} dV \simeq \frac{1}{cR_0} \int \mathbf{j}_{t-\frac{R_0}{c} + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{c}} dV$$

となる. ここで被積分関数分母の  $R$  における  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}$  を無視したのに対し、電荷密度  $\rho$  と電流密度  $\mathbf{j}$  の引数における  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}$  を無視することは一般には許されない. この項を無視できるかどうかは、 $\rho$  と  $\mathbf{j}$  が時間  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}/c$  の間にどれだけ変化するかによって決まる.

時間  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}/c$  における電荷分布の変化が小さく、遅延ポテンシャルの中の電荷密度・電流密度の引数における  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}/c$  を無視できる条件を考える.

$T$ : 電荷分布が著しく変化するのに要する時間,

$a$ : 電荷の系の大きさの程度

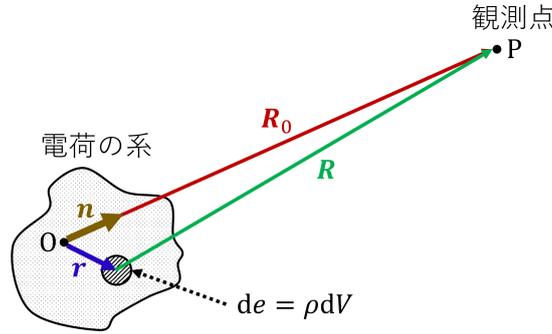


図1 位置  $\mathbf{r}$  の電荷要素と遠方  $\mathbf{R}_0$  の隔たりのベクトル  $\mathbf{R}$

とすると,  $T$  は放射される波の周期の目安となるので, 対応する波長を  $\lambda = cT$  と書くとき求める条件は

$$\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{c} \sim \frac{a}{c} \ll T, \quad \therefore a \ll \lambda$$

と表される. すなわち電荷の系の大きさは放射される波の波長に比べて小さくなければならない. これは場の Fourier 成分

$$\mathbf{A}_\omega = \frac{e^{ikR_0}}{cR_0} \int \mathbf{j}_\omega e^{-ik \cdot \mathbf{r}} dV$$

において, 電荷の位置  $\mathbf{r}$  を無視できる条件  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \sim ka \ll 1$  としても得られる. これは電荷の速度の代表的な速度  $v$  に対する条件

$$v \ll c$$

に書き換えられる ( $T \sim a/v$  による). すなわち電荷の運動は非相対論的な速度で行われなければならない. 電荷の系を「非相対論的に扱い」(p.11) と断っているのは, このような事情に関係していると考えられる.

■式 (1.44) について  $(\mathbf{k}, r)$  以外のモードの生成・消滅演算子は  $|n_r(\mathbf{k})\rangle$  に作用して  $|\dots, n_r(\mathbf{k}), \dots\rangle$  と直交する光子状態を作るから次のように和を計算できる.

$$\begin{aligned} & \langle B, n_r(\mathbf{k}) + 1 | H_I | A, n_r(\mathbf{k}) \rangle \\ &= \langle B | \langle n_r(\mathbf{k}) + 1 | i \sum_{\mathbf{k}'} \sum_{r'} \left( \frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}'}}{2V} \right)^{1/2} (-\mathbf{D}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{r'}(\mathbf{k}') (a_{r'}(\mathbf{k}') e^{-i\omega_{\mathbf{k}'} t} - a_{r'}^\dagger(\mathbf{k}') e^{i\omega_{\mathbf{k}'} t}) | A \rangle | n_r(\mathbf{k}) \rangle \\ &= \langle B | \langle n_r(\mathbf{k}) + 1 | i \left( \frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{2V} \right)^{1/2} (-\mathbf{D}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k}) (-e^{i\omega_{\mathbf{k}} t}) \sqrt{n_r(\mathbf{k}) + 1} | n_r(\mathbf{k}) + 1 \rangle | A \rangle \\ &= i \left( \frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{2V} \right)^{1/2} \sqrt{n_r(\mathbf{k}) + 1} e^{i\omega_{\mathbf{k}} t} \underbrace{\langle n_r(\mathbf{k}) + 1 | n_r(\mathbf{k}) + 1 \rangle}_1 \langle B | \boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{D} | A \rangle. \end{aligned}$$

最後に  $\mathbf{D}$  中の電荷の位置は観測量・演算子だから,  $\mathbf{D}$  を原子状態  $|A\rangle, |B\rangle$  の外へ出せないことを考慮した.

■時間に依存する摂動論の公式 (1.45) について [5, pp.48–50] 非摂動ハミルトニアン  $H_0$  のエネルギー固有値  $E_k$  に属する固有状態  $|k\rangle$  を用いて, 時間に依存する系の状態を

$$|\alpha\rangle = \sum_k c_k(t) e^{-iE_k t/\hbar} |k\rangle$$

と展開する．このとき展開係数  $c_m(t) \sim \langle m|\alpha \rangle$  は，系を与えられた状態  $|m\rangle$  に見出す確率振幅である．さて，時間に依存する摂動ハミルトニアン  $H_I(t)$  を加えた系の，時間に依存する Schrödinger 方程式

$$(H_0 + H_I) |\alpha\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\alpha\rangle$$

の両辺はそれぞれ，

$$\begin{aligned} (H_0 + H_I) |\alpha\rangle &= \sum_k (H_0 + H_I) c_k e^{-iE_k t/\hbar} |k\rangle \\ &= \sum_k (H_0 + E_k) c_k e^{-iE_k t/\hbar} |k\rangle, \quad (\text{固有方程式 } H_0 |k\rangle = E_k |k\rangle) \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\alpha\rangle &= i\hbar \sum_k \left( \dot{c}_k e^{-iE_k t/\hbar} - i \frac{E_k}{\hbar} c_k e^{-iE_k t/\hbar} \right) |k\rangle \end{aligned}$$

となり，これらを等置して

$$\sum_k H_I c_k e^{-iE_k t/\hbar} |k\rangle = i\hbar \sum_k \dot{c}_k e^{-iE_k t/\hbar} |k\rangle$$

を得る．両辺に左から  $\langle m|e^{iE_m t/\hbar}$  を掛けて規格直交性  $\langle m|k\rangle = \delta_{mk}$  を用いると，展開係数  $c_m(t)$  に対する方程式

$$\dot{c}_m(t) = \frac{1}{i\hbar} \sum_k \langle m|H_I(t)|k\rangle e^{i(E_m - E_k)t/\hbar} c_k(t)$$

が得られる．例えば初期時刻  $t = 0$  に系が  $H_0$  の固有状態の 1 つ  $|l\rangle$  にあるとすると，初期条件は

$$c_m(0) = \delta_{ml}$$

である．この下で上式を積分して逐次代入を行うと，摂動展開

$$\begin{aligned} c_m(t) &= \delta_{ml} + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' \sum_k \langle m|H_I(t')|k\rangle e^{i(E_m - E_k)t'/\hbar} c_k(t') \\ &= \delta_{ml} + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' \sum_k \langle m|H_I(t')|k\rangle e^{i(E_m - E_k)t'/\hbar} \left\{ \delta_{kl} + \frac{1}{i\hbar} \int_0^{t'} dt'' \sum_n \langle k|H_I(t'')|n\rangle e^{i(E_k - E_n)t''/\hbar} c_n(t'') \right\} \\ &= \dots \\ &= c_m^{(0)}(t) + c_m^{(1)}(t) + \dots, \\ c_m^{(0)}(t) &= \delta_{ml}, \quad c_m^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' \langle m|H_I(t')|l\rangle e^{i(E_m - E_l)t'/\hbar}, \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

を得る．異なる始・終状態  $|l\rangle, |m\rangle (\neq |l\rangle)$  を設定すれば，1 次の摂動論での状態遷移の確率振幅は  $c_m^{(1)}(t)$  そのものである．

我々が 1.3 節と 1.4 節で取り上げる過程では， $H_I(t)$  において

$$H'_I e^{\mp i\omega t}$$

という形を持つ単一の項のみが行列要素に寄与を持つ ( $H'_I$  は時間に依存しない演算子)．このとき確率振幅は

$$c_m^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar} \langle m|H'_I|l\rangle \int_0^t dt' e^{i(E_m - E_l \mp \hbar\omega)t'/\hbar}$$

であり，確率は絶対値の 2 乗  $|c_m^{(1)}(t)|^2$  で与えられる．そこで  $\Omega = (E_m - E_l \mp \hbar\omega)/\hbar$  と略記し， $t \rightarrow \infty$  を想定して，数学公式

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin^2 \alpha x}{\alpha x^2} = \delta(x) \quad (12)$$

を  $\alpha = t/2$  として適用すると，

$$\int_0^t dt' e^{i\Omega t'} = \frac{e^{i\Omega t} - 1}{i\Omega} = \frac{2e^{i\Omega t/2}}{\Omega} \sin \frac{\Omega t}{2}, \quad \therefore \left| \int_0^t dt' e^{i\Omega t'} \right|^2 = \left( \frac{\sin(\Omega t/2)}{(\Omega/2)} \right)^2 = 2\pi t \delta(\Omega)$$

となるので，遷移確率

$$w = \frac{|c_m^{(1)}(t)|^2}{t} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle m | H'_1 | l \rangle|^2 \delta(E_m - E_l \mp \hbar\omega)$$

を得る (これは式 (1.45) と等価である)．

参考——デルタ関数の 2 乗の公式 [5, pp.49–50] [6, pp.246–247]

他方，

$$\left| \int_0^t dt' e^{i\Omega t'} \right|^2 = \left| e^{i\Omega t/2} \int_0^t dt' e^{i\Omega(t'-t/2)} \right|^2 = \left| \int_{-t/2}^{t/2} dt'' e^{i\Omega t''} \right|^2 = [2\pi \delta(\Omega)]^2$$

であることに注意すると，我々はデルタ関数の 2 乗の公式

$$[\delta(\Omega)]^2 = \frac{t}{2\pi} \delta(\Omega) \quad \left( \text{同様に } [\delta(\mathbf{k})]^2 = \frac{V}{(2\pi)^3} \delta(\mathbf{k}) \right)$$

を見出したことになる．なるほど，デルタ関数の 2 乗もまたデルタ関数であり，両辺の次元を合わせるのに必要な時間  $t$  (ないし空間の体積  $V$ ) が係数として現れる．この結果は，より直観的には  $t \rightarrow \infty$  において

$$[\delta(\Omega)]^2 = \delta(\Omega) \int_{-t/2}^{t/2} \frac{dt'}{2\pi} e^{i\Omega t'} = \delta(\Omega) \int_{-t/2}^{t/2} \frac{dt'}{2\pi} = \frac{t}{2\pi} \delta(\Omega)$$

と導くことができ (第 2 の等号では  $\delta(\Omega)$  の下で被積分関数の  $\Omega$  をゼロとおいた)，ここから逆に公式 (12) が見出される．しかしながら上記と同様に，指数関数の積分を実行して式 (12) を用い，

$$[\delta(\Omega)]^2 = \left| \int_{-t/2}^{t/2} \frac{dt'}{2\pi} e^{i\Omega t'} \right|^2 = \left( \frac{\sin(\Omega t/2)}{\pi \Omega} \right)^2 = \frac{t}{2\pi} \delta(\Omega)$$

との方が厳密である．なお，

$$\delta(\Omega) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-t/2}^{t/2} \frac{dt'}{2\pi} e^{i\Omega t'} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin(\Omega t/2)}{\pi \Omega}$$

もまた， $y = \sin x/x$  のグラフからデルタ関数を作る方法として有名である．

■状態数 (1.47) について 運動量空間の状態数密度は  $V/h^3$  であり [2, pp.137–139]，1 つの固有状態が占める体積は波数空間に移ると  $1/h^3$  倍に縮むから，波数空間の状態数密度は  $h^3$  倍の  $V/(2\pi)^3$  に増える．これは固有状態が式 (1.13) より波数空間の体積  $(2\pi/L)^3$  を占めることと合致する．これは

$$d^3p \text{ 中に } \frac{V}{h^3} d^3p \text{ 個} \quad \Rightarrow \quad \text{対応する } d^3k \text{ 中 (} h^3 d^3k \text{ 中ではない) に } \frac{V}{h^3} d^3p = \frac{V}{(2\pi)^3} d^3k \text{ 個}$$

と言い換えられる．

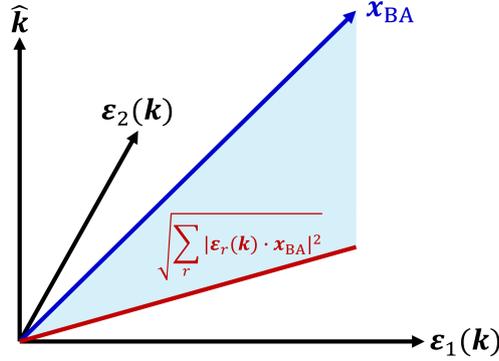


図2 複素ベクトル  $\mathbf{x}_{BA}$  をあたかも実数ベクトルであるかのように見なして描いた様子

■遷移確率の積分 (1.49) について  $k$  空間の立体角  $d\Omega$  に含まれる, 偏極  $r$  を持つ全ての状態について, 遷移確率  $w$  を足したもの

$$\int_k \frac{V k^2 dk d\Omega}{(2\pi)^3} w$$

が  $w_r d\Omega$  である ( $k \equiv |\mathbf{k}|$ ).

■式 (1.50) の導出について 積分 (1.49) において, Bohr の振動数条件を満たす波数  $k = \frac{E_A - E_B}{\hbar c}$  と区別するため積分変数を  $k'$  に改め, さらに  $\delta(E_A - E_B - \hbar\omega_{\mathbf{k}'}) = \frac{1}{\hbar c} \delta(k - k')$  に注意すると良い.

■p.15 最初の式 (本稿の式 (11)) の1行目について

$$\sum_r |\boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}_{BA}|^2 = |\mathbf{x}_{BA}|^2 - |\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{x}_{BA}|^2$$

は直観的には, 複素ベクトル  $\mathbf{x}_{BA}$  をあたかも実数ベクトルであるかのように見なして描いた図2の青い直角三角形において三平方の定理が成り立つことを意味している.

結果的にこれが正しいことは次のように確かめられる.  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  を実数ベクトルとして, 斜辺  $\mathbf{x}_{BA}$  を  $\mathbf{x}_{BA} = \mathbf{x} + i\mathbf{y}$  で置き換えた場合には三平方の定理

$$\sum_r |\boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}|^2 = \mathbf{x}^2 - (\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{x})^2, \quad \sum_r |\boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{y}|^2 = \mathbf{y}^2 - (\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{y})^2$$

が成り立つ. これを用い

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}_{BA}|^2 - |\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{x}_{BA}|^2 &= (\mathbf{x} + i\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - i\mathbf{y}) - |\hat{\mathbf{k}} \cdot (\mathbf{x} + i\mathbf{y})|^2 = (\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2) - ((\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{x})^2 + (\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{y})^2) \\ &= \sum_r |\boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}|^2 + \sum_r |\boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{y}|^2 = \sum_r |\boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}_{BA}|^2. \end{aligned}$$

■  $\int \sin^2 \theta d\Omega = \frac{8\pi}{3}$  (p.15) の確認

$$\int \sin^2 \theta d\Omega = \int_0^\pi \sin^2 \theta (2\pi \sin \theta d\theta) = 2\pi \int_{-1}^1 (1 - \cos^2 \theta) d(\cos \theta) = 2\pi \left[ \cos \theta - \frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_{\cos \theta = -1}^{\cos \theta = 1} = \frac{8\pi}{3}.$$

■寿命 (1.54) について 式 (1.54) では原子状態  $|A\rangle$  の寿命  $\tau$  だけ時間が経過すると原子状態が確実に  $|A\rangle$  でなくなる, すなわち  $|A\rangle$  でなくなる確率が 1 となるように寿命  $\tau$  が定義されている:

$$\left( \begin{array}{l} \text{単位時間に } |A\rangle \text{ でなくなる} \\ \text{確率 } \sum_n w_{\text{total}}(A \rightarrow B_n) \end{array} \right) \times \tau = 1 \quad \Leftarrow \quad \text{確率は時間に比例して増大.}$$

■p.15 下 4 行の選択則について まずパリティ選択則について復習する.

状態  $|\alpha\rangle$  を空間反転した状態  $\Pi|\alpha\rangle$  を作るパリティ変換の演算子  $\Pi$  を導入する (能動変換). 空間反転に際して位置ベクトル  $\mathbf{x}$  の期待値は符号を変えること

$$\langle \alpha | \mathbf{x} | \alpha \rangle \rightarrow \langle \alpha | \Pi^\dagger \mathbf{x} \Pi | \alpha \rangle = -\langle \alpha | \mathbf{x} | \alpha \rangle$$

を要求すると,  $\mathbf{x}$  はパリティが奇であること

$$\Pi^\dagger \mathbf{x} \Pi = -\mathbf{x} \quad (13)$$

が得られる.

次に  $\Pi$  をユニタリー演算子とすると  $\mathbf{x}\Pi = -\Pi\mathbf{x}$  なので, 固有状態  $|\mathbf{x}'\rangle$  に対して

$$\mathbf{x}\Pi|\mathbf{x}'\rangle = -\Pi\mathbf{x}|\mathbf{x}'\rangle = (-\mathbf{x}')\Pi|\mathbf{x}'\rangle$$

となる. これは  $\Pi|\mathbf{x}'\rangle$  が固有値  $-\mathbf{x}'$  の固有状態であることを意味する:

$$\Pi|\mathbf{x}'\rangle = |-\mathbf{x}'\rangle. \quad (14)$$

(ただし右辺の位相因子は慣習的に 1 とおいた.) 左から  $\Pi^\dagger$  を掛けると  $|\mathbf{x}'\rangle = \Pi^\dagger|-\mathbf{x}'\rangle$  となり, ここで  $\mathbf{x}' \rightarrow -\mathbf{x}'$  と置き換えた式と上式 (14) を組合せると

$$\Pi|\mathbf{x}'\rangle = |-\mathbf{x}'\rangle = \Pi^\dagger|\mathbf{x}'\rangle$$

を得る. これは  $\Pi$  の Hermite 性  $\Pi^\dagger = \Pi$  を意味する.

さらに状態  $|\alpha\rangle$  における  $\Pi$  の固有値を  $\Pi_\alpha$  とすると,  $\Pi$  のユニタリー性より

$$\langle \alpha | \alpha \rangle = \langle \alpha | \Pi^\dagger \Pi | \alpha \rangle = \Pi_\alpha^* \Pi_\alpha \langle \alpha | \alpha \rangle, \quad \therefore |\Pi_\alpha| = 1$$

となる. ここで  $\Pi$  の Hermite 性より固有値  $\Pi_\alpha$  が実であることも考慮すると,

$$\Pi_\alpha = \pm 1$$

でなければならない [7, pp.346–347].

そこでパリティ固有値  $\Pi_A, \Pi_B$  の 2 状態  $|A\rangle, |B\rangle$  に関する行列要素  $\langle B | \mathbf{x} | A \rangle$  を考えると,

$$\langle B | \mathbf{x} | A \rangle = \langle B | \Pi^\dagger (\Pi \mathbf{x} \Pi^\dagger) \Pi | A \rangle = -\Pi_A \Pi_B \langle B | \mathbf{x} | A \rangle. \quad (\because \text{式 (13)})$$

よって固有値  $\Pi_A, \Pi_B$  が等しければ, 積  $\Pi_A \Pi_B$  は 1 となり, 行列要素  $\langle B | \mathbf{x} | A \rangle$  はゼロとなってしまう [5, pp.52] [7, pp.357–358].

p.15 一番下の, 角運動量の選択則

$$\Delta J = 0, \pm 1, \quad \text{not}(J = 0 \rightarrow J = 0), \quad \Delta M = 0, \pm 1$$

は, Wigner-Eckart の定理から導かれる  $\langle B | (\text{ベクトル演算子}) | A \rangle$  に対する選択則として理解できる [5, p.52] [1, p.330]. これを示すには, テンソル演算子  $T_q^{(k)}$  に対する Wigner-Eckart の定理の帰結

$$M' = M + q, \quad |J - k| \leq J' \leq J + k$$

を考えれば充分である. ベクトル演算子  $k = 1$  に対して  $q = 0, \pm 1$  なので, 第 1 式の  $M$ -選択則は

$$\Delta M \equiv M' - M = q = 0, \pm 1$$

を意味する. 第 2 式の “三角不等式” は

$$|J - 1| \leq J' \leq J + 1$$

となる.  $J \geq 1$  であれば絶対値をそのまま外せて,  $-1 \leq J' - J \leq 1$ , すなわち

$$\Delta J \equiv J' - J = 0, \pm 1$$

となる. 他方, 不等式で  $J = 0$  とすると  $J' = 1$  となるので,

- この場合も含めて上式  $\Delta J \equiv J' - J = 0, \pm 1$  は正しい.
- $J = 0 \rightarrow J' = 0$  の遷移は禁止される.

なお

$$\text{not}(J = 0 \rightarrow J = 0)$$

は,  $J = 0 \rightarrow J = 0$  の遷移において  $J, M$  が変化せず  $|A\rangle = |B\rangle$  となるためパリティ選択則より  $\langle B | (\text{極性ベクトル}) | A \rangle = 0$  となることから分かると考えられる [7, pp.357–358].

## 1.4 電荷を含む空間における電磁場

序文を引用する.

前節では特別な例として電気双極子遷移を調べたが, 本節では移動する電荷の系と電磁場の相互作用を一般的に考察したい. この問題は後から相対論的に共変な形で扱う予定なので, ここでは完全に厳密な証明を与えることはせず, むしろ物理的な解釈面を強調する. 各電荷の運動は, 前節と同様に非相対論的に記述されるものとする. まず 1.4.1 項でハミルトニアン (Hamilton(ハミルトン) 関数) を用いた古典論の定式化を示す. これに基づき, 1.4.2 項において量子化された理論へ容易に移行することができる. 1.4.3 項と 1.4.4 項では, 量子化された理論を輻射遷移と Thomson(トムソン) 散乱へ応用してみる.

### 1.4.1 古典電磁気学

- 粒子
  - 正準運動量  $\mathbf{p} = m\mathbf{v} + \frac{e}{c}\mathbf{A}$  (非相対論的表式)
  - 力学的運動量  $\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}$
- 電磁場 (Coulomb ゲージ  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ )
  - 電場の横波成分  $\mathbf{E}_T = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$

<p>電磁場の全エネルギー</p> $\frac{1}{2} \int \mathbf{E}_L^2 d^3x + \frac{1}{2} \int (\mathbf{E}_T^2 + \mathbf{B}^2) d^3x \rightarrow H_C + \frac{1}{2} \int (\mathbf{E}_T^2 + \mathbf{B}^2) d^3x, \quad (\text{自己エネルギーを除く})$ $H_C = \frac{1}{2} \sum_{i,j(i \neq j)} \frac{e_i e_j}{4\pi  \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j } \quad \text{Coulomb相互作用}$
--

$$H = \underbrace{\sum \frac{1}{2m} \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2}_{H_m'} + H_C + \underbrace{\frac{1}{2} \int (\mathbf{E}_T^2 + \mathbf{B}^2) d^3x}_{\text{輻射場 } H_{\text{rad}}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H_m = \sum \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + H_C \quad \text{物質} \\ H_I = \sum \left( -\frac{e}{mc} \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} + \frac{e^2}{2mc^2} \mathbf{A}^2 \right) \quad \text{相互作用} \end{array} \right.$$

図3 電磁場と(非相対論的な)荷電粒子系のハミルトニアン

– 電場の縦波成分  $\mathbf{E}_L = -\nabla\phi$  (「縦波」は  $\nabla \times \mathbf{E}_L = 0$  の意味)

電磁場と(非相対論的な)荷電粒子系のハミルトニアン  $H$  は図3のように構成される ( $\sum$  は粒子に関する和).

#### 1.4.1 節, 式の導出など

図3のハミルトニアンについて補足する. Poisson 方程式  $\nabla^2\phi = -\rho$  を利用すると

$$\frac{1}{2} \int \mathbf{E}_L^2 d^3x = \frac{1}{2} \int \frac{\rho(\mathbf{x}, t)\rho(\mathbf{x}', t)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x d^3x' \quad (1.56)$$

と書き換えられる [本稿次節で補足]. ここに荷電粒子系の電荷密度の表式  $\rho(\mathbf{x}, t) = \sum_i e_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}_i(t))$  を代入すると,

$$\frac{1}{2} \int \mathbf{E}_L^2 d^3x = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{e_i e_j}{4\pi|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \rightarrow \frac{1}{2} \sum_{i,j(i \neq j)} \frac{e_i e_j}{4\pi|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} (\equiv H_C).$$

ただし「 $\rightarrow$ 」の部分では点電荷自身に付随する無限大の自己エネルギーを取り除いた. [最右辺の  $\frac{1}{2} \sum_{i,j(i \neq j)}$  は粒子対に関する和  $\sum_{i>j}$  である.]

#### 1.4.1 について

■式(1.56)について Poisson 方程式  $\nabla^2\phi = -\rho$  が成り立つは Coulomb ゲージの条件  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  による:

$$\rho = \nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \left( -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\phi \right) = -\nabla^2\phi.$$

こうして時間変化する場  $\mathbf{E}_L = -\nabla\phi$  も静電場と同じ法則で記述できることになる.

式(1.56):

$$\frac{1}{2} \int \mathbf{E}_L^2 d^3x = \frac{1}{2} \int \frac{\rho(\mathbf{x}, t)\rho(\mathbf{x}', t)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x d^3x'$$

を確かめるには, いきなり左辺に  $\mathbf{E}_L = \int \frac{\rho(\mathbf{x}', t)(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x'$  を代入するのではなく,  $\phi$  を用いて

$$\frac{1}{2} \int \mathbf{E}_L^2 d^3x = \frac{1}{2} \int (\nabla\phi)^2 d^3x = -\frac{1}{2} \int \phi \nabla^2\phi d^3x$$

と書き換えてから

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{x}', t)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x', \quad \nabla^2 \phi(\mathbf{x}, t) = -\rho(\mathbf{x}, t)$$

を代入すると良い。

式 (1.56) は場の持つエネルギー  $-\frac{1}{2} \int \mathbf{E}_L^2 d^3x$  を電荷の位置エネルギー  $-\frac{1}{2} \int \frac{\rho(\mathbf{x}, t)\rho(\mathbf{x}', t)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x d^3x'$  とも見なせることを意味している。(文献 [4](ランダウ=リフシッツ『場の古典論』)の§ 33, § 37 とそのノートも併せて参照。)

なお粒子間相互作用を Coulomb 相互作用で記述することは、非相対論的な取扱いに当たる。静電場に対する Coulomb の法則は、荷電粒子の運動が遅い場合に良い近似になる [4, pp.103-105, pp.186-189].

■ 「 $\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{A}_i$  と [を]  $\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{p}_i$  に置き換えたことは、ゲージを  $\nabla_i \cdot \mathbf{A}_i = 0$  に選んだことから正当化される」(p.19, 1.2.3) について これは次のように理解できる [1, p.425]. 個々の粒子について、波動関数  $\psi$  に対して  $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$  なので、

$$\begin{aligned} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{A})\psi &= -i\hbar\nabla \cdot (\mathbf{A}\psi) \\ &= (-i\hbar\nabla\psi) \cdot \mathbf{A} + (-i\hbar\nabla \cdot \mathbf{A})\psi \\ &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{p})\psi. \quad (\because \nabla \cdot \mathbf{A} = 0) \end{aligned}$$

#### 1.4.2 量子電磁力学

- 量子化

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{粒子} \leftarrow \text{座標 } \mathbf{r}_i \text{ と運動量 } \mathbf{p}_i \text{ の [正準] 交換関係} \\ \text{輻射場} \leftarrow \text{調和振動子の交換関係 (1.2.3 項)} \end{array} \right.$$

縦波成分  $\mathbf{E}_L$  は電荷だけから  $\nabla \cdot \mathbf{E}_L = 0$  で完全に決まり、系の自由度に寄与しない。

- $H_m$  の固有状態を  $|A\rangle$ ,  $H_{\text{rad}}$  の固有状態を  $|\dots, n_r(\mathbf{k}), \dots\rangle$  として、非摂動ハミルトニアン  $H_0 = H_m + H_{\text{rad}}$  の固有状態はここでも

$$|A\rangle |\dots, n_r(\mathbf{k}), \dots\rangle$$

で与えられる。

- 摂動ハミルトニアン

$$H_I = \sum \left( -\frac{e}{mc} \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} + \frac{e^2}{2mc^2} \mathbf{A}^2 \right)$$

は、電気双極子相互作用 (1.40):  $H_I = -\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}_T(\mathbf{0}, t)$  と比べると、

-  $\mathbf{A}^2$  の項を含む  $\rightarrow$  1 次の摂動論でも 2 光子過程が関わる。

[1 次の摂動論において遷移率は行列要素  $\langle f | H_I | i \rangle$  で表される.]

-  $\mathbf{A}$  の 1 次の項  $\rightarrow$  磁気的な相互作用と、 $\mathbf{A}$  の空間変化による高次の効果を含む。

#### 1.4.3 原子における輻射遷移

ここでは正確な相互作用 (1.62):

$$H_I = \sum \left( -\frac{e}{mc} \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} + \frac{e^2}{2mc^2} \mathbf{A}^2 \right)$$

を用いて, 1.3 節で考えた光子放出の過程 (1.42):  $|A\rangle |n_r(\mathbf{k})\rangle \rightarrow |B\rangle |n_r(\mathbf{k}) + 1\rangle$  の遷移確率を計算すると, 電気双極子近似による結果 (1.50) は

$$w_r d\Omega = \frac{e^2 \omega d\Omega}{8\pi^2 m^2 \hbar c^3} [n_r(\mathbf{k}) + 1] \left| \boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k}) \cdot \langle B | \sum_i e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i} \mathbf{p}_i | A \rangle \right|^2 \quad (1.66)$$

に置き換わる [導出は本稿次節]. これは (原子サイズ)  $\ll$  (電磁波の波長) すなわち  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i \ll 1$  のとき,  $e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i} \simeq 1$  となって電気双極子近似の結果 (1.50) に帰着する [確認は本稿次節,  $e$ :素電荷,  $m$ :電子質量,  $\omega$ :Bohr 振動数].

- 展開  $e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i} = 1 - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i + \dots$  の高次の項  $-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i$  からは, 式 (1.66) の行列要素に対する磁気双極子相互作用と電気四重極子相互作用の寄与が現れる [本稿次節で補足]\*3.  
「これらの行列要素に起因する遷移前後のパリティと角運動量に関する選択則は, 式の形から簡単に決定できる」(p.21, 1.9-11) [詳細は文献 [5, p.56] にある].
- 「ここでも光子放射の式 (1.66) に対して,  $[n_r(\mathbf{k}) + 1]$  を  $n_r(\mathbf{k})$  に置き換え, 行列要素の解釈などを適切に変更すれば, 光子の吸収過程の式になる」(p.21, 1.14-16).

#### 1.4.3 について

■行列要素 (1.65) の導出 式 (1.65):

$$\langle B, n_r(\mathbf{k}) + 1 | H_I | A, n_r(\mathbf{k}) \rangle = -\frac{e}{m} \left( \frac{\hbar}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} [n_r(\mathbf{k}) + 1]^{1/2} \langle B | \boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k}) \cdot \sum_i e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i} \mathbf{p}_i | A \rangle e^{i\omega_{\mathbf{k}} t}$$

は「 $[H_I]$  の式 (1.62) における  $\mathbf{A}$  の 1 次の項による」(p.20, 1.6). 実際  $H_I$  における  $\mathbf{A}^2$  の各項は生成・消滅演算子について 2 次なので,  $|n_r(\mathbf{k})\rangle$  に作用して作られるベクトルは  $|n_r(\mathbf{k}) + 1\rangle$  に直交する. また  $\mathbf{p}$  は単体で正準運動量の演算子と見なし,  $\mathbf{A}$  の 1 次の項 ( $\sim \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}$ ) において, これをさらに  $\mathbf{p} = m\mathbf{v} + \frac{e}{c}\mathbf{A}$  と分解して  $\mathbf{A}$  依存性を考える必要はない. 同じ理由で  $\mathbf{p}$  は光子状態のブラケット  $\langle n_r(\mathbf{k}) + 1 | \dots | n_r(\mathbf{k}) \rangle$  の外に出して構わない. これらを踏まえると, 上式 (1.65) は次のように確かめられる.

$$\begin{aligned} & \langle B, n_r(\mathbf{k}) + 1 | H_I | A, n_r(\mathbf{k}) \rangle \\ &= \langle B | \langle n_r(\mathbf{k}) + 1 | \left( -\frac{e}{mc} \right) \sum_i \mathbf{p}_i \cdot \sum_{s, \mathbf{k}'} \left( \frac{\hbar c^2}{2V\omega_{\mathbf{k}'}} \right)^{1/2} \boldsymbol{\varepsilon}_s(\mathbf{k}') \\ & \quad \times \{ a_s(\mathbf{k}') e^{i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}_i - \omega_{\mathbf{k}'} t)} + a_s^\dagger(\mathbf{k}') e^{-i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}_i - \omega_{\mathbf{k}'} t)} \} | n_r(\mathbf{k}) \rangle | A \rangle \\ &= -\frac{e}{mc} \left( \frac{\hbar c^2}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} \langle n_r(\mathbf{k}) + 1 | a_r^\dagger(\mathbf{k}) | n_r(\mathbf{k}) \rangle \boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k}) \cdot \langle B | \sum_i \mathbf{p}_i e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i} | A \rangle e^{i\omega_{\mathbf{k}} t} \\ &= -\frac{e}{m} \left( \frac{\hbar}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} [n_r(\mathbf{k}) + 1]^{1/2} \langle B | \boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k}) \cdot \sum_i e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i} \mathbf{p}_i | A \rangle e^{i\omega_{\mathbf{k}} t}. \end{aligned}$$

■遷移確率 (1.66) の導出 1.3 節と同様, 求める遷移確率は

$$w_r d\Omega = \int_{\mathbf{k}} \frac{2\pi}{\hbar} |\langle B, n_r(\mathbf{k}) + 1 | H_I | A, n_r(\mathbf{k}) \rangle|^2 \delta(E_A - E_B - \hbar\omega_{\mathbf{k}}) \frac{V k^2 dk d\Omega}{(2\pi)^3}$$

\*3 我々は  $H_I$  において電子のスピンと磁場の相互作用項  $H_I^{(\text{spin})}$  を省略してきたが, 実際にはスピンも磁気モーメントに寄与する.  $H_I^{(\text{spin})}$  の行列要素に対する最低次の寄与は, 軌道磁気モーメントの項と同程度である [5, p.45, p.51, p.56].

と表される。ここに行列要素の式 (1.65) を代入すると、

$$w_r d\Omega = \frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{\hbar}{2V\omega_{\mathbf{k}}} [n_r(\mathbf{k}) + 1] \left\{ \int_{\mathbf{k}} \frac{V k^2 d\mathbf{k} d\Omega}{(2\pi)^3} \delta(E_A - E_B - \hbar\omega_{\mathbf{k}}) \right\} \left| \boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k}) \cdot \langle B | \sum_i e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_i} \mathbf{p}_i | A \rangle \right|^2$$

を得る。さらに  $\delta(E_A - E_B - \hbar\omega_{\mathbf{k}}) = \frac{1}{\hbar} \delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}})$  に注意し、

$$\int_0^\infty dk k^2 \delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}}) = \frac{1}{c^3} \int_0^\infty d\omega \omega^2 \delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}}) = \frac{\omega_{\mathbf{k}}^2}{c^3}$$

と積分を実行すれば、式 (1.66) が導かれる。

■  $e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_i} \simeq 1$  のとき電気双極子近似の結果 (1.50) が再現されることの確認 遷移確率 (1.66) における行列要素は、 $e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_i} = 1$  とおくと  $\langle B | \mathbf{p}_i | A \rangle$  となる。ここで  $\mathbf{p}_i = m\dot{\mathbf{r}}_i + \frac{e}{c}\mathbf{A}_i$  における  $\mathbf{A}_i$  の項は光子の生成・消滅演算子を含み、原子状態に関する行列要素  $\langle B | \mathbf{p}_i | A \rangle$  への寄与を持たない。このことと運動方程式  $i\hbar\dot{\mathbf{r}}_i = [\mathbf{r}_i, H]$  を用いると、

$$\langle B | \mathbf{p}_i | A \rangle = m \langle B | \dot{\mathbf{r}}_i | A \rangle = \frac{m}{i\hbar} \langle B | [\mathbf{r}_i, H] | A \rangle = \frac{m}{i\hbar} (E_A - E_B) \langle B | \mathbf{r}_i | A \rangle = -im\omega \langle B | \mathbf{r}_i | A \rangle$$

となる。よってこのとき遷移確率 (1.66) は電気双極子近似による式 (1.50) に帰着する。

しかしながら原子状態  $|A\rangle, |B\rangle$  は  $H_m = \sum_i \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + H_C$  の固有状態である (p.19)。そこで  $H$  の代わりに  $H_m$  を用いて、

$$[\mathbf{p}_i^2, \mathbf{r}_i] = -2i\hbar\mathbf{p}_i, \quad (\text{正準交換関係}, [H_C, \mathbf{r}_i] = 0)$$

$$\therefore \langle B | \mathbf{p}_i | A \rangle = \langle B | \frac{im}{\hbar} [H_m, \mathbf{r}_i] | A \rangle = \frac{im(E_B - E_A)}{\hbar} \langle B | \mathbf{r}_i | A \rangle = -im\omega \langle B | \mathbf{r}_i | A \rangle$$

とする方が好ましい [5, p.51].

■ 磁気双極子・電気 4 重極子相互作用 (p.21) について 1.3 節のノートに古典論の水準でまとめた双極子放射について、さらに高い近似に進むと 4 重極放射および磁気双極放射が得られる [4, pp.210–212]. 対応する放射の場はそれぞれ、4 重極モーメント  $D_{\alpha\beta} (\alpha, \beta = 1, 2, 3)$  と磁気モーメント  $\mathbf{m}$  で表される。トレースレスの形に定義した 4 重極モーメントは  $D_{\alpha\beta} = \sum e(3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta})$  である [4, p.111]. また比電荷  $e/m$  が全ての粒子に共通な荷電粒子系の磁気モーメントは、非相対論的極限では  $\mathbf{m} = \frac{e}{2mc}\mathbf{M}$  と表され、角運動量  $\mathbf{M} = \sum \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  に比例する [4, p.119].

さて、展開  $e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_i} = 1 - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_i + \dots$  の高次の項  $-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_i$  は、行列要素 (1.66) の絶対値の中身に対して

$$\boldsymbol{\varepsilon}_r \cdot \langle B | \sum_i (-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_i) \mathbf{p}_i | A \rangle = -i \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 \varepsilon_{r\alpha} k_\beta \langle B | \sum_i r_{i\beta} p_{i\alpha} | A \rangle \quad (15)$$

の寄与を持つ (p.21, 1.2). 右辺の行列要素  $\langle B | \sum_i r_{i\beta} p_{i\alpha} | A \rangle$  の対称部分と反対称部分がそれぞれ磁気双極子・電気 4 重極子相互作用に対応するというのは、冒頭で予告されていた「時折もっともらしく見える通念に頼る」(p.2, 1.12) 場面の 1 つと言える。

この点をより明確にするには、次のようにすれば良い [5, pp.55–56]. まず、 $\langle B | \sum_i r_{i\beta} p_{i\alpha} | A \rangle$  の対称部分と反対称部分への分解を、p.21, 1.6.7 の式の代わりに

$$\langle B | \sum_i r_{i\beta} p_{i\alpha} | A \rangle = \frac{1}{2} \left\{ \langle B | \sum_i (r_{i\beta} p_{i\alpha} + p_{i\beta} r_{i\alpha}) | A \rangle + \langle B | \sum_i (r_{i\beta} p_{i\alpha} - p_{i\beta} r_{i\alpha}) | A \rangle \right\} \quad (16)$$

と書く。(対称部分と反対称部分のそれぞれにおいて、第2項の演算子  $p_{i\beta}, r_{i\alpha}$  の順序を教科書と逆に書いた。)

ここで対称部分について考えよう。非摂動ハミルトニアン  $H_m = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} + H_C$  において、Coulomb 相互作用  $H_C$  は電子の位置  $r_{i\alpha}$  と交換する。よって正準交換関係を用いると

$$[H_m, r_{i\beta} r_{i\alpha}] = \frac{1}{2m} \sum_{j,\gamma} [p_{j\gamma} p_{j\gamma}, r_{i\beta} r_{i\alpha}] = -\frac{i\hbar}{m} (r_{i\beta} p_{i\alpha} + p_{i\beta} r_{i\alpha})$$

となる。また原子状態  $|A\rangle, |B\rangle$  は  $H_m$  の固有状態であり (p.19), 例えば光子の放出過程を想定して、それぞれのエネルギー固有値を  $E_A, E_B = E_A - \hbar\omega$  とすると、対称部分は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \langle B | \sum_i (r_{i\beta} p_{i\alpha} + p_{i\beta} r_{i\alpha}) | A \rangle &= \frac{im}{2\hbar} \langle B | \sum_i [H_m, r_{i\beta} r_{i\alpha}] | A \rangle = \frac{im}{2\hbar} (E_B - E_A) \langle B | \sum_i r_{i\beta} r_{i\alpha} | A \rangle \\ &= -\frac{im\omega}{2} \langle B | \sum_i r_{i\beta} r_{i\alpha} | A \rangle \end{aligned}$$

と書き換えられる。最右辺の行列要素の中身は

$$\sum_i r_{i\beta} r_{i\alpha} \rightarrow \frac{D_{\alpha\beta}}{3} = \sum_i \left( r_{i\beta} r_{i\alpha} - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{3} |\mathbf{r}_i|^2 \right)$$

のように、4重極モーメント  $D_{\alpha\beta}$  に置き換えても良い。と言うのも、付加的な項 ( $\sim \delta_{\alpha\beta}$ ) は上式 (15) において  $\varepsilon_{r\alpha}, k_\beta$  と縮約されるので、横波条件  $\boldsymbol{\varepsilon}_r \cdot \mathbf{k} = 0$  により消えるからである。よって式 (16) の対称な項は4重極相互作用を記述していると言える。

式 (16) の反対称な項における  $r_{i\beta} p_{i\alpha} - p_{i\beta} r_{i\alpha}$  は、古典的には軌道角運動量  $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  の成分  $\varepsilon_{\gamma\beta\alpha} M_\gamma$  に一致する ( $\mathbf{r}$  と  $\mathbf{p}$  の順序が問題にならないから)。これは係数  $e/2mc$  を付ければ磁気モーメントなので、反対称な項は磁気双極子相互作用に対応する。

#### 1.4.4 Thomson 散乱

はじめに第1段落を引用する。

2番目の例として Thomson 散乱を考える。これはエネルギー  $\hbar\omega$  の光子が原子内の電子によって散乱される過程であるが、 $\hbar\omega$  が電子の束縛エネルギーに比べて十分に高く、電子は自由電子として扱えるものとする。一方  $\hbar\omega$  は電子の静止エネルギー  $mc^2$  に比べれば十分に低いという仮定も同時に採用する。反跳運動量が小さければ反跳エネルギーを無視できるので、この場合は散乱前後で光子エネルギーに変更のない  $\hbar\omega' = \hbar\omega$  の過程と見なして良い。

Thomson 散乱の始・終状態は次のように設定できる (ただし  $\alpha, \beta = 1, 2$ )。

- 始状態  $|i\rangle \equiv |\mathbf{k}, \alpha\rangle$  運動量  $\hbar\mathbf{k}$ , 偏極  $\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha(\mathbf{k})$  の光子が1つある
- 終状態  $|f\rangle \equiv |\mathbf{k}', \beta\rangle$  運動量  $\hbar\mathbf{k}'$ , 偏極  $\boldsymbol{\varepsilon}_\beta(\mathbf{k}')$  の光子が1つある

1次の摂動論では遷移は相互作用 (1.62):  $H_I = \sum \left( -\frac{e}{mc} \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} + \frac{e^2}{2mc^2} \mathbf{A}^2 \right)$  における  $\mathbf{A}^2$  の項を通して起こり得る [本稿次節で補足]。[ここでは1個の電子による散乱を考えており、また1.3節のように原子の範囲における場  $\mathbf{A}$  の空間変化を無視できる、あるいは電子の位置  $\mathbf{r} = \mathbf{0}$  における場  $\mathbf{A}$  の値を考えれば充分であるとすると、] 遷移の行列要素は

$$\langle f | \frac{e^2}{2mc^2} \mathbf{A}^2(\mathbf{0}, t) | i \rangle$$

で与えられる．ここから始状態  $|i\rangle = |\mathbf{k}, \alpha\rangle$  にある光子が，波数  $\mathbf{k}'$  の向きの立体角範囲  $d\Omega$  に，偏極  $\varepsilon_\beta(\mathbf{k}')$  を持った状態で単位時間あたりに散乱される確率は，

$$w_{\alpha \rightarrow \beta}(\mathbf{k}') d\Omega = \int_{\mathbf{k}'} \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle f | \frac{e^2}{2mc^2} \mathbf{A}^2(\mathbf{0}, t) | i \rangle \right|^2 \delta(\hbar(\omega' - \omega)) \frac{V k'^2 dk' d\Omega}{(2\pi)^3} \quad (17)$$

$$= \frac{c}{V} r_0^2 [\varepsilon_\alpha(\mathbf{k}) \cdot \varepsilon_\beta(\mathbf{k}')]^2 d\Omega \quad (18)$$

と計算される ( $\omega \equiv c|\mathbf{k}|, \omega' \equiv c|\mathbf{k}'|$ ) [導出は下記，1行目のデルタ関数は冒頭の「 $\hbar\omega' = \hbar\omega$  の過程」に対応]．ただし  $r_0 \equiv \frac{e^2}{4\pi mc^2}$  は古典電子半径であり，ここでは  $|\mathbf{k}'| = |\mathbf{k}|$  の関係がある．これを入射光子の流束密度  $c/V$  で割ると，微分断面積

$$\sigma_{\alpha \rightarrow \beta}(\mathbf{k}') d\Omega = r_0^2 [\varepsilon_\alpha(\mathbf{k}) \cdot \varepsilon_\beta(\mathbf{k}')]^2 d\Omega \quad (1.69)$$

を得る [微分断面積については 8.1 節も併せて参照]．さらに非偏極の入射光と偏極を区別しない検出器を想定して，

- 始状態の偏極  $\alpha$  について平均をとり ( $\frac{1}{2} \sum_\alpha$  を作用させ)，
- 終状態の偏極  $\beta$  について和をとると ( $\sum_\beta$  を作用させると)，

散乱角  $\theta$  の非偏極微分断面積

$$\sigma(\theta) d\Omega = \frac{1}{2} r_0^2 (1 + \cos^2 \theta) d\Omega \quad (1.69a)$$

が得られる．散乱角について積分した，Thomson 散乱の全断面積は  $\sigma_{\text{tot}} = \frac{8\pi}{3} r_0^2$  である．

#### ■ 1.4.4 節，式の導出など

■ 遷移確率 (18) の導出 場の Fourier 展開 (1.38):

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}, r} \left( \frac{\hbar c^2}{2V \omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} \varepsilon_r(\mathbf{k}) \{ a_r(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}} t)} + a_r^\dagger(\mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}} t)} \}$$

より，

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^2(\mathbf{0}, t) &= \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \sum_{r, s} \frac{\hbar c^2}{2V (\omega_{\mathbf{k}_1} \omega_{\mathbf{k}_2})^{1/2}} (\varepsilon_r(\mathbf{k}_1) \cdot \varepsilon_s(\mathbf{k}_2)) \\ &\quad \times [a_r(\mathbf{k}_1) e^{-i\omega_{\mathbf{k}_1} t} + a_r^\dagger(\mathbf{k}_1) e^{+i\omega_{\mathbf{k}_1} t}] [a_s(\mathbf{k}_2) e^{-i\omega_{\mathbf{k}_2} t} + a_s^\dagger(\mathbf{k}_2) e^{+i\omega_{\mathbf{k}_2} t}] \end{aligned}$$

となる．遷移  $|\mathbf{k}, \alpha\rangle \rightarrow |\mathbf{k}', \beta\rangle$  の行列要素を得るには，最右辺の 2 つの  $[\dots]$  において

- 一方から始状態の光子を消滅させる演算子の項を選び，
- もう一方から終状態の光子を生成する演算子の項を選べば良い．

[それには  $(r, \mathbf{k}_1; s, \mathbf{k}_2) = (\alpha, \mathbf{k}; \beta, \mathbf{k}'), (\beta, \mathbf{k}'; \alpha, \mathbf{k})$  の 2 通りの選択が可能なので，] 行列要素は

$$\begin{aligned} &\langle \mathbf{k}', \beta | \frac{e^2}{2mc^2} \mathbf{A}^2(\mathbf{0}, t) | \mathbf{k}, \alpha \rangle \\ &= \frac{\hbar c^2}{2V (\omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}'})^{1/2}} (\varepsilon_\alpha(\mathbf{k}) \cdot \varepsilon_\beta(\mathbf{k}')) e^{i(\omega_{\mathbf{k}'} - \omega_{\mathbf{k}}) t} \langle \mathbf{k}', \beta | \{ a_\alpha(\mathbf{k}) a_\beta^\dagger(\mathbf{k}') + a_\beta^\dagger(\mathbf{k}') a_\alpha(\mathbf{k}) \} | \mathbf{k}, \alpha \rangle \\ &= \frac{e^2 \hbar}{2mV (\omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}'})^{1/2}} \varepsilon_\alpha(\mathbf{k}) \cdot \varepsilon_\beta(\mathbf{k}') e^{i(\omega_{\mathbf{k}'} - \omega_{\mathbf{k}}) t} \quad (\because \langle \mathbf{k}', \beta | a_\beta^\dagger(\mathbf{k}') a_\alpha(\mathbf{k}) | \mathbf{k}, \alpha \rangle = \langle 0|0\rangle = 1) \end{aligned}$$

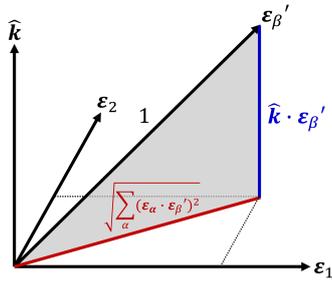


図4 教科書 p.23, 1.3 の式の図解

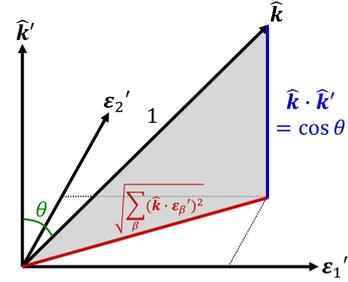


図5 教科書 p.23, 1.6 の式の図解

と計算される。[ただし最後の等号では暗に  $(\alpha, \mathbf{k}) \neq (\beta, \mathbf{k}')$  (つまり散乱による変化) を仮定して,  $a_\alpha(\mathbf{k})$  と  $a_\beta^\dagger(\mathbf{k}')$  を交換しなければならないと考えられる。] これを上式 (17) に代入して, 遷移確率 (18) を得る。

■非偏極微分断面積 (1.69a) の導出 微分断面積 (1.69) において, 始状態の偏極  $\alpha$  について平均をとり ( $\frac{1}{2} \sum_\alpha$ ), 終状態の偏極  $\beta$  について和をとると ( $\sum_\beta$ ),

$$r_0^2 \left[ \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 (\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha(\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_\beta(\mathbf{k}'))^2 \right] d\Omega$$

となる。ここで偏極ベクトルを  $\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha \equiv \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha(\mathbf{k}), \boldsymbol{\varepsilon}'_\beta \equiv \boldsymbol{\varepsilon}_\beta(\mathbf{k}')$  と略記し,  $\mathbf{k}$  と  $\mathbf{k}'$  の成す角 (散乱角) を  $\theta$  とおく。  $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$  は直交座標系を成すことに注意すると, [図4, 図5の直角三角形に三平方の定理を適用して,]

$$\sum_{\alpha=1}^2 (\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha \cdot \boldsymbol{\varepsilon}'_\beta)^2 = 1 - (\hat{\mathbf{k}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}'_\beta)^2, \quad \sum_{\beta=1}^2 (\hat{\mathbf{k}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}'_\beta)^2 = 1 - (\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}')^2 = \sin^2 \theta$$

を得る。これら2式を組合せると, 考えている和は

$$\frac{1}{2} \sum_{\alpha} \sum_{\beta=1}^2 (\boldsymbol{\varepsilon}_{\alpha=1}^2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}'_\beta)^2 = \frac{1}{2} (2 - \sin^2 \theta) = \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta)$$

と評価されるので, 非偏極微分断面積は式 (1.69a) で与えられる。

#### 1.4.4 について

■「 $\hbar\omega$  が電子の束縛エネルギーに比べて十分に高く, 電子は自由電子として扱える」(1.4.4 節, 1.2.3) について 電子を束縛状態から励起する際に光子が失うエネルギーを無視し得る。

■「1次摂動においては, 式 (1.62) の  $A^2$  の項を通して起こり得る」(p.21, 一番下の行) について

- 始状態の光子の消滅演算子
- 終状態の光子の生成演算子

を含む項が, 行列要素  $\langle f|H_1|i\rangle$  にゼロでない寄与する。

2次の摂動論では,

$$H_1 = -\frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} + \frac{e^2}{2mc^2} \mathbf{A}^2$$

における  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{p}$  項が2回続けて関与する過程も寄与を持つ。それは1次の摂動論における  $\mathbf{A}^2$  項の寄与と同じく、摂動パラメーター  $e$  の2次のオーダーとなる [5, p.59]。しかしながら Thomson 散乱では2次過程の寄与を無視できることが、教科書 p.22 で引用されている文献 [5, p.63] において、詳しく説明されている。その計算を大まかに見ると、結局  $H_I$  の形から推察されるように、反応の確率振幅に対する2つの  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{p}$  項の寄与は、1つの  $\mathbf{A}^2$  項の寄与の

$$\frac{p^2/2m}{\hbar\omega} \text{倍}$$

程度になる(分母の  $\hbar\omega$  は無次元化に必要な因子として期待される)。電子の運動エネルギー(の固有値)  $p^2/2m$  は高々、束縛エネルギーの深さ程度なので、Thomson 散乱の状況設定では  $\hbar\omega$  との比 ( $\ll 1$ ) は無視できる。

■古典電子半径 (1.70) について 電子に半径  $r_0$  程度の拡がりを与えて、自己エネルギー  $e^2/4\pi r_0$  が静止エネルギー  $mc^2$  と同程度の有限の値になることを要求すると、古典電子半径の式 (1.70):  $r_0 = e^2/4\pi mc^2$  が得られる。これは古典電磁気学が破綻する距離尺度を、古典電磁気学自身が示した値と言える [4, p.102]。

■Thomson 散乱の断面積 (1.72) について 古典的な放射の理論からも自由電荷による散乱に関して、同じ断面積の公式が得られる(微断面積は一致しない) [4, pp.241-242]。

## 1.5 付録 : Schrödinger 描像, Heisenberg 描像, 相互作用描像

ここでは量子力学において系の時間発展を記述する3通りの方法として、Schrödinger 描像, Heisenberg 描像, 相互作用描像を導入する。

■Schrödinger 描像 Schrödinger 描像において時刻  $t$  での系の状態を  $|\alpha, t\rangle$  とすると、その時間発展は

$$|\alpha, t\rangle = U(t) |\alpha, 0\rangle$$

と書ける。ここに系の Hamilton 演算子  $H$  に対して  $U(t)$  は Schrödinger 方程式

$$i \frac{d}{dt} U = H U \tag{19}$$

および  $U(0) = 1$ (恒等演算子) を満たす時間発展の演算子である。これは状態ケット  $|\alpha, t\rangle$  が Schrödinger 方程式

$$i \frac{d}{dt} |\alpha, t\rangle = H |\alpha, t\rangle \tag{20}$$

に従って時間発展することを意味する。これに対し観測量  $A$  の固有ケット  $\{|a'\rangle\}$  を基底ケットに用いると(ここでは固有値  $a'$  として、離散的な値をとるものも考えても連続的な値をとるものも考えても良い)、Schrödinger 描像において観測量  $A$  は時間変化しないので、基底ケット  $\{|a'\rangle\}$  も時間変化しない。以下、ハミルトニアンが時間に陽に依らない場合を考える。このとき時間発展の演算子は

$$U(t) = e^{-iHt} \tag{21}$$

と書ける (pp.23-24) [1, pp.91-92, pp.96-97, pp.116-117]。

■Heisenberg 描像 一方, Heisenberg 描像において状態ケットは

$$|\alpha\rangle_{\text{H}} = |\alpha, 0\rangle$$

のように時間変化しない. また, Heisenberg 描像の観測量は Schrödinger 描像の観測量を  $A$  として

$$A^{\text{H}}(t) = U^\dagger(t)AU(t) \quad (22)$$

で定義される. このとき観測量の期待値は Schrödinger 描像と Heisenberg 描像とで同じになる:

$$\langle \alpha, t | A | \alpha, t \rangle = \langle \alpha, 0 | U^\dagger(t)AU(t) | \alpha, 0 \rangle = {}_{\text{H}} \langle \alpha | A^{\text{H}}(t) | \alpha \rangle_{\text{H}}.$$

このように Schrödinger 描像では系の状態が時間変化するのに対し, Heisenberg 描像では観測量を表す演算子が時間変化する. そして時間的発展の演算子  $U(t)$  が Schrödinger 方程式 (19) に従うことから, Heisenberg 描像の観測量 (22) は Heisenberg 方程式

$$\frac{dA^{\text{H}}}{dt} = \frac{1}{i}[A^{\text{H}}, H] \quad (23)$$

に従って時間変化することが導かれる (ただし右辺の  $H$  は Schrödinger 描像の Hamilton 演算子である). さらに Schrödinger 描像の観測量  $A$  に対する固有方程式

$$A | a' \rangle = a' | a' \rangle$$

は Heisenberg 描像の観測量  $A^{\text{H}}(t)$  に対する固有方程式

$$A^{\text{H}}(t) | a', t \rangle_{\text{H}} = a' | a', t \rangle_{\text{H}}, \quad (24)$$

$$| a', t \rangle_{\text{H}} = U^\dagger(t) | a' \rangle, \quad \therefore {}_{\text{H}} \langle a', t | = \langle a' | U(t) \quad (25)$$

になる. これは Heisenberg 描像の基底ケットが式 (25) の  $| a', t \rangle_{\text{H}}$  であることを意味する. Heisenberg 描像の基底ケット  $| a', t \rangle_{\text{H}} = U^\dagger(t) | a' \rangle$  は Schrödinger 描像の状態ケット  $|\alpha, t\rangle = U(t) |\alpha, 0\rangle$  とよわば“逆向きに回転”する. このため状態ケットと基底ケットの内積に他ならない確率 (または確率密度) の振幅は Schrödinger 描像と Heisenberg 描像とで同じ値となることが保証される (p.24) [1, pp.110–112, pp.116–119]:

$$\langle a' | \alpha, t \rangle = \langle a' | U(t) | \alpha, 0 \rangle = {}_{\text{H}} \langle a', t | \alpha \rangle_{\text{H}}.$$

■相互作用描像 最後に相互作用描像について述べる. ここではハミルトニアンを  $H = H_0 + H_1$  と2つの部分に分けることになる. 場の量子論では例えば  $H_0$  として自由場を記述する項を,  $H_1$  として場の相互作用を記述する項を考えれば良い. このとき  $U_0(t) \equiv e^{-iH_0 t}$  を用いて相互作用描像の状態ケットと観測量はそれぞれ

$$\begin{aligned} |\alpha, t\rangle_{\text{I}} &\equiv U_0^\dagger(t) |\alpha, t\rangle, \\ A^{\text{I}}(t) &\equiv U_0^\dagger(t) A U_0(t) \end{aligned} \quad (26)$$

と定義される. Schrödinger 描像の状態ケット  $|\alpha, t\rangle$  は Schrödinger 方程式 (20) に従うことから, 相互作用描像の状態ケット  $|\alpha, t\rangle_{\text{I}}$  は時間発展方程式

$$\frac{d}{dt} |\alpha, t\rangle_{\text{I}} = H_1^{\text{I}}(t) |\alpha, t\rangle_{\text{I}}, \quad H_1^{\text{I}}(t) \equiv U_0^\dagger(t) H_1(t) U_0(t) \quad (27)$$

表 1 Schrödinger 描像, Heisenberg 描像, 相互作用描像の比較

	Schrödinger 描像	Heisenberg 描像	相互作用描像
状態ケット	$ \alpha, t\rangle$ Schrödinger 方程式 (20) に従う	$ \alpha\rangle_{\text{H}} = U^\dagger(t)  \alpha, t\rangle =  \alpha, 0\rangle$ 時間変化しない	$ \alpha\rangle_{\text{I}} = U_0^\dagger(t)  \alpha, t\rangle$ “Schrödinger 方程式” (27) に従う
観測量	$A$ 時間変化しない	$A^{\text{H}}(t) = U^\dagger(t) A U(t)$ Heisenberg 方程式 (23) に従う	$A^{\text{I}}(t) = U_0^\dagger(t) A U_0(t)$ “Heisenberg 方程式” (28) に従う
基底ケット	$ a'\rangle$ 時間変化しない	$ a', t\rangle_{\text{H}} = U^\dagger(t)  a'\rangle$	$ a', t\rangle_{\text{I}} = U_0^\dagger(t)  a'\rangle$

に従うことが示される\*4. これは相互作用 Hamilton 演算子  $H_{\text{I}}^{\text{I}}(t)$  の下での Schrödinger 方程式のような形をしており, 相互作用描像では場の相互作用が状態  $|\alpha, t\rangle_{\text{I}}$  の時間変化を引き起こすことができる. 一方, Heisenberg 方程式 (23) の導出と同様にして, 相互作用描像の観測量 (26) は時間発展方程式

$$\frac{dA^{\text{I}}}{dt} = \frac{1}{i}[A^{\text{I}}, H_0] \quad (28)$$

に従うことが示される. これは  $H_0$  をハミルトニアンとする Heisenberg 方程式のような形をしている.

後の都合のため, Heisenberg 描像の観測量 (22) と相互作用描像の観測量 (26) が

$$A^{\text{I}}(t) = U^\dagger(t) A^{\text{H}}(t) U(t), \quad U(t) \equiv U^\dagger(t) U_0(t) = e^{iHt} e^{-iH_0 t} \quad (29)$$

と関係付けられることにここで言及しておくのが適当だろう (pp.24–25).

なお Heisenberg 描像の基底ケット  $|a', t\rangle_{\text{H}}$  が式 (25) で与えられるのと同じ理由で, 相互作用描像の基底ケットは

$$|a', t\rangle_{\text{I}} = U_0^\dagger(t) |a'\rangle$$

となると考えられる. 以上の結果は表 1 のようにまとめられる.

## 1.5 について

■時間的発展の演算子の表式 (21) Hamilton 演算子  $H$  が時間に陽に依らない場合の時間的発展の演算子は式 (21):

$$U(t) = e^{-iHt} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-iHt)^n$$

と書ける. 確かにこれは

$$i \frac{d}{dt} U = i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} (-iHt)^{n-1} (-iH) = i(-iH) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-iHt)^n = HU$$

より Schrödinger 方程式 (19) を満たし, また  $U(0) = 1$  を満足する.

\*4  $H_{\text{I}}, H_{\text{I}}^{\text{I}}$  の引数  $t$  は場を通した時間依存性を表し, これらが時間に陽に依存することを表すものではない.

■Heisenberg 方程式 (23) Heisenberg 方程式 (23) は次のように導かれる.

$$\begin{aligned}
\frac{dA^H}{dt} &= \frac{dU^\dagger}{dt}AU + U^\dagger A \frac{dU}{dt} \quad (\because \text{式 (22)} : A^H(t) = U^\dagger(t)AU(t)) \\
&= \left(-\frac{1}{i}U^\dagger H\right)AU + U^\dagger A \left(\frac{1}{i}HU\right) \quad \left(\because \text{式 (19)} : i\frac{dU}{dt} = HU, \quad -i\frac{dU^\dagger}{dt} = U^\dagger H\right) \\
&= -\frac{1}{i}(U^\dagger HU)(U^\dagger AU) + \frac{1}{i}(U^\dagger AU)(U^\dagger HU) \quad (\because UU^\dagger = 1) \\
&= \frac{1}{i}[A^H, H^H]. \quad (\because \text{式 (22)} : A^H(t) = U^\dagger(t)AU(t))
\end{aligned}$$

ここで最右辺において  $H^H \equiv U^\dagger HU$  は Heisenberg 描像の Hamilton 演算子であり,  $H$  と  $U(t) = e^{-iHt}$ :(21) は交換するから, これは Schrödinger 描像の Hamilton 演算子  $H$  に等しい:

$$H^H \equiv U^\dagger HU = U^\dagger UH = H. \quad (\because U^\dagger U = 1)$$

よって上式は Heisenberg 方程式 (23):

$$\frac{dA^H}{dt} = \frac{1}{i}[A^H, H]$$

に他ならない [1, pp.111-112].

■Heisenberg 描像の観測量  $A^H(t)$  に対する固有方程式 (24) Heisenberg 描像の観測量  $A^H(t)$  に対する固有方程式 (24) は, Schrödinger 描像の観測量  $A$  に対する固有方程式

$$A|a'\rangle = a'|a'\rangle$$

に両辺左から  $U^\dagger(t)$  をかけ,  $UU^\dagger = 1$  に注意すると

$$\begin{aligned}
\{U^\dagger(t)AU(t)\}\{U^\dagger(t)|a'\rangle\} &= a'\{U^\dagger(t)|a'\rangle\}, \quad \therefore A^H(t)|a', t\rangle_H = a'|a', t\rangle_H : (24), \\
A^H(t) &\equiv U^\dagger(t)AU(t) : (22), \quad |a', t\rangle_H \equiv U^\dagger(t)|a'\rangle : (25)
\end{aligned}$$

と得られる [1, pp.116-117].

■相互作用描像の状態ケットに対する時間発展方程式 (27) 相互作用描像の状態ケット  $|\alpha, t\rangle_I$  に対する時間発展方程式 (27) は次のように確かめられる.

$$\begin{aligned}
i\frac{d}{dt}|\alpha, t\rangle_I &= i\frac{d}{dt}(e^{iH_0t}|\alpha, t\rangle) \\
&= -H_0e^{iH_0t}|\alpha, t\rangle + e^{iH_0t}i\frac{d}{dt}|\alpha, t\rangle \\
&= e^{iH_0t}(-H_0)|\alpha, t\rangle + e^{iH_0t}H|\alpha, t\rangle \quad (\because \text{Schrödinger 方程式 (20)}) \\
&= e^{iH_0t}H_I|\alpha, t\rangle \\
&= (e^{iH_0t}H_Ie^{-iH_0t})(e^{iH_0t}|\alpha, t\rangle) \\
&= H_I^I|\alpha, t\rangle_I.
\end{aligned}$$

■ Heisenberg 描像と相互作用描像の観測量の関係 (29) Heisenberg 描像と相互作用描像の観測量の関係 (29) は次のように確かめられる.

$$\begin{aligned} A^I(t) &= U_0^\dagger(t) A U_0(t) \quad (\because \text{式 (26)}) \\ &= U_0^\dagger(t) U(t) A^H(t) U^\dagger(t) U_0(t) \quad (\because \text{式 (22)}) \\ &= \mathcal{U}^\dagger(t) A^H(t) \mathcal{U}(t) : (29), \\ \mathcal{U}(t) &\equiv U^\dagger(t) U_0(t) = e^{iHt} e^{-iH_0 t}. \end{aligned}$$

## 練習問題 (第 1 章)

### 1.1 コヒーレント状態

1.2.3 節の末尾で言及されているコヒーレント状態に関する問題 1.1 を解く. あるモード  $(\mathbf{k}, r)$  だけを  $n$  個の光子が占有している状態を  $|n\rangle$  として, コヒーレント状態は

$$|c\rangle = e^{-|c|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{n!} |n\rangle$$

で定義される ( $c = |c|e^{i\delta}$  は任意の複素数). これは古典電磁場とよく似た性質を持つ量子力学的な状態となっていることを見ていこう.

参考  $a \equiv a_r(\mathbf{k})$  と略記すると, コヒーレント状態は

$$|c\rangle = e^{-|c|^2/2} e^{ca^\dagger} |0\rangle$$

と書くこともできる [1, p.199]. 実際,  $(a^\dagger)^n |0\rangle = \sqrt{n!} |n\rangle$  より

$$e^{-|c|^2/2} e^{ca^\dagger} |0\rangle = e^{-|c|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ca^\dagger)^n}{n!} |0\rangle = e^{-|c|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{n!} |n\rangle = |c\rangle.$$

(i)  $|c\rangle$  は規格化されている

$$\langle c|c\rangle = e^{-|c|^2} \sum_{m,n} \frac{(c^*)^m c^n}{\sqrt{m!n!}} \langle m|n\rangle = e^{-|c|^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|c|^{2m}}{m!} = 1$$

より  $|c\rangle$  は規格化条件を満たしている.

(ii)  $|c\rangle$  は消滅演算子  $a_r(\mathbf{k})$  の固有値  $c$  に属する固有状態である  $a|n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle$  より, 固有方程式

$$\begin{aligned} a|c\rangle &= e^{-|c|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{n!} (a|n\rangle) \\ &= ce^{-|c|^2/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^{n-1}}{(n-1)!} |n-1\rangle \\ &= c|c\rangle \end{aligned}$$

が得られる.

参考 消滅演算子  $a$  は非 Hermitic なので, 固有値  $c$  は一般に複素数である.

(iii) 光子の平均数  $\bar{N} = \langle c|N|c \rangle = |c|^2$

$$|c \rangle = e^{-|c|^2/2} e^{ca^\dagger} |0 \rangle = e^{-|c|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{n!} (a^\dagger)^n |0 \rangle \equiv \sum_{n=0}^{\infty} f(n) |n \rangle$$

と書くと,  $(a^\dagger)^n |0 \rangle = \sqrt{n!} |n \rangle$  より

$$f(n) = e^{-|c|^2/2} \frac{c^n}{\sqrt{n!}}$$

と同定される. 固有値  $n$  の出現確率は展開係数の絶対値の自乗

$$|f(n)|^2 = e^{-|c|^2} \frac{|c|^{2n}}{n!}$$

で与えられる. これは  $n$  に関する Poisson 分布となっており [1, p.199], 期待値は  $\bar{N} = |c|^2$  で与えられることが知られている. 以下, その証明にあたる計算を行う. まず

$$\bar{N} = \langle c|N|c \rangle = \sum_{m,n} f^*(m) f(n) \langle m|N|n \rangle = \sum_{m,n} f^*(m) f(n) (n\delta_{mn}) = \sum_{n=0}^{\infty} n |f(n)|^2$$

であり, これは一般論としてよく理解されているように [1, p.32], 確率  $|f(n)|^2$  を用いて平均値を計算できることを表している.  $f(n)$  の具体的表式を用いると, これは

$$\bar{N} = e^{-|c|^2} |c|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|c|^{2(n-1)}}{(n-1)!} = |c|^2$$

と計算される.

(iv) 光子のゆらぎの自乗平均  $(\Delta\bar{N})^2 = |c|^2$  やや技巧的であるが,  $\langle c|N^2|c \rangle$  は次のように計算できる.

$$\begin{aligned} \langle c|N^2|c \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 |f(n)|^2 = e^{-|c|^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \frac{|c|^{2n}}{n!} = e^{-|c|^2} \sum_{n=1}^{\infty} \{n(n-1) + n\} \frac{|c|^{2n}}{n!} \\ &= e^{-|c|^2} \left\{ |c|^4 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|c|^{2(n-2)}}{(n-2)!} + |c|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|c|^{2(n-1)}}{(n-1)!} \right\} = |c|^4 + |c|^2. \end{aligned}$$

よって Poisson 分布の分散の公式

$$(\Delta\bar{N})^2 = \langle c|N^2|c \rangle - \bar{N}^2 = |c|^2$$

を得る.

(v) 電場の期待値 ポテンシャル (1.38) に対して電場  $\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$  (ただしここでの  $c$  は光速) は

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{q}, s} i \left( \frac{\hbar\omega_{\mathbf{q}}}{2V} \right)^{1/2} \left\{ \boldsymbol{\varepsilon}_s(\mathbf{q}) a_s(\mathbf{q}) e^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{x} - \omega_{\mathbf{q}}t)} - \boldsymbol{\varepsilon}_s(\mathbf{q}) a_s^\dagger(\mathbf{q}) e^{-i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{x} - \omega_{\mathbf{q}}t)} \right\}$$

と計算される. ここで固有方程式  $a_r(\mathbf{k})|c \rangle = c|c \rangle$  と規格化条件  $\langle c|c \rangle = 1$  より

$$\langle c|a_s(\mathbf{q})|c \rangle = c\delta_{\mathbf{kq}}\delta_{rs}, \quad \langle c|a_s^\dagger(\mathbf{q})|c \rangle = c^*\delta_{\mathbf{kq}}\delta_{rs}$$

なので,

$$\begin{aligned} \langle c|\mathbf{E}|c \rangle &= i \left( \frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2V} \right)^{1/2} \left\{ \boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k}) c e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}}t)} - \boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k}) c^* e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}}t)} \right\} \\ &= -\boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k}) 2 \left( \frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2V} \right)^{1/2} |c| \sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}}t + \delta) \end{aligned}$$

を得る.

参考 コヒーレント状態に関しては，電場の期待値は古典場と同様に振動している。

(vi) 電場のゆらぎの自乗平均  $(\Delta E)^2$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^2(\mathbf{x}, t) = - \sum_{\mathbf{q}, \mathbf{q}', s, s'} \frac{\hbar(\omega_{\mathbf{q}}\omega_{\mathbf{q}'})^{1/2}}{2V} \boldsymbol{\varepsilon}_s(\mathbf{q}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{s'}(\mathbf{q}') [a_s(\mathbf{q})a_{s'}(\mathbf{q}')e^{i\{(\mathbf{q}+\mathbf{q}')\cdot\mathbf{x}-(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{q}'}t)\}} \\ - a_s(\mathbf{q})a_{s'}^\dagger(\mathbf{q}')e^{i\{(\mathbf{q}-\mathbf{q}')\cdot\mathbf{x}-(\omega_{\mathbf{q}}-\omega_{\mathbf{q}'}t)\}} \\ - a_s^\dagger(\mathbf{q})a_{s'}(\mathbf{q}')e^{-i\{(\mathbf{q}-\mathbf{q}')\cdot\mathbf{x}-(\omega_{\mathbf{q}}-\omega_{\mathbf{q}'}t)\}} \\ + a_s^\dagger(\mathbf{q})a_{s'}^\dagger(\mathbf{q}')e^{-i\{(\mathbf{q}+\mathbf{q}')\cdot\mathbf{x}-(\omega_{\mathbf{q}}+\omega_{\mathbf{q}'}t)\}}] \end{aligned}$$

の  $[\dots]$  内第2項において  $a_s(\mathbf{q})a_{s'}^\dagger(\mathbf{q}') = a_{s'}^\dagger(\mathbf{q}')a_s(\mathbf{q}) + \delta_{\mathbf{q}\mathbf{q}'}\delta_{ss'}$  と書き換えておき，

$$\begin{aligned} \langle c|a_s(\mathbf{q})a_{s'}(\mathbf{q}')|c\rangle &= c^2\delta_{\mathbf{k}\mathbf{q}}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{q}'}\delta_{rs}\delta_{rs'}, \\ \langle c|a_{s'}^\dagger(\mathbf{q}')a_s(\mathbf{q})|c\rangle &= |c|^2\delta_{\mathbf{k}\mathbf{q}}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{q}'}\delta_{rs}\delta_{rs'}, \\ \langle c|a_s^\dagger(\mathbf{q})a_{s'}^\dagger(\mathbf{q}')|c\rangle &= (c^*)^2\delta_{\mathbf{k}\mathbf{q}}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{q}'}\delta_{rs}\delta_{rs'} \end{aligned}$$

および  $\boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k})^2 = 1$  を用いると，

$$\begin{aligned} \langle c|\mathbf{E}^2|c\rangle &= -\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2V} \{c^2e^{2i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega_{\mathbf{k}}t)} - 2|c|^2 - 1 + (c^*)^2e^{-2i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega_{\mathbf{k}}t)}\} \\ &= \frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2V} \{-2|c|^2\cos 2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega_{\mathbf{k}}t) + 2|c|^2 + 1\} \end{aligned}$$

を得る．ここで位相の因子を  $\varphi \equiv \mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}}t$  と略記すると，電場のゆらぎの自乗平均 (分散) は

$$\begin{aligned} (\Delta E)^2 &\equiv \langle c|\mathbf{E}^2|c\rangle - \langle c|\mathbf{E}|c\rangle^2 \\ &= \frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2V} (-2|c|^2\cos 2\varphi + 2|c|^2 + 1 - 4|c|^2\sin^2\varphi) \\ &= \frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2V} \end{aligned}$$

と計算される．

以上の結果の含意 コヒーレント状態において，場を構成する光子数と電場の相対的揺らぎは

$$\frac{\Delta N}{\bar{N}} = \bar{N}^{-1/2}, \quad \frac{\Delta E}{|\langle c|\mathbf{E}|c\rangle|} \sim \bar{N}^{-1/2}$$

であり，これらは  $\bar{N} \rightarrow \infty$  とすると (つまり光子数が多く電場の強いときを想定すると) ゼロになる．

## 1.2 電磁場中の荷電粒子の古典論

■ラグランジアンとハミルトニアン 古典物理学において，(重力場がないときの)1粒子の系のラグランジアンは

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2} + \frac{q}{c}\mathbf{A}\cdot\mathbf{v} - q\phi$$

で与えられる．(ただしここではラグランジアンにおける興味のない自由電磁場の項  $-\frac{1}{4}\int F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}d^3x$  を省いた．教科書の式は非相対論的極限  $v \ll c$  をとれば得られる．) これは正準運動量

$$\mathbf{P} \equiv \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{p} + \frac{q}{c}\mathbf{A}$$

を与える．ここに  $\mathbf{p} \equiv \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$  は粒子の力学的運動量である．これを粒子の速さについて逆に解くと  $(\frac{v}{c})^2 = \frac{\mathbf{p}^2}{m^2c^2 + \mathbf{p}^2}$  となるので，ハミルトニアンは

$$H = \mathbf{P} \cdot \mathbf{v} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} + q\phi = \sqrt{m^2c^4 + \mathbf{p}^2c^2} + q\phi = E + q\phi$$

と表される．ここに  $E \equiv \sqrt{m^2c^4 + \mathbf{p}^2c^2}$  は粒子のエネルギーである [4, pp.51-52].

以上より電磁場と相互作用する粒子の力学的運動量  $\mathbf{p}$  とエネルギー  $E$  は，電磁場がない場合と比べて

$$\mathbf{p} = \mathbf{P} \quad \rightarrow \quad \mathbf{p} = \mathbf{P} - \frac{q}{c}\mathbf{A}, \quad (30)$$

$$E = H \quad \rightarrow \quad E = H - q\phi \quad (31)$$

と変化する．

■運動方程式 上記のラグランジアンに Lagrange 方程式  $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}$  を適用して，荷電粒子の運動方程式を導こう [4, pp.53-54]. 場の値  $\mathbf{A}(\mathbf{r}(t), t)$  は粒子の位置  $\mathbf{r}(t)$  で評価されているので，

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} + \frac{q}{c}\left\{\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A}\right\}$$

と書ける ( $\nabla = \partial/\partial \mathbf{r}$ ). 一方，Lagrange 方程式の右辺の微分  $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}$  は  $\mathbf{v}$  を固定して行われることに注意して，ラグランジアンの中で粒子の位置  $\mathbf{r}$  に依る項のみの微分を書くと，

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \frac{q}{c}\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - q\nabla\phi$$

となる．これらを等置すると

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{q}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - q\nabla\phi + \frac{q}{c}\{\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A}\}$$

を得る．ここで右辺の  $\{\dots\}$  部分は

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A} = \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A})$$

と書き換えられるので\*5，運動方程式

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= q\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\phi\right) + q\frac{\mathbf{v}}{c} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \\ &= q\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right) \end{aligned}$$

を得る．この運動方程式は等価的に最小作用原理に立ち戻って，作用の変分を計算しても導くことができる [4, pp.67-69].

\*5  $\nabla$  の公式  $\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a}) + \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b})$ ，あるいはその証明に当たる計算

$$\begin{aligned} [\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A}]_i &= v_j(\partial_i A_j - \partial_j A_i) = (\delta_{ir}\delta_{js} - \delta_{is}\delta_{jr})v_j\partial_r A_s = \varepsilon_{ijk}v_j\varepsilon_{krs}\partial_r A_s \\ &= [\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A})]_i = [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]_i \end{aligned}$$

による．

次にハミルトニアンに対する正準方程式を書き下すと,

$$\mathbf{v} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{P}} = \frac{\mathbf{P} - \frac{q}{c} \mathbf{A}}{E} = \frac{\mathbf{p}}{E}$$

は粒子の力学的運動量  $\mathbf{p}$  に対する適正な関係式となっている。これを踏まえ、もう 1 組の正準方程式

$$\frac{dP_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$$

を調べよう。両辺はそれぞれ

$$\begin{aligned} \frac{dP_i}{dt} &= \frac{dp_i}{dt} + \frac{q}{c} \partial_t A_i + \frac{q}{c} v_j \partial_j A_i, \\ -\frac{\partial H}{\partial x_i} &= -\frac{P_j - \frac{q}{c} A_j}{E} \left( -\frac{q}{c} \partial_i A_j \right) - q \partial_i \phi = \frac{q}{c} v_j \partial_i A_j - q \partial_i \phi \end{aligned}$$

と計算されるので、再び  $\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$  を用いて運動方程式

$$\frac{dp_i}{dt} = q \left( -\partial_i \phi - \frac{1}{c} \partial_t A_i \right) + \frac{q}{c} (v_j \partial_i A_j - v_j \partial_j A_i) = q \left[ E_i + \left( \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right)_i \right]$$

を得る。

## 第 2 章 ラグランジアン形式の場の理論

やや長くなるが、概要として序文を引用する (脚注は除く).

前章では、古典的な電磁場から Fourier 解析によって基準モードを抽出し、その変数に調和振動子の交換関係を設定することによって、電磁場の量子化を行った。ここでは空間における各点の場を力学変数と捉えて、それらを直接に量子化してみる。このアプローチは、粒子の古典力学とその量子化を、連続系すなわち場の量子論へと一般化する作業にあたる。最初に我々はラグランジアンを (正しくは、後から見るようにラグランジアン密度であるが) [を] 導入し、そこから Hamilton の原理によって場の方程式を導く。それから場の変数に対する正準共役運動量を導入し、これらに対して直接、正準共役交換関係を設定する。この定式化によって、ラグランジアンから導くことのできる如何なる古典場についても、それらを系統的に量子化する手続きが与えられる。このアプローチは前章のそれと等価なので、この方法で得られるのはボゾン系に限られ、フェルミオンを扱う場合には異なる定式化が必要とされる。

第 1 章とのもうひとつの違いは、相対論的な共変性が明白な形で理論を展開する点にある。2.1 節では相対論的な記法を定義する。2.2 節において古典的なラグランジアンによる場の理論を展開し、それを 2.3 節で量子化する。ラグランジアン形式の場の理論の重要な特徴は、系の持つ対称性や、その結果として現れる保存則の情報が、ラグランジアン密度にすべて含まれることである。このような性質のいくつかを 2.4 節において考察する。

### 2.1 相対論的な表記法

ここでは教科書で用いる表記法を簡単に特筆するに留める。

- 断りのない限り,
  - 時空の 4 成分  $0, 1, 2, 3$  をとる添字にギリシア文字  $\alpha, \beta, \dots, \lambda, \mu, \nu, \dots$  を用い、
  - 空間成分  $1, 2, 3$  のみをとる添字にラテン文字  $i, j, k, \dots$  を用いることにする。
- 慣性系での計量テンソル (Minkowski 計量) の全成分を

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

とする流儀を採用する。

- 任意の 4 元反変ベクトルを  $a^\mu = (a^0, \mathbf{a})$  のように書く ( $a^\mu$  を単に  $a$  と書く)。  
ここに  $a^0$  はベクトル  $a^\mu$  の時間成分、 $\mathbf{a}$  はベクトル  $a^\mu$  の空間成分である。
- 4 元反変ベクトル  $A^\mu = (A^0, \mathbf{A}), B^\mu = (B^0, \mathbf{B})$  の 4 元内積 (スカラー積) を

$$A \cdot B \equiv g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = A^\mu B_\mu = A_\nu B^\nu = A^0 B^0 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$$

と書く (教科書では「 $\cdot$ 」を省略している)。

- 偏微分、d'Alembert 演算子を次のように書く。

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu \phi \equiv \phi_{,\mu} \quad \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu} \equiv \partial^\mu \phi \equiv \phi^{,\mu} \quad \square \equiv \partial^\mu \partial_\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$$

## 2.1 について

本稿の付録 A では上記の要約で省略した事柄について、テンソルの変換則に関する一般論と併せて少し詳しくまとめておく。

## 2.2 古典的なラグランジアン場の理論

一般に古典的な理論は最小作用原理 (または Hamilton の原理) を用いて定式化できる。場の古典論を念頭に述べると、最小作用原理は時刻  $t = t_1, t_2$  での空間における場の分布が与えられたとき、 $t_1$  から  $t_2$  までの実際の場の時間変化に対して作用  $S$  が極小となることを要求する。系を記述するラグランジアンを体積積分  $L = \int \mathcal{L} dV$  の形に書こう。これは格子点  $\mathbf{x}$  を中心とする体積要素  $\Delta V$  に空間を分割すると、言わば体積要素  $\Delta V$  の持つラグランジアンが  $\mathcal{L}\Delta V$  であると見なしていることになる。 $\mathcal{L}$  はラグランジアン密度と呼ばれる。作用はラグランジアン密度を用いて

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \frac{1}{c} \int \mathcal{L} d^4x \quad (32)$$

で定義される ( $x^0 = ct$ ,  $d^4x = cdVdt$ )。ここではラグランジアン密度が複数の場  $\phi \equiv \{\phi_1, \phi_2, \dots\}$  とその導関数の組  $\partial_\mu \phi \equiv \{\partial_\mu \phi_1, \partial_\mu \phi_2, \dots\}$  の関数  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$  であるような任意の系を考える。このとき最小作用原理から場の運動方程式として、Euler-Lagrange 方程式

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_r)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} = 0 \quad (33)$$

が導かれる (導出は下記) [4, p.87].

複素数場に関する注意 「 $\phi(x)$  が複素数場の場合、たとえば  $\phi(x)$  と  $\phi^*(x)$  を 2 つの互いに独立な場として扱うか、あるいは  $\phi(x)$  を 2 つの実数場に分解して、それらを独立な場として扱う必要がある。」 (p.32, 1.11–13)

再び空間を体積  $\Delta V$  の胞 (セル) に分割し、各胞の格子点における場の値  $\phi_r$  を力学変数と見ると、1 つの胞に含まれる場の運動量は  $\partial(\mathcal{L}\Delta V)/\partial \dot{\phi}_r$  と表される。このため  $\phi_r$  に共役な場

$$\pi_r \equiv \partial \mathcal{L} / \partial \dot{\phi}_r$$

を定義すると、これは場の運動量密度と解釈できる。この下で

$$\mathcal{H} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_r} \dot{\phi}_r - \mathcal{L}$$

はエネルギー密度 (ハミルトニアン密度) となっていることが分かる。すなわち 1 つの胞に含まれるエネルギーは  $\mathcal{H}\Delta V$  で与えられ、ハミルトニアンは  $H = \int \mathcal{H} dV$  である。

### 2.2 節, 式の導出など

最小作用原理から Euler-Lagrange 方程式 (33) が導かれることを示す。空間の各位置での場の値  $\phi_r(\mathbf{x}, t)$  の変分に対して作用 (32):  $S = \int \mathcal{L} d^4x$  が停留値をとる条件は

$$0 = \delta S = \int \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} \delta \phi_r + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_r)} \delta(\partial_\mu \phi_r) \right\} d^4x = \int \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_r)} \right\} \delta \phi_r d^4x$$

と書ける (ただし  $\mu, r$  について和をとる). ただし最後の等号では  $\delta(\partial_\mu\phi_r) = \partial_\mu(\delta\phi_r)$  に注意して被積分関数の第 2 項を部分積分した. その際, 作用の積分が行われる時空領域の境界は場の値が指定された “平面”  $t = t_1, t_2$  と場の値がゼロになる空間の無限遠の “側面” から成り, ここでは変分  $\delta\phi_r$  がゼロになることを用いた. 上式最右辺において場の種類ごとに変分  $\{\delta\phi_r\}$  を独立にとれることから Euler-Lagrange 方程式 (33):

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\phi_r} = 0$$

を得る [4, p.87].

## 2.2 について

■作用の式 (32) について 特殊相対性理論の範囲では体積要素  $d^4x$  は不変量だから (本稿の付録 A.3), ラグランジアン密度が Lorentz スカラーであれば作用全体が Lorentz スカラーとなる. 作用がスカラーであれば, 作用の変分は座標系に依らない量なので, 作用が極値 (停留値) をとる条件に他ならない運動方程式も座標系の変更によって形を変えない.

作用の式 (32) を教科書では  $S = \int d^4x \mathcal{L}$ : (2.11) と書いているけれど, 正しくは係数  $1/c$  が必要と考えられる [4, p.87]. 実際, 6.1 節の表 6.1 (教科書 p.103) を見ると, 作用の次元は  $ML^2T^{-1}$  であるのに対し, ラグランジアン密度の次元は  $ML^{-1}T^{-2}$  となっている.

■最小作用原理と目的論的世界観 最小作用原理は粒子や場を擬人化し, 作用を最小にするという目的を持って振る舞う存在として捉えているような印象を与え得る. しかし例えば粒子は, 終点に辿り着くという最小作用原理で課される境界条件を実現するような初期条件を自分が満たしているかを知らないから, このような解釈は不適當である. 実際, 最小作用原理から導かれる運動方程式は, 粒子や場が目的因ではなく古典的・機械論的因果律に従って時間変化することを意味している.

## 2.3 量子化されたラグランジアン場の理論

空間を体積  $\Delta V$  の胞 (セル) に分割し, 各格子点 (胞の中心点) における場の値  $\phi_r$  を力学変数と見なす. このとき胞に含まれる共役な運動量は  $\pi_r \Delta V$  だから (2.2 節), Heisenberg 描像の場の演算子に対して通常の正準交換関係は

$$[\phi_r(j, t), \pi_s(j', t) \Delta V] = i\hbar \delta_{rs} \delta_{jj'}, \quad [\phi_r(j, t), \phi_s(j', t)] = 0, \quad [\pi_r(j, t), \pi_s(j', t)] = 0$$

と書ける. ただし  $j, j'$  は格子点を指定する番号である. 体積  $\Delta V \rightarrow 0$  の極限をとると, 場の交換関係を

$$[\phi_r(\mathbf{x}, t), \pi_s(\mathbf{x}', t)] = i\hbar \delta_{rs} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad [\phi_r(\mathbf{x}, t), \phi_s(\mathbf{x}', t)] = 0, \quad [\pi_r(\mathbf{x}, t), \pi_s(\mathbf{x}', t)] = 0$$

と設定すれば良いことが分かる ( $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$  は胞  $j, j'$  の中の格子点). これは同時刻交換関係である.

## 2.3 について

■「…… $\delta_{jj'}/\delta x_j$  が 3 次元の Dirac デルタ関数  $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$  になるからである……」 (p.35, l.9,10) について 簡単のために体積  $\Delta V$  は各胞に共通とすると,  $\Delta V \rightarrow 0$  のとき

$$\frac{\delta_{jj'}}{\Delta V} \rightarrow \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

である。実際このとき各格子点  $j$  で定義された量  $f_j$  が場の量  $f(\mathbf{x})$  に移行するものとする、恒等式

$$f_j = \sum_{j'} f_{j'} \delta_{jj'}$$

はデルタ関数を定義付ける正しい式

$$f(\mathbf{x}) = \int f(\mathbf{x}') \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d^3 x'$$

に移行する。

## 2.4 対称性と保存則

一般に系が何らかの操作に関して対称性を持つとき、それに付随する系の保存量が見出される。本節では対称性と保存則の関係について論じる。はじめに要点を簡単にまとめる。

- 場の古典論における対称性と保存則

$$\begin{aligned} \text{系の対称性} &\Leftrightarrow \mathcal{L} \text{の対称性} \\ &\Leftrightarrow \text{保存する流れ } f^\alpha \text{ が存在 } (\partial_\alpha f^\alpha = 0) \\ &\Leftrightarrow F^0 = \int dV f^0 \text{ が保存.} \end{aligned}$$

- 量子力学における対称性と保存則

ユニタリ演算子  $U = e^{i\alpha T}$  ( $\alpha$ : 実数の連続パラメーター,  $T$ : Hermite 演算子) による, [ $\alpha = 0$  で恒等変換とつながった] 連続的な変換

$$|\Psi\rangle \rightarrow U|\Psi\rangle, \quad O \rightarrow UOU^\dagger$$

に対して,

$$\begin{aligned} \text{系の対称性} &\Leftrightarrow H \text{の対称性} \\ &\Leftrightarrow [T, H] = 0 \\ &\Leftrightarrow T \text{は運動の定数.} \quad (\because \text{Heisenberg方程式}) \end{aligned} \quad (34)$$

以下、これらについて詳しく見ていく。[量子論については下記「2.4 節、式の導出など」にて補足する。]

### 古典論

まず対称性と保存則の関係について古典論の水準で、関連事項を補いつつまとめる (関連事項については証明を与えず、参考文献を示すに留める)。粒子系に関する議論は本稿の付録 B に回す。

対称性と保存則の説明に入る前に、保存するチャージとカレントの概念を導入しておく。ある 4 元ベクトル  $f^\alpha$  が連続の式

$$\partial_\alpha f^\alpha = 0, \quad \text{または} \quad \frac{\partial f^0}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{f} = 0$$

(ただし  $\mathbf{f} = (f^1, f^2, f^3)$ ) を満たすとき、 $f^\alpha$  は保存するチャージの時空における流れの密度、 $f^0/c$  をチャージの密度、 $\mathbf{f}$  を空間におけるチャージの流れの密度と解釈できる。実際、このとき連続の式は、単位時間に単位体積から流出したチャージの量  $\nabla \cdot \mathbf{f}$  だけ、その中のチャージの減少  $\left(-\frac{\partial f^0}{\partial t}\right)$  がもたらされることを表し

ている。これは、それ以外にチャージの生成・消滅などの理由で単位体積中のチャージの増減が起こることはないという、チャージの局所的な保存則に他ならない。次に連続の式を空間全体にわたって積分すると

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int d^3x f^0 = - \int d^3x \nabla \cdot \mathbf{f} = 0$$

となるため\*6, チャージ

$$F^0 \equiv \frac{d}{dt} \int d^3x f^0$$

は(大域的)保存量となる\*7。なお  $f^\alpha$  は簡単に、保存する流れ(カレント)と呼ばれる(もっとも正確には保存するのはカレント  $f^\alpha$  ではなくチャージ  $F^0$  である)。

参考 連続の式  $\partial_\alpha f^\alpha = 0$  を空間積分する代わりに、2つの時刻  $t = t_1, t_2$  の超平面によって挟まれた時空領域にわたって積分するならば、これを3次元的な“表面”の積分に変換するのに4次元 Gauss の定理が必要となる。直観的に言って、連続の式  $\partial_\alpha f^\alpha = 0$  は時空において  $f^\alpha$  のわき出しがないことを意味することから期待されるように、超平面  $t = t_1$  から流入するチャージと超平面  $t = t_2$  から流出するチャージは等しくなければならないことが導かれる。これが保存則の主張となる。上記の導出は時間差  $t_2 - t_1$  を単位時間に選んだ場合に相当する。

さて、特殊相対性理論を想定して作用を  $S = \int \mathcal{L} d^4x$  と書く ( $\mathcal{L}$  はラグランジアン密度, 2.2 節)。場の理論においても理論の不変性は運動方程式の不変性のことであって、必ずしもラグランジアン密度そのものは不変でなくても良い。実際、ラグランジアン密度には任意の場  $\Lambda^\mu$  の4元発散  $\partial_\mu \Lambda^\mu$  を加えるだけの不定性がある(証明は練習問題 2.1)。とは言い、いくつかの重要な保存量はラグランジアン密度の不変性から導かれる。そこでラグランジアン密度を不変に保つような場  $\{\phi_r\}$  の変更

$$\phi_r(x) \rightarrow \phi'_r(x) = \phi_r(x) + \delta\phi_r(x)$$

を考えよう。このとき Euler-Lagrange 方程式 (33) を用いると

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_r} \delta\phi_r + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi_r)} \delta(\partial_\alpha\phi_r) = \left( \partial_\alpha \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi_r)} \right) \delta\phi_r + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi_r)} \partial_\alpha \delta\phi_r \\ &= \partial_\alpha \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi_r)} \delta\phi_r \right) \end{aligned} \quad (35)$$

であり、今の場合これがゼロとなるから、保存するカレント

$$f^\alpha = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{r,\alpha}} \delta\phi_r \quad (36)$$

が得られる。ただしこれ以降、繰り返された場の種類の添字  $r$  についても和をとるものと約束する。

変分を場の評価される時空点  $x$  の変更に伴う変化と見なせば、上式 (35) の意味は変わるものの計算自体は再利用でき、

$$\partial_\alpha \mathcal{L} = \partial_\beta \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta\phi_r)} \partial_\alpha\phi_r \right)$$

\*6 第2の等号では通常の (Gauss の) 発散定理によって体積積分を無限遠の表面積分に変換し、常套的に無限遠において、物理的な場  $\mathbf{f}$  が充分速くゼロに近づくものと仮定した。

\*7  $f^0(\mathbf{x}, t)$  の空間積分  $F^0$  は数学的には時間だけの関数となるため、上式において常微分の記号  $\frac{d}{dt}$  を用いている。  $F^0$  が実際には時間にも依らないということが物理的な主張である。

となる。左辺に  $\partial_\alpha \mathcal{L} = \delta_\alpha^\beta \partial_\beta \mathcal{L}$  を代入すると、保存則

$$\partial_\beta T_\alpha^\beta = 0, \quad T_\alpha^\beta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta \phi_r)} \partial_\alpha \phi_r - \delta_\alpha^\beta \mathcal{L} : \text{エネルギー・運動量テンソル} \quad (37)$$

が得られる。これは

$$P^\alpha = \frac{1}{c} \int T^{\alpha 0} d^3 x \quad (38)$$

が保存することを意味する。ここではラグランジアン密度の不変性をあからさまに用いておらず、保存則は Euler-Lagrange 方程式 (33) だけから導かれていることに注意されたい。ところで Euler-Lagrange 方程式 (33) の導出は系が閉じており、それ故ラグランジアン密度が  $x^\mu$  に陽に依存しないに基づいている。よってこれは時間と空間の並進対称性から導かれる保存量であり、 $P^\alpha$  は (定数係数の任意性を除けば) 系の運動量の 4 元ベクトルと見なされる。実際、

$$T^{00} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_r} \dot{\phi}_r - \mathcal{L}$$

をエネルギーの一般式 (268) と比較すると、これは確かにエネルギー密度 (ハミルトニアン密度) となっており、また 4 元運動量  $P^\alpha$  は既に適正に規格化されていることが分かる [4, pp.87-89]。

以上よりエネルギー・運動量テンソルの全成分の物理的な意味を解釈することができる [4, pp.90-91]。

$$T^{00} = W : \text{エネルギー密度}, \quad \frac{1}{c} T^{i0} : \text{運動量密度}$$

である。このとき

$$\begin{aligned} \partial_\alpha T^{0\alpha} = 0 &\quad \rightarrow \quad c T^{0i} = S^i : \text{エネルギー流束}, \\ \partial_\alpha T^{i\alpha} = 0 &\quad \rightarrow \quad T^{ij} = \sigma^{ij} : \text{応力テンソル} \quad (i : \text{力の向き}, j : \text{面}) \end{aligned}$$

となる\*8。よって

$$T^{0i} = c \times (\text{運動量密度})^i = \frac{1}{c} \times (\text{エネルギーの流れの密度})^i.$$

場の Lorentz 変換の形を具体的に指定して、系の Lorentz 対称性に付随する保存量を調べよう。無限小の Lorentz 変換は、反対称な無限小パラメーター  $\varepsilon^{\mu\nu} (= -\varepsilon^{\nu\mu})$  を用いて

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu, \quad \delta x^\mu = x_\nu \varepsilon^{\mu\nu} \quad (39)$$

と表される (証明は下記)。[パラメーター  $\varepsilon^{\mu\nu}$  の各成分の意味を付録 B で説明する.]

**能動の変換と受動の変換** ここで次のことに注意を促しておかねばならない。すなわち物体の空間座標が変化する状況としては以下の 2 通りが考えられる。

**能動の変換** 空間に固定した座標系に対して物体 (より一般には物理的な系) を移動させる。

- ★ 物理的な系として場を考えている場合には、それが分布する空間ごと (座標系に対して) 移動させる。

**受動の変換** 物理的な系を空間に固定して、座標系を移動させる。

能動の変換と受動の変換の間には次のような関係がある。すなわち座標系の基底にある変換をすると、座標系に固定した視点からは空間に固定したベクトルがその逆変換で移されて見える。

- 例 1 : 駅に向かう者にとっては、逆に駅が自分の方に近づいて来るように見える。
- 例 2 : 回転する椅子に座ると、周りの風景が逆回転して見える。

上記において運動量と角運動量の保存則を導く際には能動的な変換を考えたのに対し、ここで考えている Lorentz 変換は受動的な変換として良い。

\*8 保存則  $\partial_\alpha T^{i\alpha} = 0$  から分かるように、応力  $\sigma^{ij}$  は  $x^j$  軸に垂直な単位面積を介して、 $x^j$  座標の小さい側から大きい側へ及ぼす力の第  $i$  成分である。このとき例えば流体を想定すると、圧力は  $\sigma^{ij} = p\delta^{ij}$  であり、右辺に負号は現れない。

原点の時空内並進も含めた無限小の Lorentz 変換は

$$x_\alpha \rightarrow x'_\alpha = x_\alpha + \delta x_\alpha = x_\alpha + \varepsilon_{\alpha\beta} x^\beta + \delta_\alpha \quad (40)$$

と書ける ( $\varepsilon_{\alpha\beta}$  は反対称, 式 (39) を参照). これに伴う場の変換が, 次のように表されるものと仮定する [本稿の付録 C.1 を参照].

$$\phi_r(x) \rightarrow \phi'_r(x') = \phi_r(x) + \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta} S_{rs}^{\alpha\beta} \phi_s(x).$$

これは同一の時空点における場の値の変化が

$$\delta_T \phi_r(x) \equiv \phi'_r(x') - \phi_r(x) = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta} S_{rs}^{\alpha\beta} \phi_s(x) \quad (41)$$

で与えられることを意味しており, 引数における場を評価する時空点の座標も変換により  $x \rightarrow x'$  と変化している.  $S_{rs}^{\alpha\beta}$  の添字  $\alpha\beta$  に関する反対称性を仮定しても一般性を失わない ( $S_{rs}^{\alpha\beta}$  の対称部分は  $\varepsilon_{\alpha\beta} S_{rs}^{\alpha\beta}$  に寄与を持たないから). 理論の不変性として, 今度はラグランジアン密度の不変性

$$\mathcal{L}(\phi_r(x), \partial_\alpha \phi_r(x)) = \mathcal{L}(\phi'_r(x'), \partial_\alpha' \phi'_r(x'))$$

(ただし  $\partial_\alpha' \equiv \partial/\partial x'^\alpha$ ) を要求すると, 連続の式

$$\partial_\alpha f^\alpha = 0, \quad f^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi_r)} \delta_T \phi_r - \mathcal{T}^{\alpha\beta} \delta x_\beta \quad (42)$$

が導かれる (導出は下記). ただしここではエネルギー・運動量テンソルを

$$\mathcal{T}^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi_r)} \partial_\beta \phi_r - \mathcal{L} g^{\alpha\beta} \quad (43)$$

と再定義している.

まず並進操作 ( $\varepsilon_{\alpha\beta} = 0$ ) を考えると, 上式 (40), (41) において  $\delta x_\beta = \delta_\beta$ ,  $\delta_T \phi_r = 0$  となるので, カレントの式 (42) は  $f^\alpha = -\mathcal{T}^{\alpha\beta} \delta_\beta$  と簡略化される. 変位  $\delta_\beta$  の 4 成分は独立にとれるので, 連続の式はエネルギー・運動量保存則 (37):

$$\partial_\alpha \mathcal{T}^{\alpha\beta} = 0$$

を再現する.

次に時空内の回転操作 ( $\delta_\alpha = 0$ ) を考えると, カレントの式 (42) は

$$f^\alpha = \frac{1}{2} \varepsilon_{\beta\gamma} \mathcal{M}^{\alpha\beta\gamma}, \quad \mathcal{M}^{\alpha\beta\gamma} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi_r)} S_{rs}^{\beta\gamma} \phi_s + (x^\beta \mathcal{T}^{\alpha\gamma} - x^\gamma \mathcal{T}^{\alpha\beta}) (= -\mathcal{M}^{\alpha\gamma\beta}) \quad (44)$$

を与える (導出は下記). 回転操作  $\varepsilon_{\beta\gamma}$  は (反対称性を有する点を除けば) 互いに独立なので, 連続の式  $\partial_\alpha f^\alpha = 0$  は  $\partial_\alpha \mathcal{M}^{\alpha\beta\gamma} = 0$  に帰着する. ここから保存するチャージ

$$\begin{aligned} cM^{\alpha\beta} &= \int d^3x \mathcal{M}^{0\alpha\beta} \\ &= \int d^3x \{ (x^\alpha \mathcal{T}^{0\beta} - x^\beta \mathcal{T}^{0\alpha}) + c\pi_r S_{rs}^{\alpha\beta} \phi_s \} (= -cM^{\beta\alpha}) \end{aligned} \quad (45)$$

が得られる. これは回転対称性に付随する保存量なので, 角運動量と見なされる.  $T^{i0}/c = \mathcal{T}^{0i}/c$  は運動量密度であり,  $dP^i \equiv \frac{T^{0i}}{c} dV$  は 3 次元空間の体積  $dV$  が持つ運動量なので,  $M^{ik}$  の第 1 項

$$\int (x^i dP^k - x^k dP^i)$$

は場全体の持つ軌道角運動量となっていることが見て取れる。\$S\_{rs}^{\alpha\beta}\$ の項は固有スピン角運動量を表すものと解釈できる。ここでスピン角運動量とは量子力学において想定される粒子 (場) の内部自由度である。

角運動量がスピンを含まず、古典論の水準で軌道角運動量のみ保存則が得られるようにエネルギー・運動量テンソルを再定義することが可能である [4, pp.89-90]。実際

$$T^{\alpha\beta} \rightarrow T'^{\alpha\beta} = T^{\alpha\beta} + \partial_\gamma \psi^{\alpha\beta\gamma}, \quad \psi^{\alpha\beta\gamma} = -\psi^{\alpha\gamma\beta}$$

とすると、\$T'^{\alpha\beta}\$ もまた保存則 \$\partial\_\beta T'^{\alpha\beta} = 0\$ を満たす。ただし \$T^{\alpha\beta}\$ と \$T'^{\alpha\beta}\$ は同じ全 4 元運動量 \$P^\alpha\$ を与える。ところで 4 元運動量密度 \$T^{\alpha 0}/c\$ を用いて角運動量密度を表せる、すなわち 4 元角運動量が

$$M^{\alpha\beta} = \frac{1}{c} \int (x^\alpha T^{\beta 0} - x^\beta T^{\alpha 0}) dV$$

によって与えられることを要求すると、角運動量の保存則 \$\partial\_\gamma (x^\alpha T^{\beta\gamma} - x^\beta T^{\alpha\gamma}) = 0\$ は \$T^{\alpha\beta}\$ の対称性

$$T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}$$

を帰結する。前述の \$T^{\alpha\beta}\$ の任意性を利用して \$T^{\alpha\beta}\$ を対称に選ぶことができる。

最後に複素場 \$\phi\_r\$ のゲージ変換 (位相変換) に関する対称性から、電荷保存則が導かれることを説明する。ここでは量子論への移行を容易にするために、場 \$\phi\_r\$ の複素共役を \$\phi\_r^\dagger\$ と書くことにする。我々は \$\phi\_r\$ と \$\phi\_r^\dagger\$ を独立な場として扱わなければならない。ここで \$\varepsilon\$ を無限小の実パラメーターとして、大域的な位相変換 (第 1 種ゲージ変換)\*9

$$\phi_r \rightarrow \phi'_r = e^{i\varepsilon} \phi_r, \quad \phi_r^\dagger \rightarrow \phi'^\dagger_r = e^{-i\varepsilon} \phi_r^\dagger \quad (46)$$

を考える。このときラグランジアンの不変性からは、保存量

$$Q = \frac{-iq}{\hbar} \int d^3x [\pi_r(x) \phi_r(x) - \pi_r^\dagger(x) \phi_r^\dagger(x)] \quad (47)$$

が導かれる (\$\pi\_r \equiv \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\phi}\_r\$, etc., 導出は下記)。[その導き方より、全ての種類 \$r\$ の場に対して一齐に位相変換 (46) を施す場合には、対応する保存量 (47) の右辺では場の種類 \$r\$ に関する和が含意されているものと見なさなければならない。] ここに \$q\$ は定数であり、後で明らかになるように、(場の量子論において) この複素場 \$\phi\_r\$ で記述される粒子の電荷が \$\pm q\$ である。

## 量子論

量子論における対称性と保存則の関係については、既に冒頭にまとめた。これを踏まえ、以下では場の大域的な位相変換 (46): \$\phi'\_r = e^{i\varepsilon} \phi\_r\$, etc. から導かれる “電荷” \$Q\$ (式 (47)) の保存について、量子論の立場から考察しよう。

準備として場を演算子と見なし、必要となる交換関係を調べておく。2.3 節の正準交換関係 \$[\phi\_r(\mathbf{x}, t), \pi\_s(\mathbf{x}', t)] = i\hbar\delta\_{rs}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'),\$ etc. を用いると\*10

$$[Q, \phi_r(x)] = -q\phi_r(x), \quad [Q, \phi_r^\dagger(x)] = +q\phi_r^\dagger(x) \quad (48)$$

が導かれる (導出は下記)。

ここから \$\phi\_r\$ と \$\phi\_r^\dagger\$ はそれぞれ、電荷 \$q\$ を消滅・生成させることが示される。すなわち \$Q\$ の固有値 \$Q'\$ を持つ固有状態 \$|Q'\rangle\$ と書くと、

$$\phi_r |Q'\rangle \sim |Q' - q\rangle, \quad \phi_r^\dagger |Q'\rangle \sim |Q' + q\rangle. \quad (49)$$

\*9 位相パラメーター \$\varepsilon\$ が各時空位置 \$x\$ に共通であることが、「大域的」の意味である。

\*10 その際 \$\phi\_r\$ と \$\phi\_r^\dagger\$ は独立な場なので、\$\phi\_r\$ は \$\pi\_r\$ 以外のすべての場と可換であることに注意する。

[確認は本稿次節で行う.]

電荷の式 (47):

$$Q = \frac{-iq}{\hbar} \int d^3x [\pi_r(x)\phi_r(x) - \pi_r^\dagger(x)\phi_r^\dagger(x)]$$

を見ると、これがゼロでない値を持つためには場  $\phi_r$  は非 Hermite でなければならないことが分かる。また  $Q$  は Hermite 演算子となることが見て取れる。そこで位相変換 (46) に対応するユニタリー変換を

$$U = e^{i\alpha Q}, \quad \phi'_r = U\phi_r U^\dagger \simeq \phi_r + i\alpha[Q, \phi_r] = (1 - i\alpha q)\phi_r$$

と書くと、 $\varepsilon = -\alpha q$  と同定すれば良いことが分かる。[このとき古典論の水準で位相変換 (46) に対してラグランジアンが不変ならば、対応するユニタリー変換に対してもハミルトニアンは不変でなければならない、このとき量子論における対称性と保存則の一般論 (冒頭) から、再び  $Q$  は運動の定数 (保存量) となることが帰結される.]

## 2.4 節, 式の導出など

■量子力学における対称性と保存則 (式 (34)) について  $\alpha$  を実数の連続パラメーターとして、恒等変換と連続的に繋がった変換のユニタリー演算子を  $U = e^{i\alpha T}$  と書くと、 $T$  は Hermite 演算子でなければならない。実際、小さなパラメーター  $\alpha$  の 1 次までの近似でユニタリー性

$$1 = UU^\dagger = (1 + i\alpha T)(1 - i\alpha T^\dagger) = 1 + i\alpha(T - T^\dagger), \quad 1 = U^\dagger U = (1 - i\alpha T^\dagger)(1 + i\alpha T) = 1 - i\alpha(T^\dagger - T)$$

が成り立つことを要求すると、Hermite 性  $T = T^\dagger$  が得られる。

式 (34):

$$\begin{aligned} \text{系の対称性} &\Leftrightarrow H \text{ の対称性} \\ &\Leftrightarrow [T, H] = 0 \\ &\Leftrightarrow T \text{ は運動の定数.} \quad (\because \text{Heisenberg 方程式}) \end{aligned}$$

の 2 行目は次のように理解できる。一般に演算子  $O$  は無限小のユニタリー変換

$$O' = UOU^\dagger = (1 + i\alpha T)O(1 - i\alpha T) = O + i\alpha[T, O]$$

に対して  $\delta O = i\alpha[T, O]$  だけ変化するので、演算子  $O$  が不変に留まる条件は  $[T, O] = 0$  である。特にハミルトニアン  $H$  の不変性は  $[T, H] = 0$  を意味する。

上式 (34) の 3 行目は次のように理解できる。Heisenberg 描像において一般の演算子  $O(t)$  を考える。ただし演算子  $O(t)$  は時間に陽に依存しないと仮定すると、Heisenberg 方程式

$$i\hbar \frac{dO(t)}{dt} = [O(t), H]$$

が成立する。よって  $[O, H] = 0$  であれば、 $O$  は運動の定数 (保存量) であることになる。

■Lorentz 変換 (39) における無限小パラメーターの反対称性 無限小 Lorentz 変換 (39) に対して

$$\begin{aligned} x'_\mu x'^\mu &= \eta_{\mu\nu} x'^\nu x'^\mu \\ &= \eta_{\mu\nu} (x^\mu + x_\rho \varepsilon^{\mu\rho})(x^\nu + x_\sigma \varepsilon^{\nu\sigma}) \\ &\simeq x_\mu x^\mu + \eta_{\mu\nu} x^\mu x_\sigma \varepsilon^{\nu\sigma} + \eta_{\mu\nu} x^\nu x_\rho \varepsilon^{\mu\rho} \\ &= x_\mu x^\mu + x_\nu x_\sigma \varepsilon^{\nu\sigma} + x_\mu x_\rho \varepsilon^{\mu\rho} \\ &= x_\mu x^\mu + 2x_\mu x_\rho \varepsilon^{\mu\rho} \end{aligned}$$

であり, Lorentz 変換では 4 元動径ベクトルの長さ  $x_\mu x^\mu$  は不変にとどまらなければならないから,

$$x_\mu x_\rho \varepsilon^{\mu\rho} = 0$$

を得る.

$\varepsilon^{\mu\nu}$  の反対称部分は左辺に寄与を持たないので (式 (266) の箇所を参照),  $\varepsilon^{\mu\nu}$  の対称部分  $\varepsilon^{(S)\mu\nu}$  に対して

$$0 = x_\mu x_\rho \varepsilon^{(S)\mu\rho} = 2 \sum_{\mu>\rho} x_\mu x_\rho \varepsilon^{(S)\mu\rho} + x_\mu x_\mu \varepsilon^{(S)\mu\mu}$$

が課される (最右辺では繰り返された添字  $\mu$  について和をとらない). これにより対称部分  $\varepsilon^{(S)\mu\nu}$  はゼロになるから,  $\varepsilon^{\mu\nu}$  は添字に関して反対称でなければならない.

■場の理論の Lorentz 不変性から導かれる保存則 (42) の式 場の変分 (41) は微小量の 1 次までの近似で

$$\begin{aligned} \delta_T \phi_r(x) &\equiv \phi'_r(x') - \phi_r(x) \\ &= [\phi'_r(x') - \phi_r(x')] + [\phi_r(x') - \phi_r(x)] \\ &= \delta\phi_r(x') + \frac{\partial\phi_r}{\partial x_\beta} (\delta x_\beta = x'_\beta - x_\beta) \\ &= \delta\phi_r(x) + \frac{\partial\phi_r}{\partial x_\beta} \end{aligned}$$

と書き直される. 同様にラグランジアン密度の不変性は

$$0 = \mathcal{L}(\phi'_r(x'), \partial'_\alpha \phi'_r(x')) - \mathcal{L}(\phi_r(x), \partial_\alpha \phi_r(x)) = \delta\mathcal{L} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\alpha} \delta x^\alpha$$

と表される. 最右辺第 1 項  $\delta\mathcal{L}$  は場の変更  $\phi_r(x) \rightarrow \phi_r(x) + \delta\phi_r(x)$  に伴うラグランジアン密度の変分であり, 式 (35) において計算済みである:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi_r)} \delta\phi_r \right) = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi_r)} \left( \delta_T \phi_r(x) - \frac{\partial\phi_r}{\partial x_\beta} \right) \right\}.$$

これを上式に代入すると, 連続の式 (42):

$$\partial_\alpha f^\alpha = 0, \quad f^\alpha = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi_r)} \delta_T \phi_r - \mathcal{T}^{\alpha\beta} \delta x_\beta$$

が得られる.

■時空内の回転対称性に付随するカレント (44) の導出 回転操作  $\delta x_\beta = \varepsilon_{\beta\gamma} \delta x^\gamma$  を考え, カレント  $f^\alpha$  の式 (42):

$$f^\alpha = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi_r)} \delta_T \phi_r - \mathcal{T}^{\alpha\beta} \delta x_\beta$$

に  $\delta_T \phi_r(x) = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta} S_{rs}^{\alpha\beta} \phi_s(x)$  および

$$-\mathcal{T}^{\alpha\beta} \delta x_\beta = -\mathcal{T}^{\alpha\beta} \varepsilon_{\beta\gamma} \delta x^\gamma = -\frac{1}{2} (\mathcal{T}^{\alpha\beta} \varepsilon_{\beta\gamma} \delta x^\gamma + \mathcal{T}^{\alpha\gamma} \varepsilon_{\gamma\beta} \delta x^\beta) = \frac{1}{2} \varepsilon_{\beta\gamma} (x^\beta \mathcal{T}^{\alpha\beta} - x^\gamma \mathcal{T}^{\alpha\beta})$$

を代入すると, 式 (44):

$$f^\alpha = \frac{1}{2} \varepsilon_{\beta\gamma} \mathcal{M}^{\alpha\beta\gamma}, \quad \mathcal{M}^{\alpha\beta\gamma} \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi_r)} S_{rs}^{\beta\gamma} \phi_s + (x^\beta \mathcal{T}^{\alpha\gamma} - x^\gamma \mathcal{T}^{\alpha\beta}) (= -\mathcal{M}^{\alpha\gamma\beta})$$

が得られる.

■保存する電荷の表式 (47) の確認 大域的位相変換 (46):

$$\phi'_r = e^{i\varepsilon} \phi_r \simeq (1 + i\varepsilon) \phi_r, \quad \phi'^{\dagger}_r = e^{-i\varepsilon} \phi_r^{\dagger} \simeq (1 - i\varepsilon) \phi_r^{\dagger}$$

に対して場の変分は  $\delta\phi_r = i\varepsilon\phi_r, \delta\phi_r^{\dagger} = -i\varepsilon\phi_r^{\dagger}$  と同定されるので, ラグランジアンの不変性に付随するカレント (36):

$$f^\alpha = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi_r)} \delta\phi_r + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi_r^{\dagger})} \delta\phi_r^{\dagger}$$

は保存量

$$\begin{aligned} F^0 &= c \int d^3x [\pi_r(x) \delta\phi_r(x) + \pi_r^{\dagger}(x) \delta\phi_r^{\dagger}(x)] \\ &= i\varepsilon c \int d^3x [\pi_r(x) \phi_r(x) - \pi_r^{\dagger}(x) \phi_r^{\dagger}(x)] \end{aligned}$$

を与える. よって, これに適当な定数  $-q/\varepsilon c\hbar$  を掛けた式 (47) の  $Q$  も保存する.

■電荷  $Q$  と場の交換関係 (48) の導出 電荷の式 (47):

$$Q = \frac{-iq}{\hbar} \int d^3x [\pi_r(x) \phi_r(x) - \pi_r^{\dagger}(x) \phi_r^{\dagger}(x)]$$

を思い出すと, 場の正準交換関係  $[\phi_r(\mathbf{x}, t), \pi_s(\mathbf{x}', t)] = i\hbar\delta_{rs}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ , etc. より

$$[Q, \phi_r(x)] = \frac{-iq}{\hbar} \int d^3x' [\pi_s(x'), \phi_r(x)] \phi_s(x') = -q\phi_r(x)$$

を得る. 第2式  $[Q, \phi_r^{\dagger}(x)] = +q\phi_r^{\dagger}(x)$  も同様に確かめられる.

## 2.4 について

■ユニタリー変換 (2.33) について 場の交換関係  $[A, B] = C$  の共変性については,

$$[A', B'] = U[A, B]U^{\dagger} = UCUC^{\dagger} = C'$$

と確かめられる (同じ理由で反交換関係も不変である).

振幅の不変性は

$$\langle\Phi|\Psi\rangle \rightarrow \langle\Phi|U^{\dagger}U|\Psi\rangle = \langle\Phi|\Psi\rangle$$

と理解できる.

■場の種類  $r$  に関する和について 「式 (2.15) 以降, 積の中で重複して用いられている添字  $r, \alpha$  について和を取ることが含意されている」 (p.32 脚注). 実際 p.37 下2行と式 (2.47) 下3行の説明より, 電荷 (2.42), 場のエネルギー・運動量 (2.51), 場の角運動量 (2.54) では場の種類  $r$  について和をとらなければならない.

■「 $\phi_r(x)|Q'\rangle$  も  $Q$  の固有状態で, その固有値は  $(Q' - q)$ 」 (p.39, 1.2)(本稿の式 (49)) について 「 $|Q'\rangle$  が  $Q$  の固有状態で, その固有値が  $Q'$ 」 (p.39, 1.1), すなわち

$$Q|Q'\rangle = Q'|Q'\rangle$$

としたとき、固有方程式

$$Q\phi_r|Q'\rangle = (Q' - q)\phi_r|Q'\rangle$$

が成り立つことが次のように示される。交換関係 (48): の第 1 式  $[Q, \phi_r(x)] = -q\phi_r(x)$  を利用すると、

$$\begin{aligned} Q\phi_r|Q'\rangle &= (\phi_r Q + [Q, \phi_r])|Q'\rangle \\ &= \phi_r(Q - q)|Q'\rangle \\ &= (Q' - q)\phi_r|Q'\rangle. \end{aligned}$$

なお「 $\phi_r^\dagger|Q'\rangle$  は固有値  $(Q' + q)$  の固有状態になる」(p.39, 1.3) ことも、交換関係 (48): の第 2 式  $[Q, \phi_r^\dagger(x)] = +q\phi_r^\dagger(x)$  を用いて同様に確かめられる。

■ゲージ対称性と電荷保存則 よく知られているように、古典電磁気学においても、電磁場のゲージ変換に関する理論の対称性と電荷保存則の間には密接な関係がある [4, p.56, pp.82–83].

■「超電荷 (ハイパーチャージ)」(p.39 下から 7 行目) について 手頃な説明が文献 [8, § 5.6] に見出される (そのノートも参照)。第 2 巻では類似の概念として、弱超電荷が扱われる (式 (17.26) の箇所を参照)。

## 練習問題 (第 2 章)

### 2.1 ラグランジアン密度の任意性

2.4 節のノートで言及した練習問題 2.4 を解いておく。(この結果は後で用いる。)

ラグランジアン密度を

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \partial_\mu \Lambda^\mu$$

と変更しても運動方程式は不変である。実際、作用は時空のある領域  $\Omega$  にわたるラグランジアン密度の積分であることを思い出すと、一般に場の関数  $\Lambda^\mu$  の 4 元発散  $\partial_\mu \Lambda^\mu$  だけ異なる 2 つのラグランジアン密度は、領域  $\Omega$  の表面にわたる  $\Lambda^\mu$  の積分だけ異なる 2 つの作用を与える。ところで最小作用原理において領域  $\Omega$  の表面は空間の無限遠の“側面”と、場の値が指定された“平面”  $t = t_1, t_2$  から成り、ここでは場またはその変分がゼロになるため、2 つの作用の差は変分をとると落ちる。よって作用が停留値をとる条件に他ならない場の方程式は、2 つのラグランジアン密度に対して共通となる。

### 2.4 $[P^\alpha, F(x)] = -i\partial^\alpha F(x)$

本稿では簡単のために単一の場  $\phi$  を考えて場の種類の添字  $r$  を省き、 $c = 1, \hbar = 1$  とおく。正準交換関係に基づき、場の運動量演算子  $P^j = \int d^3x \pi(x) \partial^j \phi(x)$  が

$$[P^j, \phi(x)] = -i\partial^j \phi(x), \quad [P^j, \pi(x)] = -i\partial^j \pi(x) \quad (50)$$

を満たすことを示せ。ここから  $\phi$  と  $\pi$  で展開できる任意の演算子  $F(x) = F(\phi(x), \pi(x))$  が

$$[P^j, F(x)] = -i\partial^j F(x) \quad (51)$$

を満たすことを示せ。これを Heisenberg 方程式  $[H, F(x)] = -i\partial_0 F(x)$  と合わせると、共変な方程式

$$[P^\alpha, F(x)] = -i\partial^\alpha F(x)$$

が得られる。

■式 (50) の証明

$$[P^j, \phi(x)] = \int d^3x' [\pi(x') \partial'^j \phi(x'), \phi(x)] = \int d^3x' \left( \pi(x') [\partial'^j \phi(x'), \phi(x)] + [\pi(x'), \phi(x)] \partial'^j \phi(x') \right),$$

$$[P^j, \pi(x)] = \int d^3x' [\pi(x') \partial'^j \phi(x'), \pi(x)] = \int d^3x' \left( \pi(x') [\partial'^j \phi(x'), \pi(x)] + [\pi(x'), \pi(x)] \partial'^j \phi(x') \right)$$

において, 正準交換関係により

$$[\partial'^j \phi(x'), \phi(x)] = \partial'^j [\phi(x'), \phi(x)] = 0, \quad [\pi(x'), \phi(x)] = -i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'),$$

$$[\partial'^j \phi(x'), \pi(x)] = \partial'^j [\phi(x'), \pi(x)] = \partial'^j i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad [\pi(x'), \pi(x)] = 0$$

なので, 式 (50):

$$[P^j, \phi(x)] = -i\partial^j \phi(x),$$

$$[P^j, \pi(x)] = \int d^3x' (-\partial'^j \pi(x')) i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (\text{部分積分した})$$

$$= -i\partial^j \pi(x)$$

を得る.

■式 (51) の証明  $\xi(x) \equiv (\phi(x), \pi(x))$  を用いて式 (50) は  $[P^j, \xi^i] = -i\partial^j \xi^i$  となる. 関数  $F(x) = F(\xi(x))$  を

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \xi^{i_1} \dots \xi^{i_n} \left( \frac{\partial}{\partial \xi^{i_1}} \dots \frac{\partial}{\partial \xi^{i_n}} F[\xi] \right)_{\xi=0}$$

と展開すると

$$[P^j, F(x)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [P^j, \xi^{i_1} \dots \xi^{i_n}] \left( \frac{\partial}{\partial \xi^{i_1}} \dots \frac{\partial}{\partial \xi^{i_n}} F[\xi] \right)_{\xi=0}$$

である. ここで

$$[P^j, \xi^{i_1} \dots \xi^{i_n}] = [P^j, \xi^{i_1}] \xi^{i_2} \dots \xi^{i_n} + \xi^{i_1} [P^j, \xi^{i_2}] \xi^{i_3} \dots \xi^{i_n} + \dots + \xi^{i_1} \dots \xi^{i_{n-1}} [P^j, \xi^{i_n}]$$

$$= (-i\partial^j \xi^{i_1}) \xi^{i_2} \dots \xi^{i_n} + \xi^{i_1} (-i\partial^j \xi^{i_2}) \xi^{i_3} \dots \xi^{i_n} + \dots + \xi^{i_1} \dots \xi^{i_{n-1}} (-i\partial^j \xi^{i_n})$$

$$= -i\partial^j (\xi^{i_1} \dots \xi^{i_n})$$

なので式 (51):

$$[P^j, F(x)] = -i\partial^j \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \xi^{i_1} \dots \xi^{i_n} \left( \frac{\partial}{\partial \xi^{i_1}} \dots \frac{\partial}{\partial \xi^{i_n}} F[\xi] \right)_{\xi=0} = -i\partial^j F(x)$$

を得る.

## 2.5 空間並進とユニタリ変換

$\delta_\alpha$  を 4 元ベクトルの定数 (無限小でなくても良い) とする演算子  $U = \exp(-i\delta_\alpha P^\alpha)$  (引き続き  $\hbar = 1$ ) によるユニタリ変換が, 空間並進

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = U\phi(x)U^\dagger = \phi(x - \delta)$$

を生成することを示す. 前問の結果  $[P^\alpha, F(x)] = -\partial^\alpha F(x)$  と Baker-Hausdorff の補助定理より,

$$\begin{aligned}
\phi'(x) &= e^{-i\delta_\alpha P^\alpha} \phi(x) e^{i\delta_\alpha P^\alpha} \\
&= \phi(x) - i\delta_\alpha [P^\alpha, \phi(x)] + \frac{(-i)^2}{2!} \delta_\alpha \delta_\beta [P^\alpha, [P^\beta, \phi(x)]] + \dots \\
&\quad + \frac{(-i)^n}{n!} \delta_{\alpha_1} \delta_{\alpha_2} \dots \delta_{\alpha_n} [P^{\alpha_1}, [P^{\alpha_2}, \dots [P^{\alpha_n}, \phi(x)] \dots]] + \dots \\
&= \phi(x) + (-i)^{2 \cdot 1} \partial^\alpha \phi(x) + \frac{(-i)^{2 \cdot 2}}{2!} \delta_\alpha \delta_\beta \partial^\alpha \partial^\beta \phi(x) + \dots + \frac{(-i)^{2n}}{n!} \delta_{\alpha_1} \delta_{\alpha_2} \dots \delta_{\alpha_n} \partial^{\alpha_1} \partial^{\alpha_2} \dots \partial^{\alpha_n} \phi(x) + \dots \\
&= \phi(x - \delta).
\end{aligned}$$

## 第3章 Klein-Gordon 場

「本章では、スピンのゼロで有限の固有質量を持つ相対論的な物質粒子を考察する」(序文より).  
本稿では既に自然単位系 (6.1 節) を採用し,  $c = 1, \hbar = 1$  としている.

### 3.1 実 Klein-Gordon 場

質量  $m$  の粒子の 4 元運動量  $p = (E, \mathbf{p})$  は,

$$p^2 = m^2 \quad (E^2 = m^2 + \mathbf{p}^2)$$

の関係を満たす. そこで非相対論的な量子力学からの類推により

$$p_\mu = i\partial_\mu \quad \left( \mathbf{p} \rightarrow -i\nabla, \quad E \rightarrow i\frac{\partial}{\partial t} \right)$$

と置き換えると, 演算子の関係  $\square + m^2 = 0$  (ただし  $\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu$ ) が得られる. 今, 対象としている粒子が単一のスカラー場  $\phi(x)$  で記述されるものと仮定すると,  $\phi(x)$  は場の方程式

$$(\square + m^2)\phi = 0 \tag{52}$$

を満たさなければならないと考えられる. これを Klein-Gordon 方程式と呼ぶ<sup>\*11</sup>.

このように演算子への置き換えによって 1 粒子の波動方程式を導出する手続きを ‘第一’ 量子化と呼ぶことがある. しかしながら  $\phi(x)$  を 1 粒子の波動関数と解釈しようとする,

- 粒子密度の正定値性の欠如
- エネルギー  $E = \pm\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$  の 2 通りの符号

に起因した困難が生じる. 正しくは  $\phi(x)$  を古典場と見て場を量子化しなければならず (第二量子化), このとき得られる多体の理論にはそのような困難は生じない.

[以上の議論では粒子の種類を仮定しておらず, 質量  $m$  のあらゆる相対論的な粒子に当てはまらなければならないと考えられる. 次に]  $\pi$  中間子や  $K$  中間子のようにスピンのゼロの粒子を考えると, 場の角運動量の一般式 (45) において  $S_{rs}^{\alpha\beta} = 0$  でなければならないから, そのような粒子はスカラー場によって記述されることになる. 特に電氣的に中性の粒子を想定すると, 実スカラー場を考えれば良いことになる (2.4 節). [そこで原理として, 実スカラー場の適正な] ラグランジアン密度を

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\{(\partial_\alpha\phi)(\partial^\alpha\phi) - m^2\phi^2\} \tag{53}$$

で与える. [この  $\mathcal{L}$  はスカラーになっており, それ故, 場の方程式の不変性が保証される. また  $\mathcal{L}$  は場の 1 階微分までを含んでおり, 古典的因果律が満たされる.] すると  $\phi(x)$  の運動方程式として Klein-Gordon 方程式 (52) が導かれる (導出は下記, 教科書では 2.2 節で説明済み). [そして平面波解  $\phi \sim e^{-ip \cdot x}$  が期待される分散関係  $p^2 = m^2$  を満たすことが, 逆に保証される<sup>\*12</sup>.]

<sup>\*11</sup> Klein-Gordon 方程式における質量  $m$  は, 自然単位系を採用しない場合には  $\mu = mc/\hbar$  になる. [これは Compton 波長 (を  $2\pi$  で割った値) $\lambda = h/2\pi mc$  の逆数である.]

<sup>\*12</sup> 平面波  $e^{\mp ip \cdot x}$  に対し  $\partial_\mu = \mp ip_\mu, p_\mu = \pm i\partial_\mu, \square \equiv \partial^2 = (ip)^2$  である.

ここで実 Klein-Gordon 場  $\phi$  を Hermite 演算子と見て量子化を行う。  $\phi$  に対して共役な場は

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}$$

となるので、正準交換関係は

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}(\mathbf{x}', t)] = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad [\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{x}', t)] = 0, \quad [\dot{\phi}(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}(\mathbf{x}', t)] = 0 \quad (54)$$

である。この含意を調べるために、Klein-Gordon 方程式 (52) の解を

$$\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^-(x), \quad (55)$$

$$\phi^+(x) = \sum_{\mathbf{k}} \left( \frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} a(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot x}, \quad (56)$$

$$\phi^-(x) = \sum_{\mathbf{k}} \left( \frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} a^\dagger(\mathbf{k}) e^{ik \cdot x} \quad (57)$$

と Fourier 展開する。ただし  $k^0 = \omega_{\mathbf{k}} \equiv \sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2}$  である。またここでは便宜的に空間を一辺  $L$ 、体積  $V = L^3$  の立方体領域と見なして周期境界条件

$$\phi(0, y, z, t) = \phi(L, y, z, t), \quad \text{etc.}$$

を課しており、和は離散的な波数ベクトル  $\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L}\mathbf{n}$  ( $\mathbf{n}$  は整数を成分に持つベクトル) にわたってとる。展開係数  $a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k})$  を互いに Hermite 共役としてあるため、場  $\phi$  の Hermite 性が保証されている。

波数の離散化について 周期境界条件の下で許容される離散的な値  $\mathbf{k}$  の各々は、波数空間において体積  $(2\pi/L)^3$  を占める。よって  $L \rightarrow \infty$  の極限で離散的な和  $\sum_{\mathbf{k}}$  は Fourier 積分  $\int \frac{d^3k}{(2\pi/L)^3}$  に移行する。より正確には、 $L \rightarrow \infty$  の極限で  $L$  は定義されていないから、積分への移行の規則は

$$\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$$

と書くのが好ましい。逆に  $\mathbf{k}$  についての積分は、体積  $V = L^3$  の空間を考えることにより離散的な和として理解できる。

すると正準交換関係 (54) は、展開係数に対する調和振動子の交換関係

$$[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \quad [a(\mathbf{k}), a(\mathbf{k}')] = 0, \quad [a^\dagger(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = 0 \quad (58)$$

になる (証明は問題 3.1)\*<sup>13</sup>。このため  $a(\mathbf{k})$  は消滅演算子、 $a^\dagger(\mathbf{k})$  は生成演算子となる。そして真空状態  $|0\rangle$  を条件

$$a(\mathbf{k}) |0\rangle = 0 \quad (\text{全ての } \mathbf{k} \text{ に対して}) \quad (59)$$

によって定義すると、数演算子  $N(\mathbf{k}) = a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k})$  の固有値 (占有数)  $n(\mathbf{k})$  を持つ固有状態

$$|\dots, n(\mathbf{k}), \dots\rangle \sim \prod_{\mathbf{k}} [a^\dagger(\mathbf{k})]^{n(\mathbf{k})} |0\rangle$$

\*<sup>13</sup> これを見越して場の展開式 (55)–(57) において、因子  $\left(\frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}}\right)^{1/2}$  をくくり出して係数  $a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k})$  を定義しておいた。

が作られる。これはエネルギーが  $\omega_{\mathbf{k}}$ 、運動量が  $\mathbf{k}$  の各モードを  $n(\mathbf{k})$  個の粒子が占有している状態と解釈される<sup>\*14</sup>。この解釈は Klein-Gordon 場のハミルトニアン  $H$  と運動量演算子  $\mathbf{P}$  を計算すると、

$$H = \int d^3x \frac{1}{2} \left\{ \dot{\phi}^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2 \right\} \quad (60)$$

$$= \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} \left( N(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} \right), \quad (61)$$

$$\mathbf{P} = - \int d^3x \dot{\phi} \nabla\phi \quad (62)$$

$$= \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \left( N(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} \right) \quad (63)$$

となることから裏付けられる (導出は下記、これらは期待されるように時刻  $t$  に依らない保存量となっている)。

なお真空状態を定義する式 (59) は、粒子が全くない  $n(\mathbf{k}) = 0$  の状態を表していることになる。この条件は場の演算子 (56) を用いて、等価的に

$$\phi^+(x)|0\rangle = 0 \quad (\text{全ての } x \text{ に対して})$$

と書くこともできる。

占有数はゼロ以上の任意の整数値  $n(\mathbf{k}) = 0, 1, 2, \dots$  を取り得るから、Klein-Gordon 場によって記述される粒子はボゾンである。生成演算子同士は可換なので、同種ボゾン系は粒子の入れ替え操作に関する対称性を持つ。

$$a^\dagger(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{k}')|0\rangle = a^\dagger(\mathbf{k}')a^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle.$$

ハミルトニアンの式 (61) より、真空状態でのエネルギー期待値は  $\langle 0|H|0\rangle = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}}$  となる。これは無限大の定数である。そこでこれを省き、真空状態のエネルギー期待値がゼロとなるようにエネルギーを測る基準をとり直すと、ハミルトニアンは

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} N(\mathbf{k})$$

に置き換わる。これはハミルトニアンを正規 (順序) 化することと等価である [理由は本稿次節で補足]。ここで正規順序化とは、演算子積を全ての消滅演算子が全ての生成演算子よりも右側に配置される順序に並び替えることを指す。この際、ボゾン系に関しては、すべての演算子が可換であるかのように考えて順序変更を施せば良い。また正規順序化された演算子積を正規積と呼び、 $N[\dots]$  で表す：

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2} \omega_{\mathbf{k}} N [a(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{k}) + a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k})] = \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} N(\mathbf{k}).$$

もう少し具体例を挙げておこう。

$$\begin{aligned} N[a(\mathbf{k}_1)a(\mathbf{k}_2)a^\dagger(\mathbf{k}_3)] &= a^\dagger(\mathbf{k}_3)a(\mathbf{k}_1)a(\mathbf{k}_2) = a^\dagger(\mathbf{k}_3)a(\mathbf{k}_2)a(\mathbf{k}_1), \\ N[\phi(x)\phi(y)] &= N[\phi^+(x)\phi^+(y) + \phi^+(x)\phi^-(y) + \phi^-(x)\phi^+(y) + \phi^-(x)\phi^-(y)] \\ &= \phi^+(x)\phi^+(y) + \phi^-(x)\phi^+(y) + \phi^-(x)\phi^-(y). \end{aligned}$$

演算子の順序は量子化の前には任意に入れ替えられるので、正規順序化によって古典論との対応が損なわれることはない。

<sup>\*14</sup> 自然単位系では、4元波数ベクトル  $k = (\omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k})$  は4元運動量  $p = (E_{\mathbf{p}}, \mathbf{p})$  に一致する。

### 3.1 節, 式の導出など

■ラグランジアン密度 (53) から Klein-Gordon 方程式 (52) の導出

$$\begin{aligned}\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} &= \partial_\mu \left\{ \frac{1}{2} (\partial_\alpha \phi) (\partial^\alpha \phi) \right\} = \partial_\mu \partial^\mu \phi, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} &= \frac{\partial}{\partial \phi} \left( -\frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right) = -m^2 \phi\end{aligned}$$

より, Euler-Lagrange 方程式は Klein-Gordon 方程式 (52) を与える.

$$0 = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi.$$

■ハミルトニアン (61) と運動量演算子 (63) の導出 エネルギー・運動量の一般式 (38)(2.4 節):

$$P^\alpha = \int d^3x (\pi_r \partial^\alpha \phi_r - \mathcal{L} g^{0\alpha})$$

は実 Klein-Gordon 場に対して

$$P^\alpha = \int d^3x \left[ \dot{\phi} \partial^\alpha \phi - \frac{1}{2} g^{0\alpha} \{ (\partial_\beta \phi) (\partial^\beta \phi) - m^2 \phi^2 \} \right]$$

となる. ここに場の Fourier 展開 (55)–(57):

$$\phi(x) = \sum_{\mathbf{k}} \left( \frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} \{ a(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot x} + a^\dagger(\mathbf{k}) e^{ik \cdot x} \}$$

を代入すると, まず第 1 項は

$$\begin{aligned}& \int d^3x \dot{\phi} \partial^\alpha \phi \\ &= \int d^3x \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \frac{1}{2V(\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'})^{1/2}} (-i\omega_{\mathbf{k}})(-ik'^\alpha) \{ a(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot x} - a^\dagger(\mathbf{k}) e^{ik \cdot x} \} \{ a(\mathbf{k}') e^{-ik' \cdot x} - a^\dagger(\mathbf{k}') e^{ik' \cdot x} \} \\ &= \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \frac{1}{2} \left( \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{\omega_{\mathbf{k}'}} \right)^{1/2} k'^\alpha \\ & \quad \times \int \frac{d^3x}{V} \{ -a(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}') e^{-i(k+k') \cdot x} + a(\mathbf{k}) a^\dagger(\mathbf{k}') e^{-i(k-k') \cdot x} + a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}') e^{i(k-k') \cdot x} - a^\dagger(\mathbf{k}) a^\dagger(\mathbf{k}') e^{i(k+k') \cdot x} \}\end{aligned}$$

と書き換えられる. ここで  $x \equiv (t, \mathbf{x})$  と書き,

$$\int \frac{d^3x}{V} e^{\mp i(k+k') \cdot x} = e^{\mp i(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}'})t} \delta_{\mathbf{k}, -\mathbf{k}'}, \quad \int \frac{d^3x}{V} e^{\mp i(k-k') \cdot x} = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$$

を用いて空間積分を実行し, 次いで  $\mathbf{k}'$  についての和をとると

$$\begin{aligned}\int d^3x \dot{\phi} \partial^\alpha \phi &= \sum_{\mathbf{k}} \left[ \left( \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{\mathbf{k}} \right) \frac{1}{2} \{ a(\mathbf{k}) a^\dagger(\mathbf{k}) + a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) \} - \left( \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{-\mathbf{k}} \right) \frac{1}{2} (\dots) \right] \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \left[ \left( \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{\mathbf{k}} \right) \left( N(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} \right) - \left( \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{-\mathbf{k}} \right) \frac{1}{2} (\dots) \right] \quad (\because [a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k})] = 1)\end{aligned}$$

が得られる。ここに

$$(\dots) \equiv a(\mathbf{k})a(-\mathbf{k})e^{-2i\omega_{\mathbf{k}}t} + a^\dagger(\mathbf{k})a^\dagger(-\mathbf{k})e^{2i\omega_{\mathbf{k}}t}$$

は生成演算子同士、および消滅演算子同士の積の項である (以下, 同じ)。同様の計算により

$$\begin{aligned} \int d^3x (\partial_\beta \phi)(\partial^\beta \phi) &= \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \frac{k_\beta k'^\beta}{2(\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'})^{1/2}} \int \frac{d^3x}{V} \{-a(\mathbf{k})a(\mathbf{k}')e^{-i(k+k')\cdot x} + a(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{k}')e^{-i(k-k')\cdot x} \\ &\quad + a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}')e^{i(k-k')\cdot x} - a^\dagger(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{k}')e^{i(k+k')\cdot x}\} \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}} \left[ m^2 \left( N(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} \right) - \frac{\omega_{\mathbf{k}}^2 + \mathbf{k}^2}{2} (\dots) \right], \quad (\because k^2 = m^2) \\ \int d^3x (m^2 \phi^2) &= \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \frac{m^2}{2(\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'})^{1/2}} \int \frac{d^3x}{V} \{a(\mathbf{k})a(\mathbf{k}')e^{-i(k+k')\cdot x} + a(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{k}')e^{-i(k-k')\cdot x} \\ &\quad + a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}')e^{i(k-k')\cdot x} + a^\dagger(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{k}')e^{i(k+k')\cdot x}\} \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}} \left[ m^2 \left( N(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} \right) + \frac{m^2}{2} (\dots) \right], \\ \therefore \int d^3x \left( -\frac{1}{2} g^{0\alpha} \right) \{(\partial_\beta \phi)(\partial^\beta \phi) - m^2 \phi^2\} &= \frac{1}{2} g^{0\alpha} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\omega_{\mathbf{k}}^2 + \mathbf{k}^2 + m^2}{2\omega_{\mathbf{k}}} (\dots) \end{aligned}$$

である。

以上よりハミルトニアンは

$$H = P^0 = \sum_{\mathbf{k}} \left\{ \omega_{\mathbf{k}} \left( N(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\mathbf{k}^2 + m^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2}{2\omega_{\mathbf{k}}} (\dots) \right\}$$

となる。ここで  $\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2}$  より  $(\dots)$  の係数はゼロとなるので、式 (61):

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} \left( N(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} \right)$$

を得る。また運動量演算子は

$$\mathbf{P} = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \left\{ \left( N(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} (\dots) \right\}$$

と計算される。ここで  $\mathbf{k}(\dots)$  は全体として  $\mathbf{k}$  の奇関数なので相殺し、式 (63):

$$\mathbf{P} = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \left( N(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} \right)$$

が導かれる。

### 3.1 について

■波数と運動量 自然単位系を採用しない場合、 $p^2 = (mc)^2$  であり、これを両辺  $\hbar^2$  で割ると  $k^2 = \mu^2$  を得る。これは光子 ( $m = 0$ ) に対する関係  $k^2 = 0$  を含んでいる。

■Klein-Gordon 方程式 (52) について 電磁場に対する波動方程式 (第 1 章) は質量が  $m = 0$  の場合の Klein-Gordon 方程式にあたる。

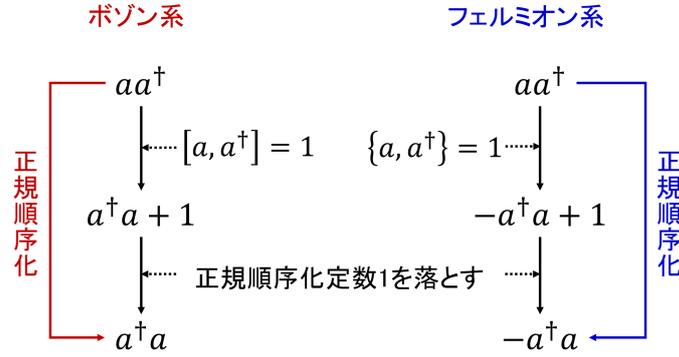


図6 観測量の無限大の定数を落とす措置と正規順序化の等価性 (フェルミオン系の議論は 4.3 節)

■平面波解 平面波解  $\text{const} \times e^{\mp ik \cdot x}$  に対し

$$p_\mu = \pm i\hbar\partial_\mu, \quad \partial_\mu = \mp ik_\mu, \quad \partial^2 = (ik)^2$$

なので、これが Klein-Gordon 方程式を満たす条件

$$0 = (\partial^2 + \mu^2)e^{\mp ik \cdot x} = (-k^2 + \mu^2)e^{\mp ik \cdot x}$$

から分散関係 (3.8a):  $k^2 = \mu^2$  が得られる。

■運動量 (3.13) について 場の運動量の一般式 (2.51) において  $\partial^j = -\partial_j$  であることに注意する。

■場の 4 元運動量の式 (61),(63) について 複素 Klein-Gordon 場の 4 元運動量  $P^\alpha$  の式 (3.30) において  $a = b$  とおき、 $1/2$  倍したものに一致している。

■正規順序化について ハミルトニアン無限大の定数を捨てる操作が正規順序化と等価であることは、「任意の正規積について、その真空期待値が必ずゼロになる」(p.49, 1.7) ことから理解できる。この点をより丁寧に考察すると次のようになる。ハミルトニアンにおける無限大の定数  $\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}}$  は、演算子積  $a(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{k})$  を  $a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k})$  に置き換えるときのおつりの項である交換子  $[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k})]$  に由来する (問題 3.1 の解答参照)。正規順序化はこのゼロでない交換子を積極的に捨てる操作であって、それ故すべてのボゾン因子を可換であるかのように扱うことが、正準交換関係に反していることは問題ない (図 6 参照)。

■2 粒子状態 (3.20b,c) が規格化されていることの確認

$$\begin{aligned} & a(\mathbf{k}')a(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{k}') \\ &= a(\mathbf{k}')(1 + a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}))a^\dagger(\mathbf{k}') \\ &= \underbrace{1 + a^\dagger(\mathbf{k}')a(\mathbf{k}')}_{a(\mathbf{k}')a^\dagger(\mathbf{k}')} + \underbrace{\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} + a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}')}_{a(\mathbf{k}')a^\dagger(\mathbf{k})} \end{aligned}$$

なので、 $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}'$  のとき

$$\langle 0 | a(\mathbf{k}')a(\mathbf{k}) \cdot (a^\dagger(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{k}') | 0 \rangle = \langle 0 | 0 \rangle = 1.$$

また、

$$\langle 0 | \left( \frac{a(\mathbf{k})}{\sqrt{2}} \right)^2 \left( \frac{a^\dagger(\mathbf{k})}{\sqrt{2}} \right)^2 | 0 \rangle = \frac{1 + (\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}})^2}{2} \langle 0 | 0 \rangle = 1.$$

### 3.2 複素 Klein-Gordon 場

前節の議論を拡張して、複素 Klein-Gordon 場を扱うことにしよう。ここで現れる新たな性質は、既に 2.4 節でも言及したように、場が保存する電荷と関係づけられるということである。実場によって電荷を扱うことは不可能である。本節では、この保存する電荷という論点を集中的に扱う。他の面において実場と複素場はよく似ているので、主要な結果だけを紹介して、その証明を読者に任せることができる。(第 1 段落より)

- 複素 Klein-Gordon 場  $\phi$ , Hermite 共役場  $\phi^\dagger$  (互いに独立な場として扱う)
- ラグランジアン密度

$$\mathcal{L} = N [(\partial_\alpha \phi^\dagger)(\partial^\alpha \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi]. \quad (3.22)$$

- 場の方程式 (Klein-Gordon 方程式)

$$(\square + m^2)\phi = 0, \quad (\square + m^2)\phi^\dagger = 0. \quad (3.23)$$

- $\phi$  と  $\phi^\dagger$  に対して正準共役な場

$$\pi = \dot{\phi}^\dagger, \quad \pi^\dagger = \dot{\phi}. \quad (3.24)$$

- 正準交換関係

$$\begin{aligned} [\phi(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}^\dagger(\mathbf{x}', t)] &= i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \\ [\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{x}', t)] &= [\phi(\mathbf{x}, t), \phi^\dagger(\mathbf{x}', t)] = 0, \\ [\dot{\phi}(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}(\mathbf{x}', t)] &= [\dot{\phi}(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}^\dagger(\mathbf{x}', t)] = [\phi(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}(\mathbf{x}', t)] = 0. \end{aligned} \quad (3.25)$$

- 場の Fourier 展開

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \sum_{\mathbf{k}} \left( \frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} \{a(\mathbf{k})e^{-ik \cdot x} + b^\dagger(\mathbf{k})e^{ik \cdot x}\}, \\ \phi^\dagger(x) &= \sum_{\mathbf{k}} \left( \frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} \{b(\mathbf{k})e^{-ik \cdot x} + a^\dagger(\mathbf{k})e^{ik \cdot x}\}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

- 正準交換関係から引き出される展開係数の交換関係

$$\begin{aligned} [a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] &= [b(\mathbf{k}), b^\dagger(\mathbf{k}')] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \\ [a(\mathbf{k}), a(\mathbf{k}')] &= [b(\mathbf{k}), b(\mathbf{k}')] = [a(\mathbf{k}), b(\mathbf{k}')] = [a^\dagger(\mathbf{k}), b^\dagger(\mathbf{k}')] = 0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

[導出は問題 3.2.] これにより  $a^\dagger(\mathbf{k}), a(\mathbf{k})$  および  $b^\dagger(\mathbf{k}), b(\mathbf{k})$  は、2 種類の粒子—— $a$  粒子,  $b$  粒子と呼ぼう——の生成・消滅演算子となる。

- 占有数演算子

$$N_a(\mathbf{k}) = a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}), \quad N_b(\mathbf{k}) = b^\dagger(\mathbf{k})b(\mathbf{k}). \quad (3.28)$$

- 真空状態  $|0\rangle$  を定義する条件

$$\begin{aligned} a(\mathbf{k})|0\rangle &= b(\mathbf{k})|0\rangle = 0, \quad (\text{全ての } \mathbf{k}) \\ \text{または} \quad \phi^+(x)|0\rangle &= \phi^{\dagger+}(x)|0\rangle = 0, \quad (\text{全ての } x) \end{aligned} \quad (3.29)$$

ただし上付きの正号は場の Fourier 展開 (3.26) における正振動数部分を表す。

- エネルギー・運動量演算子

$$P^\alpha = (H, \mathbf{P}) = \sum_{\mathbf{k}} k^\alpha (N_a(\mathbf{k}) + N_b(\mathbf{k})). \quad (3.30)$$

[導出は本稿次節.]

- ラグランジアン密度 (3.22) の大域的位相変換に対する不変性から導かれる, 保存する電荷

$$Q = -iq \int d^3x N [\dot{\phi}^\dagger \phi - \dot{\phi} \phi^\dagger] \quad (3.31)$$

$$= q \sum_{\mathbf{k}} [N_a(\mathbf{k}) - N_b(\mathbf{k})]. \quad (3.34)$$

[本稿次節で補足.] ここから  $a$  粒子に電荷  $+q$ ,  $b$  粒子に電荷  $-q$  が充てがわれることが分かる.

- [ $Q$  が運動の定数であることから期待されるように,]
- $Q$  がハミルトニアンと可換であることが容易に見て取れる.
- 対応するカレント

$$s^\alpha = -iqN [(\partial^\alpha \phi^\dagger)\phi - (\partial^\alpha \phi)\phi^\dagger]. \quad (3.32)$$

これは確かに連続の式を満たす [本稿次節で補足].

- $\pi$  中間子,  $K$  中間子はスピン 0 の粒子であり (3.1 節),
    - $\pi^+$ : 複素 Klein-Gordon 場 (の  $a$  粒子)
    - $\pi^-$ : 複素 Klein-Gordon 場 (の  $b$  粒子)
    - $\pi^0$ : 実 Klein-Gordon 場
 として記述される.
  - $K^0$  中間子は電氣的に中性で, 超電荷 (ハイパーチャージ) の異なる反粒子  $\bar{K}^0$  を持ち,
    - $K^0$ : 複素 Klein-Gordon 場 (の  $a$  粒子)
    - $\bar{K}^0$ : 複素 Klein-Gordon 場 (の  $b$  粒子)
 として記述される. 超電荷の保存は強い相互作用の下では正しい.
- [メモ: 超電荷の初出は p.39, 詳しい説明は式 (17.26) の箇所.]

## 3.2 について

■ 複素 Klein-Gordon 場のエネルギー・運動量演算子 (3.30) の導出 計算は実 Klein-Gordon 場に対して行ったのとよく似たものになる. エネルギー・運動量の一般式 (2.51)(2.4 節):

$$P^\alpha = \int d^3x (\pi_r \partial^\alpha \phi_r - \mathcal{L} g^{0\alpha})$$

は複素 Klein-Gordon 場に対して

$$P^\alpha = \int d^3x N [\dot{\phi} \partial^\alpha \phi^\dagger + \dot{\phi}^\dagger \partial^\alpha \phi - g^{0\alpha} \{(\partial_\beta \phi^\dagger)(\partial^\beta \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi\}]$$

となる (正規順序化を施した). ここに場の Fourier 展開 (3.26): を代入すると, まず第 1 項は

$$\begin{aligned}
& \int d^3x N[\dot{\phi} \partial^\alpha \phi^\dagger] \\
&= \int d^3x \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \frac{1}{2V(\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'})^{1/2}} (-i\omega_{\mathbf{k}})(-ik'^\alpha) N[\{a(\mathbf{k})e^{-ik \cdot x} - b^\dagger(\mathbf{k})e^{ik \cdot x}\} \{b(\mathbf{k}')e^{-ik' \cdot x} - a^\dagger(\mathbf{k}')e^{ik' \cdot x}\}] \\
&= \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \frac{1}{2} \left( \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{\omega_{\mathbf{k}'}} \right)^{1/2} k'^\alpha \\
& \quad \times \int \frac{d^3x}{V} \{-a(\mathbf{k})b(\mathbf{k}')e^{-i(k+k') \cdot x} + a^\dagger(\mathbf{k}')a(\mathbf{k})e^{-i(k-k') \cdot x} + b^\dagger(\mathbf{k})b(\mathbf{k}')e^{i(k-k') \cdot x} - b^\dagger(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{k}')e^{i(k+k') \cdot x}\}
\end{aligned}$$

と書き換えられる. ここで  $x \equiv (t, \mathbf{x})$  と書き,

$$\int \frac{d^3x}{V} e^{\mp i(k+k') \cdot x} = e^{\mp i(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}'})t} \delta_{\mathbf{k}, -\mathbf{k}'}, \quad \int \frac{d^3x}{V} e^{\mp i(k-k') \cdot x} = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$$

を用いて空間積分を実行し, 次いで  $\mathbf{k}'$  についての和をとると

$$\int d^3x N[\dot{\phi} \partial^\alpha \phi^\dagger] = \sum_{\mathbf{k}} \left[ \left( \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{\mathbf{k}} \right) \frac{1}{2} \{N_a(\mathbf{k}) + N_b(\mathbf{k})\} - \left( \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{-\mathbf{k}} \right) \frac{1}{2} (\dots) \right]$$

が得られる. ここに

$$(\dots) \equiv a(\mathbf{k})b(-\mathbf{k})e^{-2i\omega_{\mathbf{k}}t} + b^\dagger(\mathbf{k})a^\dagger(-\mathbf{k})e^{2i\omega_{\mathbf{k}}t} (= (\dots)^\dagger)$$

は生成演算子同士, および消滅演算子同士の積の項である (以下, 同じ). 同様の計算により

$$\begin{aligned}
\int d^3x N[(\partial_\beta \phi^\dagger)(\partial^\beta \phi)] &= \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \frac{k_\beta k'^\beta}{2(\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'})^{1/2}} \int \frac{d^3x}{V} \{-a(\mathbf{k})b(\mathbf{k}')e^{-i(k+k') \cdot x} + a^\dagger(\mathbf{k}')a(\mathbf{k})e^{-i(k-k') \cdot x} \\
& \quad + b^\dagger(\mathbf{k})b(\mathbf{k}')e^{i(k-k') \cdot x} - b^\dagger(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{k}')e^{i(k+k') \cdot x}\} \\
&= \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}} \left[ m^2 (N_a(\mathbf{k}) + N_b(\mathbf{k})) - \frac{\omega_{\mathbf{k}}^2 + \mathbf{k}^2}{2} (\dots) \right], \quad (\because k^2 = m^2) \\
\int d^3x N[m^2 \phi^\dagger \phi] &= \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \frac{m^2}{2(\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'})^{1/2}} \int \frac{d^3x}{V} \{a(\mathbf{k})b(\mathbf{k}')e^{-i(k+k') \cdot x} + a^\dagger(\mathbf{k}')a(\mathbf{k})e^{-i(k-k') \cdot x} \\
& \quad + b^\dagger(\mathbf{k})b(\mathbf{k}')e^{i(k-k') \cdot x} + b^\dagger(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{k}')e^{i(k+k') \cdot x}\} \\
&= \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}} \left[ m^2 (N_a(\mathbf{k}) + N_b(\mathbf{k})) + \frac{m^2}{2} (\dots) \right], \\
\therefore \int d^3x (g^{0\alpha}) \{(\partial_\beta \phi^\dagger)(\partial^\beta \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi\} &= g^{0\alpha} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\omega_{\mathbf{k}}^2 + \mathbf{k}^2 + m^2}{2\omega_{\mathbf{k}}} (\dots)
\end{aligned}$$

である.

以上よりハミルトニアンと運動量演算子はそれぞれ

$$\begin{aligned}
 H = P^0 &= \sum_{\mathbf{k}} \left\{ \omega_{\mathbf{k}} (N_a(\mathbf{k}) + N_b(\mathbf{k})) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\mathbf{k}^2 + m^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2}{2\omega_{\mathbf{k}}} (\dots) \right\} \\
 &= \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} (N_a(\mathbf{k}) + N_b(\mathbf{k})), \\
 \mathbf{P} &= \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \left\{ (N_a(\mathbf{k}) + N_b(\mathbf{k})) + \frac{1}{2} (\dots) \right\} \\
 &= \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} (N_a(\mathbf{k}) + N_b(\mathbf{k}))
 \end{aligned}$$

と計算される。これらはまとめて式 (3.30) のように表される。

■電荷の式 (3.31), 4 元電流密度の式 (3.32) について カレントの式 (p.38, 1.2)

$$f^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \phi_r)} \delta \phi_r$$

において

$$\delta \phi = i\varepsilon \phi, \quad \delta \phi^\dagger = -i\varepsilon \phi^\dagger$$

であり, 電荷  $Q$  の一般式 (47) を得る際の置き換え  $i\varepsilon \rightarrow -iq/\hbar$  を行う。(Dirac 場に対するカレント (4.28) も同様。)

カレント (3.32) が「連続の方程式を満たすことは明らかである」(p.51, 下から 2 行目) について, 確かに Klein-Gordon 方程式 (3.23) の下で

$$\partial_\alpha s^\alpha = -iqN [(\partial_\alpha \partial^\alpha \phi^\dagger)\phi - (\partial_\alpha \partial^\alpha \phi)\phi^\dagger] = iqN [(m^2 \phi^\dagger)\phi - (m^2 \phi)\phi^\dagger] = 0$$

となる。

■電荷の式 (3.34) について 電荷の式 (3.31):  $Q = -iq \int d^3x N [\dot{\phi}^\dagger \phi - \dot{\phi} \phi^\dagger]$  において

$$\begin{aligned}
 \int d^3x N [\dot{\phi} \phi^\dagger] &= \int d^3x \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \frac{1}{2V(\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'})^{1/2}} (-i\omega_{\mathbf{k}}) N [(a(\mathbf{k})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} - b^\dagger(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}})(b(\mathbf{k}')e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}} + a^\dagger(\mathbf{k}')e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}})] \\
 &= \frac{i}{2} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \left( \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{\omega_{\mathbf{k}'}} \right)^{1/2} \int \frac{d^3x}{V} \{ -a(\mathbf{k})b(\mathbf{k}')e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} - a^\dagger(\mathbf{k}')a(\mathbf{k})e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} \\
 &\quad + b^\dagger(\mathbf{k})b(\mathbf{k}')e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} + b^\dagger(\mathbf{k})b^\dagger(\mathbf{k}')e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} \} \\
 &= \frac{i}{2} \sum_{\mathbf{k}} \{ -a(\mathbf{k})b(-\mathbf{k})e^{-2i\omega_{\mathbf{k}}t} - a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) + b^\dagger(\mathbf{k})b(\mathbf{k}) + b^\dagger(\mathbf{k})a^\dagger(-\mathbf{k})e^{2i\omega_{\mathbf{k}}t} \}
 \end{aligned}$$

である。また  $\int d^3x N [\dot{\phi}^\dagger \phi]$  は上式で  $a$  と  $b$  を入れ替えた式で与えられるので, 式 (3.34):

$$Q = q \sum_{\mathbf{k}} [N_a(\mathbf{k}) - N_b(\mathbf{k})]$$

を得る。

### 3.3 共変な交換関係

実 Klein-Gordon 場  $\phi$  を考えよう。微視的因果律によれば信号は光速を超えられないから、空間的に隔たる任意の 2 つの時空点  $x, y$  における場  $\phi(x), \phi(y)$  の観測は互いに干渉を及ぼさない (不確定性関係を持たない)。この条件は

$$[\phi(x), \phi(y)] = 0, \quad \text{for } (x - y)^2 < 0 \quad (64)$$

と表される。ところで空間的に隔たった時空点  $x, y$  が同時刻となるような座標系を見出すことは常に可能であり、そのような座標系で上式 (64) は正準交換関係

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, t)] = 0$$

として満たされている。しかるにスカラー場の交換子  $[\phi(x), \phi(y)]$  はスカラーだから、任意の座標系で上式 (64) が成り立つことになる。

次に交換子  $[\phi(x), \phi(y)]$  を具体的に評価しよう。場の Fourier 展開 (55) と調和振動子の交換関係 (58) を利用すると、

$$[\phi^+(x), \phi^-(y)] = i\Delta^+(x - y), \quad (65)$$

$$[\phi^-(x), \phi^+(y)] = i\Delta^-(x - y), \quad (66)$$

$$[\phi(x), \phi(y)] = i\Delta(x - y) \quad (67)$$

を得る (導出は下記)。ただし ( $V \rightarrow \infty$  の極限を想定して書くと)、

$$\Delta^+(x) \equiv -\frac{i}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \omega_{\mathbf{k}}} e^{-ik \cdot x}, \quad (68)$$

$$\Delta^-(x) \equiv -\Delta^+(-x) = \frac{i}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \omega_{\mathbf{k}}} e^{ik \cdot x}, \quad (69)$$

$$\Delta(x) \equiv \Delta^+(x) + \Delta^-(x) = -\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \omega_{\mathbf{k}}} \sin(k \cdot x) \quad (70)$$

である。

$$i\Delta(x - y) = [\phi(x), \phi(y)] = -[\phi(y), \phi(x)] = -i\Delta(y - x)$$

の関係から期待されるように、式 (70) の  $\Delta(x)$  は奇関数となっていることが見て取れる。また同時刻交換関係  $[\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, t)] = 0$  から期待されるように、 $x^0 = 0$  に対して式 (70) の被積分関数は  $\mathbf{k}$  の奇関数となり、 $\Delta(x)$  はゼロになる。さらに  $\Delta^\pm(x)$  は、したがって  $\Delta(x)$  は Klein-Gordon 方程式

$$(\square_x + m^2)\Delta^\pm(x - y) = 0, \quad (\square_x + m^2)\Delta(x - y) = 0 \quad (71)$$

を満たす<sup>\*15</sup>。

<sup>\*15</sup>  $e^{\mp ik \cdot (x-y)}$  が Klein-Gordon 方程式の基本解であることによる。

$$(\square_x + m^2)\Delta^\pm(x - y) = \frac{\mp i}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \omega_{\mathbf{k}}} (\square_x + m^2)e^{\mp ik \cdot (x-y)} = 0.$$

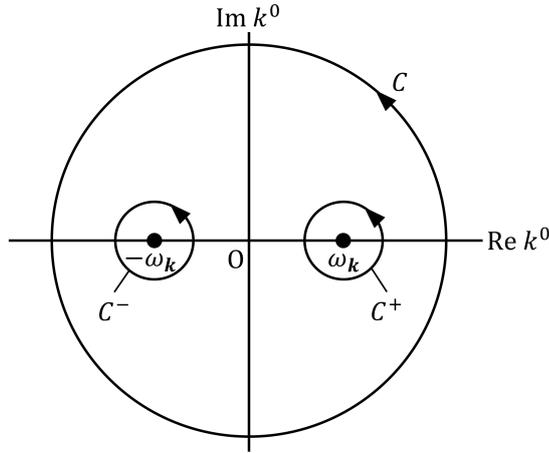


図7 関数  $\Delta^\pm(x), \Delta(x)$  を複素  $k_0$  平面上の積分で表すときの積分路

交換関係 (67) の共変性は、左辺の交換子  $[\phi(x), \phi(y)]$  がスカラーなので、右辺の  $\Delta$  関数もまたスカラーであれば保証される。ところが  $\Delta$  関数の式 (70) は、 $[k^0$  を  $\mathbf{k}$  と独立な変数として]

$$\Delta(x) = \frac{-i}{(2\pi)^3} \int d^4k \delta(k^2 - m^2) \varepsilon(k_0) e^{-ik \cdot x} \quad (72)$$

と書き直すことができる (導出は下記)。ここに

$$\varepsilon(k_0) \equiv \frac{k_0}{|k_0|} = \begin{cases} +1 & (k_0 > 0 \text{ に対して}) \\ -1 & (k_0 < 0 \text{ に対して}) \end{cases}$$

である。固有 Lorentz 変換 [本義 Lorentz 変換] (空間反転や時間反転を含まない Lorentz 変換) では過去と未来が入れ替わらないので、符号  $\varepsilon(k_0)$  は不変である。よって [体積要素  $d^4k$ , 4 元内積  $k^2 - m^2$ ,  $k \cdot x$  が不変量であることを考え合わせると,] 式 (72) の  $\Delta$  関数は Lorentz スカラーとなっていることが明白である。

最後に、 $\Delta$  関数は図 7 のような複素  $k^0$  平面上の閉路  $C^\pm, C$  に沿う積分

$$\Delta^\pm(x) = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int_{C^\pm} \frac{d^4k e^{-ik \cdot x}}{k^2 - m^2}, \quad \Delta(x) = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int_C \frac{d^4k e^{-ik \cdot x}}{k^2 - m^2} \quad (73)$$

として表現できる [証明は本稿次節]。

### 3.3 節, 式の導出など

教科書の説明を多少, 補足しつつ式の導出を行う。

■実 Klein-Gordon 場の交換関係 (65),(66),(67) の導出 場の Fourier 展開 (55) と調和振動子の交換関係 (58) を利用すると,

$$\begin{aligned} [\phi^+(x), \phi^-(y)] &= \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \frac{1}{2V(\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'})^{1/2}} [a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] e^{-ik \cdot x + ik' \cdot y} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \omega_{\mathbf{k}}} e^{-ik \cdot (x-y)} \\ &= i\Delta^+(x-y) : (65) \end{aligned}$$

を得る。ただし第2の等号では  $V \rightarrow \infty$  の極限を想定して、 $\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$  とした。

式 (66) は

$$[\phi^-(x), \phi^+(y)] = -[\phi^+(y), \phi^-(x)] = -i\Delta^+(y-x) \equiv i\Delta^-(x-y)$$

による。

さらに式 (67) は、 $[\phi^+(x), \phi^+(y)] = [\phi^-(x), \phi^-(y)] = 0$  に注意すると

$$[\phi(x), \phi(y)] = [\phi^+(x), \phi^-(y)] + [\phi^-(x), \phi^+(y)] = i\Delta^+(x-y) + i\Delta^-(x-y) = i\Delta(x-y)$$

と確かめられる。

■  $\Delta$  関数の Lorentz 不変性が明白な表式 (72) の導出

$$\delta(k^2 - m^2) = \delta(k_0^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2) = \delta[(k_0 - \omega_{\mathbf{k}})(k_0 + \omega_{\mathbf{k}})] = \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}} \delta(k_0 - \omega_{\mathbf{k}}) + \frac{1}{|-2\omega_{\mathbf{k}}|} \delta(k_0 + \omega_{\mathbf{k}})$$

を用いると、

$$\begin{aligned} & \frac{-i}{(2\pi)^3} \int d^4k \delta(k^2 - m^2) \varepsilon(k_0) e^{-ik \cdot x} \\ &= -i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int dk_0 \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}} \{ \delta(k_0 - \omega_{\mathbf{k}}) + \delta(k_0 + \omega_{\mathbf{k}}) \} \varepsilon(k_0) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - k_0 t)} \\ &= -\frac{i}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \omega_{\mathbf{k}}} (e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}} t)} - e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \omega_{\mathbf{k}} t)}) \\ &= \frac{1}{2i} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \omega_{\mathbf{k}}} (e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}} t)} - e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}} t)}) \quad (\text{第2項で } \mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k} \text{ と置換した}) \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \omega_{\mathbf{k}}} \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}} t) \\ &= - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \omega_{\mathbf{k}}} \sin(k \cdot x) \quad (\text{ここでは } k_0 \equiv \omega_{\mathbf{k}}) \\ &= \Delta(x) \end{aligned}$$

となる。

### 3.3 について

■  $\Delta$  関数を複素  $k_0$  平面上的閉路積分で表した式 (73) の導出 図7に示した複素  $k_0$  平面上的閉路  $C^\pm, C$  に対して、式 (73) の積分

$$\frac{-1}{(2\pi)^4} \int_{C^\pm, C} \frac{d^4k e^{-ik \cdot x}}{k^2 - m^2} = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int d^3k e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \int_{C^\pm, C} dk_0 \frac{e^{-ik_0 t}}{(k_0 - \omega_{\mathbf{k}})(k_0 + \omega_{\mathbf{k}})}$$

を考える。右辺における複素変数  $k_0$  の関数

$$\frac{e^{-ik_0 t}}{(k_0 - \omega_{\mathbf{k}})(k_0 + \omega_{\mathbf{k}})}$$

に対して、留数は

$$\text{Res}[\pm\omega_{\mathbf{k}}] = \pm \frac{e^{\mp i\omega_{\mathbf{k}} t}}{2\omega_{\mathbf{k}}}$$

と計算される。よって

$$\begin{aligned}
\frac{-1}{(2\pi)^4} \int_{C^\pm} \frac{d^4 k e^{-ik \cdot x}}{k^2 - m^2} &= -i \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{ik \cdot x} \text{Res}[\pm \omega_{\mathbf{k}}] \\
&= \mp \frac{i}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 \omega_{\mathbf{k}}} e^{\pm i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}} t)} \\
&\quad (\text{複号の下側では変数変換 } \mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k} \text{ を利用した)} \\
&= \Delta^\pm(x), \\
\therefore \frac{-1}{(2\pi)^4} \int_C \frac{d^4 k e^{-ik \cdot x}}{k^2 - m^2} &= -i \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{ik \cdot x} (\text{Res}[\omega_{\mathbf{k}}] + \text{Res}[-\omega_{\mathbf{k}}]) \\
&= \Delta^+(x) + \Delta^-(x) \\
&= \Delta(x)
\end{aligned}$$

を得る。

■複素 Klein-Gordon 場の交換関係 展開係数の交換関係 (3.27) により,  $[\phi(x), \phi(y)] = 0$  である。

もう 1 つの非自明な交換子は  $[\phi(x), \phi^\dagger(y)]$  である。複素 Klein-Gordon 場の展開 (3.26) を用いると

$$\begin{aligned}
[\phi^+(x), \phi^{\dagger-}(y)] &= \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \frac{1}{2V(\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'})^{1/2}} [a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] e^{-ik \cdot x + ik' \cdot y}, \\
[\phi^-(x), \phi^{\dagger+}(y)] &= \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \frac{1}{2V(\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'})^{1/2}} [b^\dagger(\mathbf{k}), b(\mathbf{k}')] e^{ik \cdot x - ik' \cdot y}
\end{aligned}$$

であり, これを実場に対する式 (3.38) と比べると

$$[\phi^+(x), \phi^{\dagger-}(y)] = i\Delta^+(x-y), \quad [\phi^-(x), \phi^{\dagger+}(y)] = -i\Delta^+(y-x) = i\Delta^-(x-y) \quad (74)$$

が見出される。よって式 (68), (69), (70) で定義した関数  $\Delta^\pm(x), \Delta(x)$  を用いて,

$$[\phi(x), \phi^\dagger(y)] = [\phi^+(x), \phi^{\dagger-}(y)] + [\phi^-(x), \phi^{\dagger+}(y)] = i(\Delta^+(x-y) + \Delta^-(x-y)) = i\Delta(x-y)$$

と表される。これは両辺がスカラーだから, 共変な交換関係となっている。

### 3.4 中間子の伝播関数

本節では実 Klein-Gordon 場を対象として, 共変な摂動論の体系的な展開のために重要となる Feynman の  $\Delta_F$  関数を導入する。

まず 2 つのボゾン場  $A(x), B(x)$  に対して, 時間順序化積 (T 積) を

$$\begin{aligned}
\text{T}\{A(x)B(x')\} &\equiv \begin{cases} A(x)B(x') & (t > t' \text{ のとき}) \\ B(x')A(x) & (t < t' \text{ のとき}) \end{cases} \\
&= \theta(t-t')A(x)B(x') + \theta(t'-t)B(x')A(x)
\end{aligned}$$

で定義する。ただし  $t \equiv x^0, t' \equiv x'^0$  であり,

$$\theta(t) \equiv \begin{cases} 1 & (t > 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (t < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

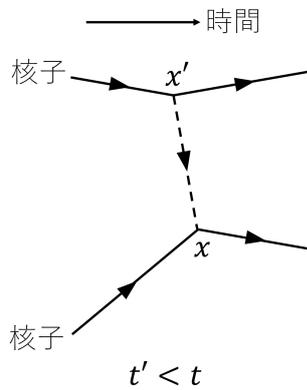


図8 核子-核子散乱に対する 1-中間子交換からの寄与

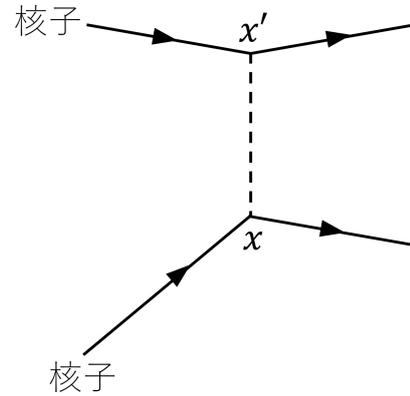
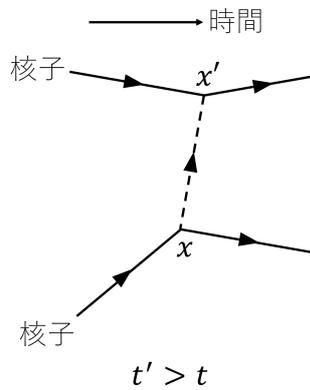


図9 1-中間子交換による核子-核子散乱を表す Feynman グラフ

は段差関数 (階段関数) である。T 積は引数の時刻の順序が右から左の順序になるように演算子が並び替えられ、より早い時刻の演算子が先に状態ベクトルに作用する形となっている。

さて、 $\Delta_F$  関数を実 Klein-Gordon 場同士の T 積の真空期待値

$$i\Delta_F(x-x') \equiv \langle 0 | T \{ \phi(x) \phi(x') \} | 0 \rangle = \begin{cases} \langle 0 | \phi(x) \phi(x') | 0 \rangle & (t > t' \text{ のとき}) \\ \langle 0 | \phi(x') \phi(x) | 0 \rangle & (t < t' \text{ のとき}) \end{cases}$$

によって定義する。Klein-Gordon 場は中間子を記述し、左辺の  $\Delta_F$  もしくは右辺の真空期待値は、“中間子の Klein-Gordon 場に関する Feynman 伝播関数” (あるいは単に“中間子の伝播関数”) と呼ばれる。その意味は次のように解釈される [本稿次節で考察]。

- $t > t'$  の場合の伝播関数  $\langle 0 | \phi(x') \phi(x) | 0 \rangle$   
中間子が時空点  $x'$  において生成され、 $x$  まで伝播して消滅する過程を表す。
- $t < t'$  の場合の伝播関数  $\langle 0 | \phi(x) \phi(x') | 0 \rangle$   
中間子が時空点  $x$  において生成され、 $x'$  まで伝播して消滅する過程を表す。

そのような過程として、具体的には核子-核子散乱における核子間での (仮想) 中間子の交換が考えられる (図8 参照)。

中間子の放出と吸収が起こる 2 つの時空点  $x, x'$  が空間的に隔たっている場合 ( $(x-x')^2 < 0$ ),

- 時刻  $t, t'$  の前後は座標系に依存する。そこで図8の2つのグラフをまとめて図9のような単一の Feynman グラフで表し、中間子線から伝播方向を表す矢印を取り除く。
- 素朴に解釈すると、中間子が光速を超える速さで2点間を伝播することになる。実際には点  $x$  (または  $x'$ ) を発した中間子が一度消滅し、再度別の時空点に生成してから点  $x'$  (または  $x$ ) に伝播する量子力学的過程が、確率的に起こっていると解釈しなければならない。

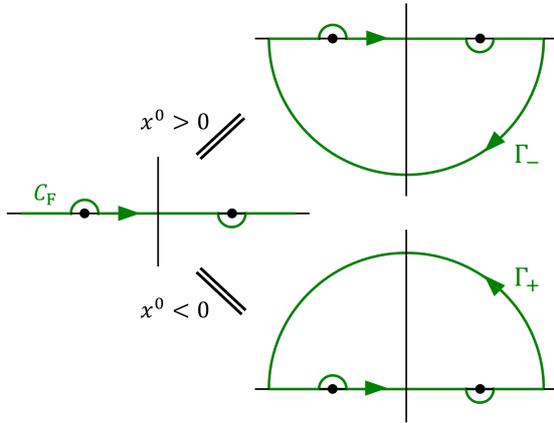


図10 伝播関数  $\Delta_F(x)$  を複素  $k_0$  平面上の積分で表すときの積分路  $C_F$

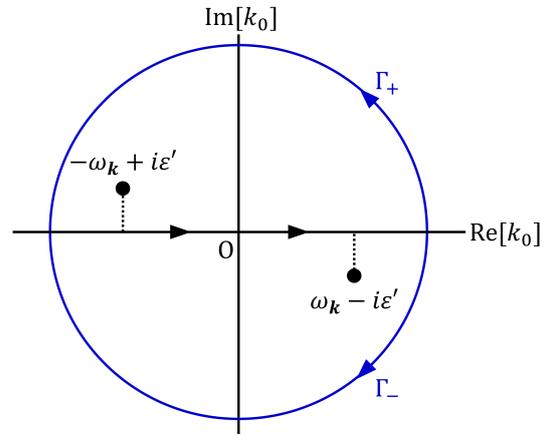


図11 複素  $k_0$  平面上の極  $k_0 = \pm\omega_k \mp i\varepsilon'$  と半円  $\Gamma_{\pm}$

式 (65), (66) より,  $\Delta_F$  関数は

$$\begin{aligned}
 i\Delta_F(x-x') &= \begin{cases} \langle 0|\phi(x)\phi(x')|0\rangle = \langle 0|\phi^+(x)\phi^-(x')|0\rangle = \langle 0|[\phi^+(x), \phi^-(x')]|0\rangle & (t > t' \text{ のとき}) \\ \langle 0|\phi(x')\phi(x)|0\rangle = \langle 0|\phi^+(x')\phi^-(x)|0\rangle = \langle 0|[\phi^+(x'), \phi^-(x)]|0\rangle & (t < t' \text{ のとき}) \end{cases} \\
 &= \pm \Delta^{\pm}(x-x') \quad (t \geq t' \text{ のとき}) \\
 &= \theta(t-t')\Delta^+(x-x') - \theta(t'-t)\Delta^-(x-x')
 \end{aligned}$$

と表すこともできる. [ここから  $\Delta_F$  が確かに差  $x-x'$  の関数であることが読み取れる.]

Feynman 伝播関数は式 (73) と同様の, 波数 (運動量) 空間における積分 (Fourier 展開)

$$\Delta_F(x) = \int_{C_F} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot x}}{k^2 - m^2} \quad (75)$$

与えられる [導出は下記]. ただし複素  $k_0$  平面上の積分路として, 図10のように極  $k_0 = \pm\omega_k$  をよける径路  $C_F$  をとる.

代わりに

$$\Delta_F(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot x}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad (76)$$

と書いて,  $k^0$  に関する積分を実軸に沿って行っても良い. ただし  $\varepsilon$  は微小な正数であり, 積分 (76) を実行した後でゼロとおくものとする. この措置は図11のように極を実軸からずらすことにある [説明は下記].

最後に, 複素スカラー場で表される荷電中間子の伝播関数は

$$\langle 0|\mathcal{T}\{\phi(x)\phi^\dagger(x')\}|0\rangle = i\Delta_F(x-x') \quad (77)$$

与えられる [問題 3.4].

### 3.4 節, 式の導出

教科書の説明を多少, 補足しつつ式の導出を行う.

■  $\Delta_F$  関数の Fourier 展開 (75), (76) の導出 式 (75) の積分

$$\int_{C_F} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot x}}{k^2 - m^2} = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{ik \cdot x} \int_{C_F} \frac{dk_0}{2\pi} \frac{e^{-ik_0 x^0}}{k_0^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2}$$

を考える.  $x^0 \geq 0$  のとき, 図 10 に示した無限大の半径を持つ半円  $\Gamma_{\mp}$  に沿う時計回りの積分がゼロとなるから,  $\Gamma_{\mp}$  を積分路に付け足して

$$\int_{C_F} \frac{dk_0}{2\pi} \frac{e^{-ik_0 x^0}}{k_0^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2} = \oint_{C_F + \Gamma_{\mp}} \frac{dk_0}{2\pi} \frac{e^{-ik_0 x^0}}{k_0^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2} = \mp i \text{Res}[\pm \omega_{\mathbf{k}}]$$

と評価できる. ただし最右辺の  $\text{Res}[\pm \omega_{\mathbf{k}}]$  は被積分関数  $\frac{e^{-ik_0 x^0}}{k_0^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2}$  に対する留数であり, 前の係数  $\mp$  における上側の負号は積分が時計回りに行われていることに起因する. これを式 (73) の導出過程で見出した関係

$$\Delta^{\pm}(x) = -i \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{ik \cdot x} \text{Res}[\pm \omega_{\mathbf{k}}]$$

と比較すると,

$$\begin{aligned} \int_{C_F} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot x}}{k^2 - m^2} &= \pm \Delta^{\pm}(x) \quad (x^0 \geq 0) \\ &= \Delta_F(x) : (75) \end{aligned}$$

を得る.

次に式 (76) における複素  $k_0$  平面上の実軸に沿う積分

$$\int \frac{dk_0}{2\pi} \frac{e^{-ik_0 x^0}}{k_0^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2 + i\varepsilon}$$

を考えると, これは図 11 のように

$$k_0 = \pm \sqrt{\omega_{\mathbf{k}}^2 - i\varepsilon} = \pm \omega_{\mathbf{k}} \mp i\varepsilon'$$

を極を持つ ( $\varepsilon' = \varepsilon/2\omega_{\mathbf{k}}$  は微小な正数).  $x^0 \geq 0$  のとき図 11 に示した無限大の半径を持つ半円  $\Gamma_{\mp}$  に沿う時計回りの積分がゼロとなるから,  $\Gamma_{\mp}$  を積分路に付け足して

$$\int \frac{dk_0}{2\pi} \frac{e^{-ik_0 x^0}}{k_0^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2 + i\varepsilon} = \oint \frac{dk_0}{2\pi} \frac{e^{-ik_0 x^0}}{k_0^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2 + i\varepsilon} = \mp i \text{Res}[\pm \omega_{\mathbf{k}} \mp i\varepsilon']$$

と評価できる. よって最後に  $\varepsilon$  を, したがって  $\varepsilon'$  をゼロとおくと, 再び

$$\int \frac{dk_0}{2\pi} \frac{e^{-ik_0 x^0}}{k_0^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2 + i\varepsilon} = \mp i \text{Res}[\pm \omega_{\mathbf{k}}] \quad (t \equiv x^0 \geq 0)$$

となるから, 式 (76) の積分は  $\Delta_F$  の式 (75) と同じ結果を与える.

### 3.4 について

■Feynman 伝播関数の解釈 (式 (13.56b) の下 5 行) について 例えば  $t < t'$  の場合の Feynman 伝播関数は

$$\langle 0|\phi(x')\phi(x)|0\rangle = (\langle 0|\phi^+(x')) \cdot (\phi^-(x)|0\rangle)$$

と見ることができる。ここで

$$\phi(x)|0\rangle = \phi^-(x)|0\rangle = \sum_{\mathbf{k}} \left( \frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} e^{i(\omega_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} |\mathbf{k}\rangle$$

は 1 粒子状態  $|\mathbf{k}\rangle \equiv a^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle$  の重ね合せとなっており、非相対論的な量子力学における Heisenberg 描像の基底ケット

$$|\mathbf{x}, t\rangle = e^{iHt} \left( \sum_{\mathbf{k}} |\mathbf{k}\rangle \langle \mathbf{k}| \right) \cdot |\mathbf{x}\rangle \sim \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} |\mathbf{k}\rangle$$

との類似性より、これは粒子が時刻  $t$  に位置  $\mathbf{x}$  に局在している状態と解釈できる。

■「仮想中間子」(p.57 下から 3 行目) について 図 9 の Feynman ダイアグラムを例にとって述べると、時空点  $x$  または  $x'$  では、一方の核子 (質量を  $M$  とする) から核子と中間子が生成される。ここで始状態の核子はその静止系ではエネルギー  $M$  を持つ。ところが中間子を運動量  $p$  が  $p^2 = m^2$  を満たす (質量殻に乗る) 物理的な粒子と仮定する限り、崩壊により核子と中間子を生じるには、エネルギー保存則より始状態の核子はそれらの静止エネルギーの和  $m + M$  以上のエネルギーを持たなければならない。これは核子間を伝播する中間子が決して物理的な粒子ではあり得ないことを意味する。このように一般には、中間状態の粒子が物理的な粒子であること (質量殻上に乗っていること) は期待できない [9, p.598].

■参考——湯川ポテンシャル [5, pp.10-12] 場の源 (密度  $\rho$ ) を導入した中性スカラー場  $\phi$  のラグランジアン密度

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 - \rho\phi$$

を考えると、場の方程式は

$$\square\phi + \mu^2\phi = -\rho$$

に修正される。原点に定在的な源がある場合の静的な解  $\phi(\mathbf{x})$  に対する方程式は

$$(\nabla^2 - \mu^2)\phi = G\delta^{(3)}(\mathbf{x})$$

となる。ここに  $G$  は結合定数であり、静電気学における電荷  $e$  に相当する。上式の解は Helmholtz 方程式の Green 関数 (の  $G$  倍) であり、球面波の形

$$\phi(\mathbf{x}) = -\frac{G}{4\pi} \frac{e^{-\mu r}}{r} \quad (r \equiv |\mathbf{x}|)$$

をとる (Fourier 変換を利用して証明できる)。湯川は核子を源  $\rho$  として、核子間の核力を媒介する“中間子場”  $\phi(\mathbf{x})$  を考えた。位置  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  にある 2 つの核子間の相互作用エネルギー (湯川ポテンシャル) は

$$-\frac{G^2}{4\pi} \frac{e^{-\mu|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|}}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|}$$

である ( $H_I = \int (-\mathcal{L}_I) d^3x = \int \phi \rho d^3x$  として計算). したがって核力は常に引力であり, 力が及ぶのは

$$|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1| \lesssim \frac{1}{\mu} [= (\text{Compton 波長})]$$

の短距離に限られる.

## 練習問題 (第 3 章)

### 3.1

実 Klein-Gordon 場の正準交換関係 (54) から, 展開係数に対する交換関係 (58) を導くこと.

■展開係数を場で表す

$$\mathbf{k} \equiv (\omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}), \quad \omega_{\mathbf{k}} \equiv \sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2}, \quad f \overleftrightarrow{\partial}_\mu g \equiv f \partial_\mu g - (\partial_\mu f) g$$

に対して,

$$\begin{aligned} a(\mathbf{k}) &= \frac{i}{(2V\omega_{\mathbf{k}})^{1/2}} \int d^3x e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x) \\ &= \frac{i}{(2V\omega_{\mathbf{k}})^{1/2}} \int d^3x e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \{\dot{\phi}(x) - i\omega_{\mathbf{k}}\phi(x)\}, \end{aligned} \quad (78)$$

$$\begin{aligned} a^\dagger(\mathbf{k}) &= \frac{-i}{(2V\omega_{\mathbf{k}})^{1/2}} \int d^3x e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x) \\ &= \frac{-i}{(2V\omega_{\mathbf{k}})^{1/2}} \int d^3x e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \{\dot{\phi}(x) + i\omega_{\mathbf{k}}\phi(x)\} \end{aligned} \quad (79)$$

と書ける.

実際, 例えば式 (78) は次のように確かめられる. まず一辺  $L$ , 体積  $V = L^3$  の立方体領域に関する周期境界条件の下で許される波数ベクトル  $\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L}(\mathbf{n}$  は整数を成分に持つベクトル) に対して,  $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}/\sqrt{V}$  の規格直交性

$$\int \frac{d^3x}{V} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \quad (80)$$

が成り立つことに注意する. すると式 (78) において

$$\begin{aligned} & \int d^3x e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x) \\ &= \int d^3x e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \{\dot{\phi}(x) - i\omega_{\mathbf{k}}\phi(x)\} \\ &= \int d^3x e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \sum_{\mathbf{k}'} \left( \frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}'}} \right)^{1/2} \\ & \times \left[ a(\mathbf{k}')(-i\omega_{\mathbf{k}'})e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}} + a^\dagger(\mathbf{k}') (i\omega_{\mathbf{k}'})e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}} - i\omega_{\mathbf{k}} \left\{ a(\mathbf{k}')e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}} + a^\dagger(\mathbf{k}')e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}} \right\} \right] \\ & \left( \because \text{式 (55)} : \phi(x) = \sum_{\mathbf{k}} \left( \frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} \left\{ a(\mathbf{k})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + a^\dagger(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right\} \right) \\ &= \int d^3x e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \sum_{\mathbf{k}'} \left( \frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}'}} \right)^{1/2} \left\{ -ia(\mathbf{k}')(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}'})e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} + ia^\dagger(\mathbf{k}')(-\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}'})e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\mathbf{k}'} \left( \frac{V}{2\omega_{\mathbf{k}'}} \right)^{1/2} \left\{ -ia(\mathbf{k}')(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}'})\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} e^{i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'})t} + ia^\dagger(\mathbf{k}')(-\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}'})\delta_{\mathbf{k},-\mathbf{k}'} e^{i(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}'})t} \right\} \\
&\quad (\because \text{式 (80)}, t \equiv x^0) \\
&= \left( \frac{V}{2\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} \{-ia(\mathbf{k})\} 2\omega_{\mathbf{k}} \\
&= -i(2V\omega_{\mathbf{k}})^{1/2} a(\mathbf{k})
\end{aligned}$$

なので, 式 (78):

$$a(\mathbf{k}) = \frac{i}{(2V\omega_{\mathbf{k}})^{1/2}} \int d^3x e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x)$$

を得る. 同様に式 (78) の Hermite 共役をとった式 (79) が成り立つことを確かめられる.

ところで展開係数  $a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k})$  の表式 (78),(79) は見掛け上, 時刻  $x^0$  に依る. そこでこれらが実際には時刻  $x^0$  に依らないことを確かめておこう.  $a(\mathbf{k})$  の式 (78) の時刻  $x^0$  による微分

$$\partial_0 \left[ \frac{i}{(2V\omega_{\mathbf{k}})^{1/2}} \int d^3x e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x) \right] = \frac{i}{(2V\omega_{\mathbf{k}})^{1/2}} \int d^3x \partial_0 \left[ e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \left\{ \dot{\phi}(x) - i\omega_{\mathbf{k}}\phi(x) \right\} \right]$$

において, 場  $\phi(x)$  が Klein-Gordon 方程式 (52):

$$(\square + m^2)\phi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{\phi} = (\nabla^2 - m^2)\phi$$

を満たすことを用いると

$$\begin{aligned}
&\int d^3x \partial_0 \left\{ e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \left( \dot{\phi} - i\omega_{\mathbf{k}}\phi \right) \right\} \\
&= \int d^3x e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \left\{ i\omega_{\mathbf{k}}(\dot{\phi} - i\omega_{\mathbf{k}}\phi) + (\ddot{\phi} - i\omega_{\mathbf{k}}\dot{\phi}) \right\} \\
&= \int d^3x e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} (\ddot{\phi} + \omega_{\mathbf{k}}^2\phi) \\
&= \int d^3x e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} (\nabla^2 + \mathbf{k}^2)\phi \\
&= \int d^3x e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \{(-i\mathbf{k})^2 + \mathbf{k}^2\}\phi \quad (\text{部分積分した}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

なので,  $a(\mathbf{k})$  の式 (78) は時刻  $x^0$  に依らない. 同様に  $a^\dagger(\mathbf{k})$  の式 (79) が時刻  $x^0$  に依らないことも確かめられる.

■展開係数の交換関係 (58) の導出 さて, 展開係数を場で表した式 (78),(79) を用いて, 場の正準交換関係 (54) から展開係数に対する交換関係 (58) を導こう. 式 (78),(79) は右辺が時刻  $x^0$  に依らないから, これらを用いて得られる

$$[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = \frac{1}{2V(\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'})^{1/2}} \int d^3x d^3x' e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}')} [\dot{\phi}(x) - i\omega_{\mathbf{k}}\phi(x), \dot{\phi}(x') + i\omega_{\mathbf{k}'}\phi(x')]$$

の右辺は時刻  $x^0, x'^0$  に依らない。そこでこれを同時刻  $x^0 = x'^0 \equiv t$  で評価すると

$$\begin{aligned} & [\dot{\phi}(x) - i\omega_{\mathbf{k}}\phi(x), \dot{\phi}(x') + i\omega_{\mathbf{k}'}\phi(x')] \\ &= [\dot{\phi}(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}(\mathbf{x}', t)] + i\omega_{\mathbf{k}'}[\dot{\phi}(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{x}', t)] - i\omega_{\mathbf{k}}[\phi(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}(\mathbf{x}', t)] + (-i\omega_{\mathbf{k}})(i\omega_{\mathbf{k}'})[\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{x}', t)] \\ &= (\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}'})\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ & (\because \text{同時刻交換関係 (54)} : [\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{x}', t)] = 0, \quad [\dot{\phi}(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}(\mathbf{x}', t)] = 0, \quad [\phi(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}(\mathbf{x}', t)] = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')) \end{aligned}$$

なので、上式は

$$[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = \frac{1}{V} \frac{\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}'}}{2(\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'})^{1/2}} e^{i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'})t} \int d^3x d^3x' e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}')} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

となる。右辺の空間積分は

$$\int d^3x d^3x' e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}')} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \int d^3x e^{-i(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} = V \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \quad (\because \text{式 (80)})$$

となるから、

$$[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = \frac{\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}'}}{2(\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'})^{1/2}} e^{i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'})t} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$$

を得る。右辺には  $\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$  があるため、その前の因子を  $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$  で評価すると、交換関係 (58):

$$[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$$

を得る。同様に展開係数に対する交換関係 (58) の残りの 2 式

$$[a(\mathbf{k}), a(\mathbf{k}')] = 0, \quad [a^\dagger(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = 0$$

も導ける。

■逆証 逆に調和振動子の交換関係 (58) から正準交換関係 (54) を導くことは容易である。

$$\begin{aligned} [\phi(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}(\mathbf{x}', t)] &= i \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \frac{1}{2V} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}'}}{\omega_{\mathbf{k}}}} \{ [a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}')} - [a^\dagger(\mathbf{k}), a(\mathbf{k}')] e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}')} \} \\ &= i \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \frac{1}{2V} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}'}}{\omega_{\mathbf{k}}}} \{ e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}')} + e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}')} \} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \\ &= i \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2V} (e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{x}')} + e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{x}')} ) \quad (x, x' \text{ は同時刻}) \\ &= i \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{V} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \quad (\text{第 1 項で } \mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k} \text{ と置換した}) \\ &= i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

最後の等号は  $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}$  において、 $V \rightarrow \infty$  の極限操作を解除した関係式である。

### 3.2

複素 Klein-Gordon 場の正準交換関係 (3.25) から、展開係数に対する交換関係 (3.27) を導くこと。

■解答 式 (3.35):

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2), \quad \phi^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2)$$

を実 Klein-Gordon 場について逆に解くと,

$$\phi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi(x) + \phi^\dagger(x)) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\mathbf{k}} \left( \frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} [\{a(\mathbf{k})e^{-ik \cdot x} + b^\dagger(\mathbf{k})e^{ik \cdot x}\} + \{b(\mathbf{k})e^{-ik \cdot x} + a^\dagger(\mathbf{k})e^{ik \cdot x}\}],$$

$$\phi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2}i}(\phi(x) - \phi^\dagger(x)) = \frac{1}{\sqrt{2}i} \sum_{\mathbf{k}} \left( \frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} [\{a(\mathbf{k})e^{-ik \cdot x} + b^\dagger(\mathbf{k})e^{ik \cdot x}\} - \{b(\mathbf{k})e^{-ik \cdot x} + a^\dagger(\mathbf{k})e^{ik \cdot x}\}]$$

となる. これを

$$\phi_r(x) = \sum_{\mathbf{k}} \left( \frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} [a_r(\mathbf{k})e^{-ik \cdot x} + a_r^\dagger(\mathbf{k})e^{ik \cdot x}], \quad r = 1, 2$$

と比較すると

$$a_1(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}}[a(\mathbf{k}) + b(\mathbf{k})], \quad a_2(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}i}[a(\mathbf{k}) - b(\mathbf{k})]$$

と同定され,

$$a(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}}[a_1(\mathbf{k}) + ia_2(\mathbf{k})], \quad b(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}}[a_1(\mathbf{k}) - ia_2(\mathbf{k})]$$

を得る.

実場  $\phi_1, \phi_2$  の正準交換関係より, 複素 Klein-Gordon 場の交換関係 (3.25):

$$\begin{aligned} [\phi(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}^\dagger(\mathbf{x}', t)] &= \frac{1}{2}[\phi_1(\mathbf{x}, t) + i\phi_2(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}_1(\mathbf{x}', t) - i\dot{\phi}_2(\mathbf{x}', t)] \\ &= \frac{1}{2}([\phi_1(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}_1(\mathbf{x}', t)] + [\phi_2(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}_2(\mathbf{x}', t)]) = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

が導かれる.

一方,  $a_r(\mathbf{k})$  と  $a_r^\dagger(\mathbf{k})$  ( $r = 1, 2$ ) の交換関係から, 複素 Klein-Gordon 場の展開係数に対する交換関係 (3.27):

$$\begin{aligned} [a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] &= \frac{1}{2}[a_1(\mathbf{k}) + ia_2(\mathbf{k}), a_1^\dagger(\mathbf{k}') - ia_2^\dagger(\mathbf{k}')] \\ &= \frac{1}{2}([a_1(\mathbf{k}), a_1^\dagger(\mathbf{k}')] + [a_2(\mathbf{k}), a_2^\dagger(\mathbf{k}')] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

が導かれる.

以上は複素 Klein-Gordon 場の正準交換関係 (3.25) から, 展開係数に対する交換関係 (3.27) が導かれることを意味している.

■逆証 逆に調和振動子の交換関係 (3.27) から正準交換関係 (3.25) を導くには次のようにすれば良い.

$$\begin{aligned} [\phi(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}^\dagger(\mathbf{x}', t)] &= i \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \frac{1}{2V} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}'}}{\omega_{\mathbf{k}}}} \{ [a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] e^{-i(k \cdot x - k' \cdot x')} - [b^\dagger(\mathbf{k}), b(\mathbf{k}')] e^{i(k \cdot x - k' \cdot x')} \} \\ &= i \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \frac{1}{2V} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}'}}{\omega_{\mathbf{k}}}} \{ e^{-i(k \cdot x - k' \cdot x')} + e^{i(k \cdot x - k' \cdot x')} \} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \\ &= \dots \\ &= i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

「…」以降の計算は実場の場合と完全に共通である.

### 3.3 Feynman の $\Delta_F$ 関数が非斉次 Klein-Gordon 方程式を満たすことの証明

$(\square + m^2)e^{-ik \cdot x} = (-k^2 + m^2)e^{-ik \cdot x}$  であり,  $\Delta_F$  関数の式 (76):

$$\Delta_F(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot x}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}$$

なので, 伝播関数  $\Delta_F(x)$  は非斉次 Klein-Gordon 方程式

$$(\square + m^2)\Delta_F(x) = - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot x} = -\delta^{(4)}(x)$$

を満たす. ただし被積分関数の発散の恐れがなくなることから, 分母における  $i\varepsilon$  を省いた.

■注釈 このことは伝播関数  $\Delta_F(x)$  が Klein-Gordon 方程式の Green 関数となっていることを意味する. 非相対論的量子力学においても, 粒子の伝播関数 (遷移振幅  $\langle x'', t'' | x', t' \rangle$ ) は Schrödinger 方程式の Green 関数となる [1, pp.149–151, pp.154–155].

因子  $i\varepsilon$  を導入して極をずらしても場の方程式の Green 関数が得られることの厳密な証明は, 例えば文献 [4](ランダウ=リフシツ『場の古典論』) の第 8 章のノートに非斉次の波動関数を題材として載せてある.

本問で得た結果によると,  $t \equiv x^0 \neq 0$  のときには  $(\square + m^2)\Delta_F(x) = 0$  となる. これは式 (3.56b):

$$\Delta_F(x) = \pm \Delta^\pm(x) \quad (t \gtrless 0)$$

における  $\Delta^\pm$  関数が Klein-Gordon 方程式を満たすこと (3.3 節の式 (71)) から期待される結果である. 逆に  $x \neq 0$  でない限り, 上式の右辺  $-\delta^{(4)}(x)$  はゼロにならないことに注意する.

### 3.4 複素 Klein-Gordon 場に関する Feynman 伝播関数

まず Feynman 伝播関数の式 (77)

$$\langle 0 | T \{ \phi(x) \phi^\dagger(x') \} | 0 \rangle = i \Delta_F(x - x')$$

を確かめよう. 3.3 節のノートで示した式 (74):

$$[\phi^+(x), \phi^{\dagger-}(x')] = i \Delta^+(x - x'), \quad [\phi^-(x), \phi^{\dagger+}(x')] = i \Delta^-(x - x')$$

を用いると, 上式左辺で定義された伝播関数は確かに

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \{ \phi(x) \phi^\dagger(x') \} | 0 \rangle &= \begin{cases} \langle 0 | \phi(x) \phi^\dagger(x') | 0 \rangle = \langle 0 | \phi^+(x) \phi^{\dagger-}(x') | 0 \rangle = \langle 0 | [\phi^+(x), \phi^{\dagger-}(x')] | 0 \rangle & (t > t' \text{ のとき}) \\ \langle 0 | \phi^\dagger(x') \phi(x) | 0 \rangle = \langle 0 | \phi^{\dagger+}(x') \phi^-(x) | 0 \rangle = \langle 0 | [\phi^{\dagger+}(x'), \phi^-(x)] | 0 \rangle & (t < t' \text{ のとき}) \end{cases} \\ &= \pm \Delta^\pm(x - x') \quad (t \gtrless t' \text{ のとき}) \\ &= i \Delta_F(x - x') \end{aligned}$$

と書き換えられる.

次に

$$\langle 0 | T \{ \phi(x) \phi^\dagger(x') \} | 0 \rangle = \langle 0 | \phi(x) \phi^\dagger(x') | 0 \rangle = \langle 0 | \phi^+(x) \phi^{\dagger-}(x') | 0 \rangle \quad (t > t' \text{ のとき})$$

は, 時空点  $x'$  に  $b$  粒子が局在した状態  $\phi^{\dagger-}(x') | 0 \rangle$  から時空点  $x$  に  $a$  粒子が局在した状態  $\langle 0 | \phi^+(x)$  への遷移確率と解釈できる. また

$$\langle 0 | T \{ \phi(x) \phi^\dagger(x') \} | 0 \rangle = \langle 0 | \phi^\dagger(x') \phi(x) | 0 \rangle = \langle 0 | \phi^{\dagger+}(x') \phi^-(x) | 0 \rangle \quad (t < t' \text{ のとき})$$

は、時空点  $x$  に  $a$  粒子が局在した状態  $\phi^-(x)|0\rangle$  から時空点  $x'$  に  $b$  粒子が局在した状態  $\langle 0|\phi^+(x')$  への遷移確率と解釈できる。よって式 (77) が Feynman 伝播関数の適正な定義であることが裏付けられる。

## 第4章 Dirac 場

本稿では既に自然単位系 (6.1 節) を採用し,  $c = 1, \hbar = 1$  としている.  
やや長くなるが, 概要として序文を引用する.

本章では Pauli の排他律がはたらく粒子系, すなわち Fermi-Dirac 統計に従ういわゆる“フェルミオン”の系を考察したい. 我々は第2章において, 正準量子化の手続きからボゾン系が必然的に導かれることを見た. しかし第1章で見た調和振動子の量子化に対して“特別な”修正を加えると, これを Fermi-Dirac 統計に導くことも可能である. この修正は 1928 年に Jordan(ヨルダン) と Wigner(ウィグナー) によって導入されたが, それは消滅演算子と生成演算子の交換関係を, 反交換関係に置き換えるという措置であった. このフェルミオン系に関する一般的な定式化を 4.1 節において展開する.

その後の部分において, この定式化を Dirac 方程式すなわちスピン  $\frac{1}{2}$  を持つ相対論的な物質粒子の系へ適用する. ボゾンとフェルミオンの本質的な違いのひとつとして, 前者は必ず整数スピン  $(0, 1, \dots)$  を持ち, 後者は必ず半整数スピン  $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots)$  を持っている. このスピンと粒子統計の関係が, 相対論的な場の量子論において基本的な性質であることを見る予定である.

### 4.1 フェルミオン系における占有数表示

調和振動子の交換関係  $[a_r, a_s^\dagger] = \delta_{rs}$  を満たす演算子  $a_r, a_r^\dagger (r = 1, 2, \dots)$  は生成・消滅演算子となる (1.2.2 節). 一方, 演算子  $a_r, a_r^\dagger$  に反交換関係

$$\{a_r, a_s^\dagger\} = \delta_{rs}, \quad \{a_r, a_s\} = 0, \quad \{a_r^\dagger, a_s^\dagger\} = 0 \quad (81)$$

を課した場合にも,  $a_r, a_r^\dagger$  はそれぞれ消滅, 生成演算子となる (ここに  $\{A, B\} \equiv AB + BA$  は  $A$  と  $B$  の反交換子である)<sup>\*16</sup>. ただしこの場合,  $N_r \equiv a_r^\dagger a_r$  の固有値は  $n_r = 0, 1$  に限られる. ところで同じ状態を 2 つ以上のフェルミオンが占めることはできない. よってこれはある状態を占める粒子数を  $n_r$  とする解釈の下で, フェルミオン系を扱うのに適切な形式となっている.

2 粒子状態  $|1_r, 1_s\rangle = a_r^\dagger a_s^\dagger |0\rangle$  は粒子の入れ替えに関して反対称である.

$$\{a_r^\dagger, a_s^\dagger\} = 0 \quad \rightarrow \quad |1_r, 1_s\rangle = -|1_s, 1_r\rangle.$$

これはやはり同じ 1 粒子状態に 2 つ以上の粒子が入れないこと  $|2_r\rangle = (a_r^\dagger)^2 |0\rangle = 0$  を含意している.

#### 4.1 節, 式の導出など

簡単のために 1 対の演算子  $a, a^\dagger$  のみを考え, 添字  $r$  を省く. これらは反交換関係 (81):

$$\{a, a^\dagger\} = 1, \quad \{a, a\} = 0, \quad \{a^\dagger, a^\dagger\} = 0$$

を課した場合にも, それぞれ式 (4):

$$a |n\rangle \propto |n-1\rangle, \quad a^\dagger |n\rangle \propto |n+1\rangle$$

<sup>\*16</sup> 教科書では反交換子を  $[A, B]_+$  と書いているが, 本稿では  $\{A, B\}$  という表記を併用する.

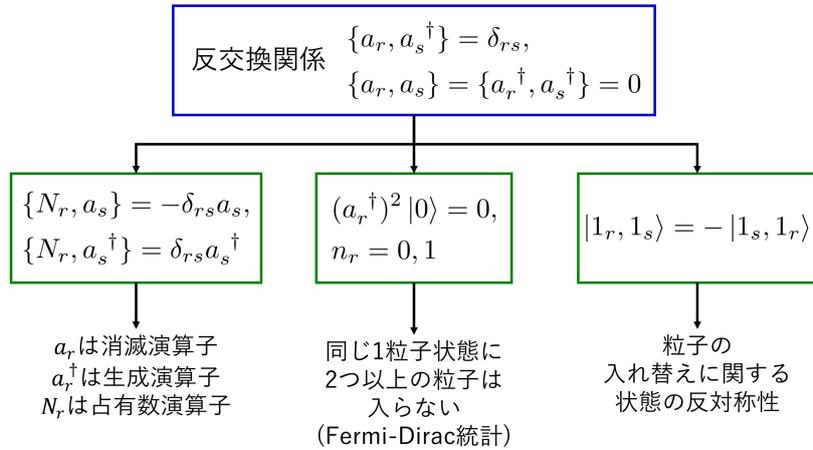


図 12 フェルミオン系における占有数表示

を満たす消滅，生成演算子となる．実際，反交換関係 (81) および恒等式

$$[AB, C] = A[B, C] - \{A, C\}B$$

を用いると

$$\begin{aligned} [N, a] &= [a^\dagger a, a] = a^\dagger \{a, a\} - \{a^\dagger, a\}a = -a, \\ [N, a^\dagger] &= [a^\dagger a, a^\dagger] = a^\dagger \{a, a^\dagger\} - \{a^\dagger, a^\dagger\}a = a^\dagger \end{aligned}$$

が導かれる．この結果はそれぞれ 1.2.2 節の式 (7)，式 (8) と同じものであるから，そこでの議論を繰り返すことで再び

$$\text{式 (9)} : a |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle, \quad \text{式 (10)} : a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle$$

が得られ，さらに固有値  $n$  はゼロ以上の整数であることが結論される．そこで固有値  $n = 0$  に属する固有ケット  $|0\rangle$  に生成演算子  $a^\dagger$  を次々とかけて式 (10) を使い， $N$  の固有ケットを作ることを考えよう．今，反交換関係 (81):  $\{a^\dagger, a^\dagger\} = 0$  より  $(a^\dagger)^2 = 0$  であることにも注意すると

$$a^\dagger |0\rangle = |1\rangle, \quad (a^\dagger)^2 |0\rangle = 0, \quad \dots$$

なので固有値は  $n = 0, 1$  に限られる．

同じ結論は反交換関係 (81) およびその帰結  $a^2 = (a^\dagger)^2 = 0$  を用いると

$$N^2 = a^\dagger a a^\dagger a = a^\dagger (1 - a^\dagger a) a = N, \quad \therefore N(N-1) = 0$$

であることから， $n = 0, 1$  と説明することもできる．

4.1 節の議論は図 12 のようにまとめられる．

#### 4.1 節について

■「反交換する演算子……においても……式 (4.4) と“同じ”式が成立することが証明される」(p.66 下から 6～4 行目) の確認

$$\begin{aligned} [N_r, a_s] &= [a_r^\dagger a_r, a_s] = a_r^\dagger \{a_r, a_s\} - \{a_r^\dagger, a_s\} a_r = -\delta_{rs} a_r, \\ [N_r, a_s^\dagger] &= [a_r^\dagger a_r, a_s^\dagger] = a_r^\dagger \{a_r, a_s^\dagger\} - \{a_r^\dagger, a_s^\dagger\} a_r = \delta_{rs} a_r^\dagger. \end{aligned}$$

■式 (9.4a):  $(a_r)^2 = (a_r^\dagger)^2 = 0$  について 反交換関係 (4.9):  $\{a_r, a_s\} = \{a_r^\dagger, a_s^\dagger\} = 0$  に  $r = s$  の場合として含まれている.

■式 (4.10) について 第 2 の等号は反交換関係 (4.9):  $\{a_r, a_s^\dagger\} = \delta_{rs}$  で  $r = s$  とおいて得られる

$$a_r a_r^\dagger = 1 - a_r^\dagger a_r$$

を用いる. 第 3 の等号は式 (9.4a):  $(a_r)^2 = (a_r^\dagger)^2 = 0$  による.

■お釣りの項について 演算子  $A, B$  を交換したら交換子が, 反交換したら反交換子がお釣りとなる:

$$AB = BA + [A, B], \quad AB = -BA + \{A, B\}.$$

## 4.2 Dirac 方程式

Dirac 場を導入する丁寧な議論を本稿の付録 C で行ってあるので, ここではまず Dirac 場について, 教科書と同程度に基本事項を簡単にまとめよう.

半整数のスピンを持つ粒子はフェルミオンと呼ばれる. スピン 1/2 の粒子は Dirac 場  $\psi(x)$  で表される. Dirac 場  $\psi(x)$  は 4 つの複素場  $\psi_\alpha(x)$  ( $\alpha = 1, 2, 3, 4$ ) を成分に持つスピノルであり, 粒子の質量を  $m$  として Dirac 方程式

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$$

に従う. ここに  $4 \times 4$  の行列  $\gamma^\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ) は  $\gamma$  行列と呼ばれ,

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad (82)$$

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma^{0\dagger} = \gamma^0 \\ \gamma^{j\dagger} = -\gamma^j \quad (j = 1, 2, 3) \end{cases} \quad (83)$$

を満たす (ただし上式 (82) の右辺には  $4 \times 4$  の単位行列が掛かっているものと解す).  $\gamma$  行列の具体的な表示に依らずに理論を定式化するには,  $\gamma$  行列を定義する性質として上式 (82), (83) だけを仮定すれば良い.

任意の 4 元ベクトル  $A_\mu$  に対して Feynman のスラッシュ記法

$$\not{A} \equiv \gamma^\mu A_\mu$$

を導入すると, Dirac 方程式は

$$(i\not{\partial} - m)\psi = 0$$

とも書ける. さらに  $\psi(x)$  に随伴する場  $\bar{\psi}(x) \equiv \psi^\dagger(x)\gamma^0$  を定義する. これは随伴する Dirac 方程式

$$i(\partial_\mu \bar{\psi})\gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0$$

を満たす.

Dirac 方程式は Dirac 場のラグランジアン密度

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi \quad (84)$$

から導かれる.

さらに Dirac 場  $\psi, \bar{\psi}$  に共役な場

$$\pi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi)} = i\psi^\dagger, \quad \bar{\pi} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \bar{\psi})} = 0$$

を定義する<sup>\*17</sup>.

Dirac 場の無限小 Lorentz 変換は

$$\psi_\alpha(x) \rightarrow \psi'_\alpha(x') = \psi_\alpha(x) - \frac{i}{4} \varepsilon_{\mu\nu} \sigma_{\alpha\beta}^{\mu\nu} \psi_\beta(x), \quad \sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (85)$$

という形をとる [本稿の付録 C を参照]. よって角運動量の一般式 (45) から, Dirac 場の角運動量

$$\mathbf{M} = \int d^3x \psi^\dagger(x) \{ \mathbf{x} \times (-i\nabla) \} \psi(x) + \int d^3x \psi^\dagger(x) \left( \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \right) \psi(x) \quad (86)$$

が得られる [導出は本稿次節]. ただし  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma^{23}, \sigma^{31}, \sigma^{12})$  であり<sup>\*18</sup>, 右辺第 1 項が軌道角運動量に, 第 2 項がスピン角運動量に対応する.

Dirac 場のラグランジアン密度 (84) は大域的位相変換の下で不変であり, これに付随する保存する電荷は一般式 (47) に基づき

$$Q = q \int d^3x \psi^\dagger \psi \quad (87)$$

と計算される. 対応する電荷-電流密度 (電磁カレント) は

$$s^\alpha = q \bar{\psi} \gamma^\alpha \psi \quad (88)$$

である. 実際にこれが連続の式を満たすことは, Dirac 方程式から直接に確かめることもできる [確認は本稿次節].

自由 Dirac 場の正準量子化の準備として, 場の Fourier 展開に必要な Dirac 方程式の基本解を調べておく. 便宜的に空間を一辺  $L$ , 体積  $V = L^3$  の立方体領域と見なし, 周期境界条件

$$\psi(0, y, z, t) = \psi(L, y, z, t), \quad \text{etc.}$$

を課す. この下で許される運動量  $\mathbf{p} = \frac{2\pi}{L} \mathbf{n}$  ( $\mathbf{n}$  は整数を成分に持つベクトル) に対して平面波  $\psi(x) \sim e^{\mp i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$  が Dirac 方程式  $(i\partial - m)\psi = 0$  の解となるためには  $p_0 = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \equiv \pm E_{\mathbf{p}}$  でなければならない. [Dirac 方程式は, Dirac 場が Klein-Gordon 方程式  $(\square + m^2)\psi = 0$  を満たすことを含意するため (付録 C), 質量殻の条件  $p^2 = m^2$  が導かれる [3, p.78].] そこで以降  $p_0 = E_{\mathbf{p}}$  とすると, 周期境界条件の下で許される 4 元運動量は  $\pm p = \pm(E_{\mathbf{p}}, \mathbf{p})$  によって網羅されることになり, 基本解は

$$\psi(x) = u(\mathbf{p}) \frac{e^{-ip\cdot x}}{\sqrt{V}}, \quad \psi(x) = v(\mathbf{p}) \frac{e^{ip\cdot x}}{\sqrt{V}}$$

のいずれかの形をとる<sup>\*19</sup>. 再びこれらが Dirac 方程式の解となることを要求すると, 4 成分スピノル  $u(\mathbf{p}), v(\mathbf{p})$  はそれぞれ

$$(\not{p} - m)u(\mathbf{p}) = 0, \quad (\not{p} + m)v(\mathbf{p}) = 0 \quad (89)$$

<sup>\*17</sup> スピノル添字を明記すると, スピノルによる微分は  $\pi_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi_\alpha)} = i\psi_\alpha^\dagger, \bar{\pi}_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \bar{\psi}_\alpha)} = 0$  の意味である.

<sup>\*18</sup>  $[2 \times 2 \text{ Pauli 行列をまとめた表記 } \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)]$  との混同に注意する. スピノル表示において見やすいように (付録 C)  $4 \times 4$  行列の集合  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma^{23}, \sigma^{31}, \sigma^{12})$  は Pauli 行列の一般化にあたる.

<sup>\*19</sup> これらは慣習的に, それぞれ正エネルギー解, 負エネルギー解と呼ばれる. 場の Fourier 展開において時間依存因子  $e^{\mp i\omega t}, \omega > 0$  を含む項が正/負振動数部分と呼ばれるのと同じ事情である.

を満たさなければならない。この方程式はそれぞれスピンの向きの自由度に起因する 2 個の独立な解を持つ。実際スピンの運動量方向への射影 (ヘリシティ) の 2 倍

$$\sigma_{\mathbf{p}} = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}$$

を定義すると (固有値  $\pm 1$ ) [角運動量の表式 (86) を参照], これは  $(\pm \not{\mathbf{p}} + m)$  と可換なので [確認は本稿次節], 同時に固有値を指定できる [10, p.42]. そこで  $\sigma_{\mathbf{p}}$  の固有状態を添字  $r = 1, 2$  によって区別して  $u_r(\mathbf{p}), v_r(\mathbf{p})$  と書き,

$$\sigma_{\mathbf{p}} u_r(\mathbf{p}) = (-1)^{r+1} u_r(\mathbf{p}), \quad \sigma_{\mathbf{p}} v_r(\mathbf{p}) = (-1)^r v_r(\mathbf{p}), \quad r = 1, 2 \quad (90)$$

とする。 (粒子と反粒子を扱うのに便利なように,  $u$ -スピノルと  $v$ -スピノルの添字の付け方を非対称に選んである [4.3 節の式 (102)(ヘリシティの議論) の箇所を参照]. ) 以上により Dirac 方程式の 4 つの独立な解

$$\psi(x) = u_r(\mathbf{p}) \frac{e^{-ip \cdot x}}{\sqrt{V}}, \quad \psi(x) = v_r(\mathbf{p}) \frac{e^{ip \cdot x}}{\sqrt{V}}, \quad r = 1, 2$$

を得る。この下でスピノル  $u_r(\mathbf{p}), v_r(\mathbf{p})$  を

$$u_r^\dagger(\mathbf{p}) u_r(\mathbf{p}) = v_r^\dagger(\mathbf{p}) v_r(\mathbf{p}) = \frac{E_{\mathbf{p}}}{m}$$

と規格化し\*20, 直交性

$$u_r^\dagger(\mathbf{p}) u_s(\mathbf{p}) = v_r^\dagger(\mathbf{p}) v_s(\mathbf{p}) = \frac{E_{\mathbf{p}}}{m} \delta_{rs}, \quad u_r^\dagger(\mathbf{p}) v_s(-\mathbf{p}) = 0 \quad (91)$$

を要求することができる。正規直交関係 (91) の第 2 式は式 (89) の帰結である [導出は本稿次節].

## 4.2 について

■行列  $\alpha, \beta$  を用いた Dirac 方程式の式 (4.14) への書き換え  $\beta^2 = (\gamma_0)^2 = 1$  より, p.68, 1.2 の Dirac 方程式

$$\{i\hbar(\partial_t + \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla) - \beta mc^2\} \psi = 0$$

(教科書の通り  $c, \hbar$  を明記した) は両辺左から  $\beta/c$  を掛けると

$$0 = \{i\hbar(\beta\partial_0 + \beta\alpha_i\partial_i) - mc\} \psi = (i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi : (4.14)$$

となる。逆に式 (4.14) の両辺に左から  $c\beta$  を掛けると, 上式に戻る。

■Dirac 場の角運動量 (86) の導出 場の角運動量テンソルの一般式 (45):

$$M^{\alpha\beta} = \int d^3x \{ (x^\alpha \mathcal{T}^{0\beta} - x^\beta \mathcal{T}^{0\alpha}) + \pi_r S_{rs}^{\alpha\beta} \phi_s \}$$

において, エネルギー・運動量テンソルの一般式 (43):

$$\mathcal{T}^{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi_r)} \frac{\partial \phi_r}{\partial x_\beta} - \mathcal{L} g^{\alpha\beta}$$

\*20 古典論を想定して粒子の速度  $v$  を導入すると, 最右辺の因子は  $E_{\mathbf{p}}/m = 1/\sqrt{1-v^2}$  であり, Lorentz 収縮による高密度化に関係する (p.71 訳註).

は Dirac 場に対して

$$\begin{aligned}\mathcal{T}^{0i} &= \pi \partial^i \psi \quad (\bar{\pi} = 0) \\ &= -i\psi^\dagger \partial_i \psi \quad (\pi = i\psi^\dagger)\end{aligned}$$

を与える。また Dirac 場の変換則 (85) より場の変換則 (41) において  $S^{ij} = -\frac{i}{2}\sigma^{ij}$  と同定されるので, Dirac 場の角運動量は

$$\begin{aligned}M^{ij} &= \int d^3x \left\{ (-i)\psi^\dagger (x^i \partial_j - x^j \partial_i) \psi + i\psi^\dagger \left( -\frac{i}{2}\sigma^{ij} \right) \psi \right\}, \quad (\because \bar{\pi} = 0) \\ \therefore \mathbf{M} &= \int d^3x \psi^\dagger(x) \{ \mathbf{x} \times (-i\nabla) \} \psi(x) + \int d^3x \psi^\dagger(x) \left( \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \right) \psi(x) : (86)\end{aligned}$$

と計算される。

■電磁カレントの表式 (88) の導出 一般に場  $\phi_r(x)$  の変化  $\phi_r(x) \rightarrow \phi_r(x) + \delta\phi_r(x)$  の下でラグランジアン密度  $\mathcal{L}$  が不変であるとき,

$$f^\alpha \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi_r)} \delta\phi_r$$

は連続の式  $\partial_\alpha f^\alpha = 0$  を満たし, 保存する流れ (4 元流束密度) となる (2.4 節).  $\varepsilon$  を無限小の定数としたゲージ変換

$$\begin{aligned}\psi &\rightarrow e^{i\varepsilon}\psi \simeq (1+i\varepsilon)\psi & \therefore \delta\psi &= i\varepsilon\psi, \\ \bar{\psi} &\rightarrow e^{-i\varepsilon}\bar{\psi} \simeq (1-i\varepsilon)\bar{\psi} & \therefore \delta\bar{\psi} &= -i\varepsilon\bar{\psi}\end{aligned}$$

に対するラグランジアン密度の不変性に付随するカレントは,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \psi)} = i\bar{\psi}\gamma^\alpha, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \bar{\psi})} = 0$$

に注意すると

$$f^\alpha = (i\bar{\psi}\gamma^\alpha)(i\varepsilon\psi) = -\varepsilon\bar{\psi}\gamma^\alpha\psi$$

となる。定数係数を (複素 Klein-Gordon 場のとくと同様,  $\varepsilon \rightarrow -q$  と) 改めて, 電磁カレント (88):

$$s^\alpha \equiv q\bar{\psi}\gamma^\alpha\psi$$

を得る。

■Dirac 方程式から 4 元電流密度 (88) に対する連続の式の導出 Dirac 方程式

$$i\gamma^\alpha \partial_\alpha \psi = m\psi, \quad i(\partial_\alpha \bar{\psi})\gamma^\alpha = -m\bar{\psi}$$

を用いると,

$$\partial_\alpha s^\alpha = q\partial_\alpha (\bar{\psi}\gamma^\alpha\psi) = q\{(\partial_\alpha \bar{\psi})\gamma^\alpha\psi + \bar{\psi}\gamma^\alpha\partial_\alpha \psi\} = \frac{q}{i}\{(-m\bar{\psi})\psi + \bar{\psi}(m\psi)\} = 0$$

となる。

■ $\psi$  と  $\bar{\psi}$  に関する注意

- Dirac 方程式を Euler-Lagrange 方程式として導出する際には Dirac 場  $\psi$  と  $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$  を独立な場と見なす。
- ハミルトニアンや電磁カレントの計算において、 $\psi$  に共役な場  $\pi = i\psi^\dagger$  に当たる  $\bar{\psi}$  を、 $\psi$  とは別にもう 1 種類の間と考えて、ハミルトニアン密度の式に  $\bar{\psi}$  を加えるという立場もあり得る。 $\bar{\psi}$  の項を考えたとしても、

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \bar{\psi}_l)} = 0$$

(特に  $\bar{\pi} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \bar{\psi})} = 0$ ) なので、得られるハミルトニアン密度と電磁カレントは変わらない。

- これに対し正準量子化の手続き (4.3 節) では  $\bar{\psi}$  を  $\psi$  と独立なもう一種類の間とは見なさないのは、一貫性に欠ける。 $\psi$  と  $\bar{\psi}$  を独立な場として扱うのが正確だが、これには“特異系の量子化”の手続きが必要になる [10, p.41].

■式 (89) について  $u, v$ -スピノルは  $x$  依存性を担わないから、

$$0 = \frac{u_r(\mathbf{p})}{\sqrt{V}}(i\not{\partial} - m)e^{-ip \cdot x} = \{(\not{p} - m)u_r(\mathbf{p})\} \frac{e^{-ip \cdot x}}{\sqrt{V}}, \quad \text{etc.}$$

■ $\sigma_{\mathbf{p}}$  が  $(\pm \gamma^\mu p_\mu + m)$  と可換であることの確認

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathbf{p}} &\equiv \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} = \frac{p_i}{|\mathbf{p}|} \left( \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \sigma^{jk} \right) = \frac{ip_i}{4|\mathbf{p}|} \varepsilon_{ijk} [\gamma^j, \gamma^k], \\ \therefore [\pm \not{p} + m, \sigma_{\mathbf{p}}] &= \pm p_\mu \frac{ip_i}{4|\mathbf{p}|} \varepsilon_{ijk} [\gamma^\mu, [\gamma^j, \gamma^k]] \end{aligned}$$

であり、 $j \neq k$  の項だけが寄与を持つ。このため  $\gamma^j$  と  $\gamma^k$  を反交換して

$$[\gamma^j, \gamma^k] = \gamma^j \gamma^k - \gamma^k \gamma^j \rightarrow 2\gamma^j \gamma^k$$

と置き換えても、上式の値は変わらない。すると恒等式 (4.8):

$$[AB, C] = A\{B, C\} - \{A, C\}B$$

の助けも借りて、

$$[\gamma^\mu, [\gamma^j, \gamma^k]] \rightarrow 2[\gamma^\mu, \gamma^j \gamma^k] = 2(\{\gamma^j, \gamma^\mu\} \gamma^k - \gamma^j \{\gamma^k, \gamma^\mu\}) = 4(\gamma^k g^{j\mu} - \gamma^j g^{k\mu}) = 4(\gamma^j \delta_k^\mu - \gamma^k \delta_j^\mu)$$

とできるので、

$$[\pm \not{p} + m, \sigma_{\mathbf{p}}] = \pm i \frac{p_i}{|\mathbf{p}|} \varepsilon_{ijk} (\gamma^j p_k - \gamma^k p_j) = \pm \frac{2i}{|\mathbf{p}|} \varepsilon_{ijk} p_i p_k \gamma^j = 0$$

を得る。最後の等号では添字  $i, k$  に関して  $\varepsilon_{ijk}$  が反対称であるのに対し、 $p_i p_k$  は対称であることを考慮した。

■式 (89) からスピノルの直交性 (91) 第 2 式の導出 式 (89):

$$(\not{p} - m)u_r(\mathbf{p}) = 0, \quad (\not{p} + m)v_s(-\mathbf{p}) = 0$$

の第 2 式より

$$u_r^\dagger(\mathbf{p})(p_0 \gamma^0 - p_i \gamma^i + m)v_s(-\mathbf{p}) = 0 \quad (92)$$

を得る。また第 1 式から

$$v_s^\dagger(-\mathbf{p})(p_0\gamma^0 + p_i\gamma^i - m)u_r(\mathbf{p}) = 0$$

が得られ、Hermite 共役をとると

$$u_r^\dagger(\mathbf{p})(p_0\gamma^0 - p_i\gamma^i - m)v_s(-\mathbf{p}) = 0 \quad (93)$$

となる。{(式 (92)) - (式 (93))}/2m を作るとスピノルの直交性 (91) の第 2 式

$$u_r^\dagger(\mathbf{p})v_s(-\mathbf{p}) = 0$$

が導かれる。

### 4.3 第二量子化

Dirac 方程式の平面波解を用いて、Dirac 場を

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \psi^+(x) + \psi^-(x), \\ \psi^+(x) &\equiv \sum_{\mathbf{p}, r} \left( \frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} c_r(\mathbf{p}) u_r(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x}, \\ \psi^-(x) &\equiv \sum_{\mathbf{p}, r} \left( \frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} d_r^\dagger(\mathbf{p}) v_r(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x} \end{aligned} \quad (94)$$

と Fourier 展開する。

p.72 脚注の引用 我々はスピン状態  $u_r$  と  $v_r$  を指定したけれども、互いに直交する別のスピン状態の組を採用してもよいことを読者は明確に理解しておいてもらいたい。以下の議論は、スピン状態に関する解釈だけを変更すれば、スピンの基底状態をどのように選んでも適用できる。

このとき随伴する場  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$  は

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(x) &= \bar{\psi}^+(x) + \bar{\psi}^-(x), \\ \bar{\psi}^+(x) &\equiv \sum_{\mathbf{p}, r} \left( \frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} d_r(\mathbf{p}) \bar{v}_r(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x}, \\ \bar{\psi}^-(x) &\equiv \sum_{\mathbf{p}, r} \left( \frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} c_r^\dagger(\mathbf{p}) \bar{u}_r(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x} \end{aligned} \quad (95)$$

と展開される ( $\bar{u}_r \equiv u_r^\dagger \gamma^0$ ,  $\bar{v}_r \equiv v_r^\dagger \gamma^0$ )。ただしこの段階では展開係数  $c_r(\mathbf{p})$ ,  $c_r^\dagger(\mathbf{p})$ ,  $d_r(\mathbf{p})$ ,  $d_r^\dagger(\mathbf{p})$  は演算子ではなく通常の数であり、後の都合のために因子  $(m/E_{\mathbf{p}})^{1/2}$  をくくり出してある。

ここで Dirac 場  $\psi$  と共役な場  $\pi = i\psi^\dagger$  を Heisenberg 描像における演算子と見なして同時刻反交換関係

$$\begin{aligned} \{\psi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)\} &= i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), & \{\psi(\mathbf{x}, t), \psi(\mathbf{y}, t)\} &= 0, & \{\pi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)\} &= 0 \\ \Leftrightarrow \{\psi(\mathbf{x}, t), \psi^\dagger(\mathbf{y}, t)\} &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), & \{\psi(\mathbf{x}, t), \psi(\mathbf{y}, t)\} &= 0, & \{\psi^\dagger(\mathbf{x}, t), \psi^\dagger(\mathbf{y}, t)\} &= 0 \end{aligned} \quad (96)$$

を課すと\*21, 展開係数に対する反交換関係 (4.1 節)

$$\begin{aligned}
\{c_r(\mathbf{p}), c_s^\dagger(\mathbf{p}')\} &= \{d_r(\mathbf{p}), d_s^\dagger(\mathbf{p}')\} = \delta_{rs}\delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}, \\
\{c_r, c_s\} &= \{c_r^\dagger, c_s^\dagger\} = \{d_r, d_s\} = \{d_r^\dagger, d_s^\dagger\} \\
= \{c_r, d_s\} &= \{c_r, d_s^\dagger\} = \{c_r^\dagger, d_s\} = \{c_r^\dagger, d_s^\dagger\} = 0
\end{aligned} \tag{97}$$

が導かれる [導出は本稿次節] [11, pp.219–221] [10, pp.41–44]. ここから  $c_r^\dagger(\mathbf{p}), c_r(\mathbf{p})$  および  $d_r^\dagger(\mathbf{p}), d_r(\mathbf{p})$  はそれぞれ運動量  $\mathbf{p}$  を持ちスピン状態が  $r$  で指定される 2 種類のフェルミオン  $c, d$  の生成・消滅演算子と解釈できる. 真空状態  $|0\rangle$  は

$$\begin{aligned}
c_r(\mathbf{p})|0\rangle &= d_r(\mathbf{p})|0\rangle = 0 \quad (\text{全ての } \mathbf{p}, r) \\
\text{あるいは} \quad \psi^+(x)|0\rangle &= \bar{\psi}^+(x)|0\rangle = 0 \quad (\text{全ての } x)
\end{aligned}$$

で定義される.

$c$  粒子,  $d$  粒子の物理的な性質を得るために, 保存量を生成・消滅演算子で表現する. ただし真空期待値がゼロとなるように正規順序化した形で保存量の演算子を定義する. その際, フェルミオンの演算子を反交換し入れ替えなければならないことに注意する [3.1 節のノートにおける図 6 参照]. 例えば

$$N[\psi_\alpha^+\psi_\beta^-] = -\psi_\beta^-\psi_\alpha^+$$

である. すると Dirac 場のエネルギー (ハミルトニアン)  $H$ , 運動量  $\mathbf{P}$ , 電荷  $Q$  は

$$H = \sum_{r,\mathbf{p}} E_{\mathbf{p}} [N_r(\mathbf{p}) + \bar{N}_r(\mathbf{p})] \tag{98}$$

$$\mathbf{P} = \sum_{r,\mathbf{p}} \mathbf{p} [N_r(\mathbf{p}) + \bar{N}_r(\mathbf{p})] \tag{99}$$

$$Q = q \sum_{r,\mathbf{p}} [N_r(\mathbf{p}) - \bar{N}_r(\mathbf{p})] \tag{100}$$

(ただし  $N_r(\mathbf{p}) \equiv c_r^\dagger(\mathbf{p})c_r(\mathbf{p}), \bar{N}_r(\mathbf{p}) \equiv d_r^\dagger(\mathbf{p})d_r(\mathbf{p})$ ) と計算される [導出は本稿次節]. エネルギー・運動量の式 (98), (99) は期待通りの結果となっており, また電荷の式 (100) により  $c$  粒子に電荷  $+q$ ,  $d$  粒子に電荷  $-q$  が充てられる. ここから  $c, d$  粒子は互いに反粒子の関係にあると解釈できる. さらにヘリシティ演算子を [式 (86) における Dirac 場のスピン角運動量の  $\mathbf{p}$  方向成分をとり, 場を演算子と見て正規順序化した]

$$S_{\mathbf{p}} = \frac{1}{2} \int d^3x N[\psi^\dagger \sigma_{\mathbf{p}} \psi] \tag{101}$$

によって定義すると, 1 粒子状態  $c_r^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle, d_r^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle$  は固有方程式

$$S_{\mathbf{p}} c_r^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle = (-1)^{r+1} \frac{1}{2} c_r^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle, \quad S_{\mathbf{p}} d_r^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle = (-1)^{r+1} \frac{1}{2} d_r^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle \tag{102}$$

を満たす [導出は本稿次節]. したがって  $c$  粒子と  $d$  粒子のいずれに対しても,  $r=1$  がヘリシティ  $+1/2$  の“右巻き”の状態を,  $r=2$  がヘリシティ  $-1/2$  の“左巻き”の状態を表している. [これは指数  $r$  について非対称な  $\sigma_{\mathbf{p}}$  の固有方程式 (90) を満たすように  $u, v$ -スピノルを選んだことによる. またスピン  $1/2$  の系に対して期待されるようにヘリシティが  $\pm 1/2$  となることは, 式 (90) において論点が先取りされていることに注意する.]

\*21 スピノル添字  $\alpha, \beta$  を明記すると,  $\{\psi_\alpha(\mathbf{x}, t), \pi_\beta(\mathbf{y}, t)\} = i\delta_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ , etc. である.

式 (98), (99), (100), (102) は粒子  $c$  と反粒子  $d$  に関して対称である。これを踏まえ、例えば Dirac 場が記述するスピン 1/2 の粒子として電子と陽電子を想定した場合、我々は電荷を  $q = -e$  ( $e$  は素電荷) と設定して  $c$  粒子を電子、 $d$  粒子を陽電子と見なすことにする。

参考—— Majorana 表示  $\gamma$  行列の成分が純虚数となる Majorana (マヨラナ) 表示を採用すれば、場の展開は粒子と反粒子に関して対称な形

$$\begin{aligned}\psi_M(x) &= \sum_{r,\mathbf{p}} \left( \frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} \{c_r(\mathbf{p})u_{Mr}(\mathbf{p})e^{-ip \cdot x} + d_r^\dagger(\mathbf{p})u_{Mr}^*(\mathbf{p})e^{ip \cdot x}\}, \\ \psi_M^{\dagger T}(x) &= \sum_{r,\mathbf{p}} \left( \frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} \{d_r(\mathbf{p})u_{Mr}(\mathbf{p})e^{-ip \cdot x} + c_r^\dagger(\mathbf{p})u_{Mr}^*(\mathbf{p})e^{ip \cdot x}\}\end{aligned}\quad (103)$$

となる (添字 M は Majorana 表示を表す, 説明は下記)。

展開係数の反交換関係 (97) を用い、Dirac 場の [同時刻に限らない] 反交換関係を調べておこう。[これはフェルミオン伝播関数の計算の準備という意味がある。] 自明な反交換関係

$$\{\psi_\alpha(x), \psi_\beta(y)\} = \{\bar{\psi}_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(y)\} = 0$$

に加えて、

$$\{\psi^\pm(x), \bar{\psi}^\mp(y)\} = iS^\pm(x-y) \quad (104)$$

が成立する [導出は本稿次節]。ただし左辺は反交換子  $\{\psi_\alpha^\pm(x), \bar{\psi}_\beta^\mp(y)\}$  を  $(\alpha, \beta)$  成分に持つ  $4 \times 4$  行列の意味であり\*22, 右辺における  $4 \times 4$  行列の関数  $S^\pm(x)$  は式 (68), (69) の  $\Delta^\pm(x)$  を用いて

$$S^\pm(x) = (i\cancel{\partial} + m)\Delta^\pm(x)$$

と定義されている。ここから

$$\begin{aligned}\{\psi(x), \bar{\psi}(y)\} &= \{\psi^+(x), \bar{\psi}^-(y)\} + \{\psi^-(x), \bar{\psi}^+(y)\} = i(S^+(x-y) + S^-(x-y)) \equiv iS(x-y), \\ S(x) &\equiv S^+(x) + S^-(x) = (i\cancel{\partial} + m)\Delta(x) \quad (\Delta(x) \equiv \Delta^+(x) + \Delta^-(x) : (70))\end{aligned}\quad (4.54b)$$

が見出される。式 (73):  $\Delta^\pm(x) = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int_{C^\pm} \frac{d^4k e^{-ik \cdot x}}{k^2 - m^2}$  に対応した  $S$  関数の式は

$$S^\pm(x) = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int_{C^\pm} d^4p e^{-ip \cdot x} \frac{\cancel{p} + m}{p^2 - m^2} = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int_{C^\pm} d^4p \frac{e^{-ip \cdot x}}{\cancel{p} - m}$$

となる。[最右辺の被積分関数における行列の逆数  $1/(\cancel{p} - m)$  は、 $(\cancel{p} - m)$  の逆行列の意味である。実際、公式 (327)(教科書の付録 A):  $AA = A^2$  により]

$$(\cancel{p} \pm m)(\cancel{p} \mp m) = p^2 - m^2$$

の関係がある [ので、 $\frac{\cancel{p} + m}{p^2 - m^2}$  は  $(\cancel{p} - m)$  の逆行列である]。

#### 4.3 節, 式の導出など

■Majorana 表示での場の展開 (103) について Majorana 表示の  $\gamma$  行列  $\gamma_M^\mu$  は具体的には、教科書の付録 A における式 (A.79) で与えられており、いずれも成分は純虚数である。このとき演算子  $(i\gamma_M^\mu \partial_\mu - m)$  は実だから、Dirac 方程式の正エネルギー解を  $u_{Mr}(\mathbf{p})e^{-ip \cdot x}/\sqrt{V}$  とすると、その複素共役  $u_{Mr}^*(\mathbf{p})e^{ip \cdot x}/\sqrt{V}$  が負エネルギー解となる。

\*22 実際、 $\psi^\pm(x)\bar{\psi}^\mp(y)$  という形の行列の積は定義されないことに注意する。

### 4.3 について

■正準反交換関係 (96) と展開係数の反交換関係 (97) Dirac 場に対する正準反交換関係 (96) が展開係数に対する反交換関係 (97) になることを確かめる.

展開係数を Dirac 場で表す 準備として Dirac 場を用いて展開係数を表すと

$$c_r(\mathbf{p}) = \left( \frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} \int d^3x u_r^\dagger(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x} \psi(x), \quad (105)$$

$$c_r^\dagger(\mathbf{p}) = \left( \frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} \int d^3x \psi^\dagger(x) u_r(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x}, \quad (106)$$

$$d_r(\mathbf{p}) = \left( \frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} \int d^3x \psi^\dagger(x) v_r(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x}, \quad (107)$$

$$d_r^\dagger(\mathbf{p}) = \left( \frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} \int d^3x v_r^\dagger(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} \psi(x) \quad (108)$$

となる [10, p.44]. 実際, 例えば  $c_r(\mathbf{p})$  に対する式 (105) は次のように確かめられる. あらかじめ計算の方針を以下に示しておく.

- Dirac 場の Fourier 展開 (4.38a), (4.38b) を代入する.
  - 運動量ベクトル  $\mathbf{p}'$ , スピン状態の指数  $s$  についての和が現れる.
  - 位置  $\mathbf{x}$  依存性が指数関数  $e^{\pm i(\mathbf{p} \pm \mathbf{p}') \cdot \mathbf{x}}$  になる (複号任意).
- 位置  $\mathbf{x}$  に関する積分を実行する.
  - 一辺  $L$ , 体積  $V = L^3$  の立方体領域に関する周期境界条件の下で許される波数ベクトル  $\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L}(\mathbf{n})$  ( $\mathbf{n}$  は整数を成分に持つベクトル) に対して,  $e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} / \sqrt{V}$  の規格直交性 (80):

$$\int \frac{d^3x}{V} e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$$

が成り立つことに注意する.

- $\delta_{\mathbf{p}, \pm \mathbf{p}'}$  が現れる.
- $\mathbf{p}'$  についての和をとる.
  - スピノル  $u_r, u_r^\dagger, v_r, v_r^\dagger$  の引数が  $\pm \mathbf{p}$  となる.
- スピノル  $u_r, v_r$  の正規直交関係 (91) を用いる.
  - $\delta_{rs}$  が現れる.
- $s$  についての和をとる.

さて, 以上の流れに沿って計算を進めると,

$$\begin{aligned} & \left( \frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} \int d^3x u_r^\dagger(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x} \psi(x) \\ &= \left( \frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} \int d^3x u_r^\dagger(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x} \sum_{\mathbf{p}', s} \left( \frac{m}{VE_{\mathbf{p}'}} \right)^{1/2} \left\{ c_s(\mathbf{p}') u_s(\mathbf{p}') e^{-ip' \cdot x} + d_s^\dagger(\mathbf{p}') v_s(\mathbf{p}') e^{ip' \cdot x} \right\} \\ & (\because \text{式 (4.38a)}) \\ &= u_r^\dagger(\mathbf{p}) \sum_{\mathbf{p}', s} \frac{m}{(E_{\mathbf{p}} E_{\mathbf{p}'})^{1/2}} \left\{ c_s(\mathbf{p}') u_s(\mathbf{p}') e^{i(E_{\mathbf{p}} - E_{\mathbf{p}'})t} \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} + d_s^\dagger(\mathbf{p}') v_s(\mathbf{p}') e^{i(E_{\mathbf{p}} + E_{\mathbf{p}'})t} \delta_{\mathbf{p}, -\mathbf{p}'} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\because \text{式 (80)}, t \equiv x^0) \\
& = u_r^\dagger(\mathbf{p}) \frac{m}{E_{\mathbf{p}}} \sum_s \{c_s(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p}) + d_s^\dagger(-\mathbf{p})v_s(-\mathbf{p})e^{2iE_{\mathbf{p}}t}\} \\
& = \sum_s c_s(\mathbf{p})\delta_{rs} \quad (\because \text{式 (91)}) \\
& = c_r(\mathbf{p})
\end{aligned}$$

となって、式 (105) が導かれる。同様に式 (106), (107), (108) が成り立つことを確かめられる。\$c\_r^\dagger(\mathbf{p})\$ の式 (106), \$d\_r^\dagger(\mathbf{p})\$ の式 (108) はそれぞれ \$c\_r(\mathbf{p})\$ の式 (105), \$d\_r(\mathbf{p})\$ の式 (107) の両辺の Hermite 共役をとったものとなっている。

ところで展開係数の表式 (105), (106), (107), (108) は見掛け上、時刻 \$x^0\$ に依る。そこでこれらが実際には時刻 \$x^0\$ に依らないことを確かめておこう。\$c\_r(\mathbf{p})\$ の式 (105) の \$x^0\$ による微分

$$\partial_0 \left\{ \left( \frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} \int d^3x \bar{u}_r(\mathbf{p}) \gamma^0 e^{ip \cdot x} \psi(x) \right\} = \left( \frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} \int d^3x \bar{u}_r(\mathbf{p}) \gamma^0 e^{ip \cdot x} (iE_{\mathbf{p}} + \partial_0) \psi(x)$$

において、Dirac 方程式

$$\begin{aligned}
0 &= (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = (i\gamma^0 \partial_0 + i\gamma^j \partial_j - m)\psi \\
\Leftrightarrow \gamma^0 \partial_0 \psi &= -(\gamma^j \partial_j + im)\psi
\end{aligned}$$

を用いると

$$\begin{aligned}
& \int d^3x \bar{u}_r(\mathbf{p}) \gamma^0 e^{ip \cdot x} (iE_{\mathbf{p}} + \partial_0) \psi(x) \\
&= \int d^3x \bar{u}_r(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x} (i\gamma^0 E_{\mathbf{p}} - \gamma^j \partial_j - im) \psi(x) \\
&= \int d^3x \bar{u}_r(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x} i(\gamma^0 E_{\mathbf{p}} + \gamma^j p_j - m) \psi(x) \quad (\text{部分積分した}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

となる。ただし最後の等号では式 (4.32) により

$$\bar{u}_r(\mathbf{p})(\not{p} - m) = 0$$

となることに注意した。よって \$c\_r(\mathbf{p})\$ の式 (105) は時刻 \$x^0\$ に依らない。同様に式 (106), (107), (108) が時刻 \$x^0\$ に依らないことを確かめられる。

展開係数の反交換関係 (97) の導出 さて、展開係数を Dirac 場で表した式 (105), (106), (107), (108) を用いて、Dirac 場に対する正準反交換関係 (96) から展開係数に対する反交換関係 (97) を導こう。式 (105), (106) は右辺が時刻 \$x^0\$ に依らないから、これを用いて得られる

$$\{c_r(\mathbf{p}), c_s^\dagger(\mathbf{p}')\} = \frac{m}{V(E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{p}'})^{1/2}} \int d^3x d^3x' e^{i(p \cdot x - p' \cdot x')} u_r^\dagger(\mathbf{p}) \{\psi(x), \psi^\dagger(x')\} u_s(\mathbf{p}')$$

の右辺は時刻  $x^0, x'^0$  に依らない．そこでこれを同時刻  $x^0 = x'^0 \equiv t$  で評価すると，同時刻反交換関係 (96) により  $\{\psi(x), \psi^\dagger(x')\} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$  なので

$$\begin{aligned} & \{c_r(\mathbf{p}), c_s^\dagger(\mathbf{p}')\} \\ &= \frac{m}{V(E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{p}'})^{1/2}} e^{i(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{p}'})t} u_r^\dagger(\mathbf{p}) u_s(\mathbf{p}') \int d^3x e^{-i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\mathbf{x}} \\ &= \frac{m}{(E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{p}'})^{1/2}} e^{i(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{p}'})t} u_r^\dagger(\mathbf{p}) u_s(\mathbf{p}') \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \end{aligned}$$

となる．最右辺には  $\delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}$  があるため，その前の因子を  $\mathbf{p} = \mathbf{p}'$  で評価すると

$$\begin{aligned} \{c_r(\mathbf{p}), c_s^\dagger(\mathbf{p}')\} &= \frac{m}{E_{\mathbf{p}}} u_r^\dagger(\mathbf{p}) u_s(\mathbf{p}) \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \\ &= \delta_{rs} \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \quad (\because \text{式 (91)}) \end{aligned}$$

を得る．同様に式 (97) の残りの反交換関係を導ける．

■p.73 の脚注 6 について 例えば  $-\psi^- O^T \bar{\psi}^+$  は行列の積が定義できない形

$$-\begin{pmatrix} \psi^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\psi}^+ \end{pmatrix}$$

となっており，これはスピノル添字を書いて  $-\psi_\beta O_{\alpha\beta} \bar{\psi}_\alpha^+$  と解釈して初めて意味を成す．

なお今一度確認すると，これに対し

$$\begin{pmatrix} \bar{\psi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \end{pmatrix}$$

という形の行列の積はよく定義されており， $1 \times 1$  構造の量を作る．

■Dirac 場のエネルギー (98) の導出 場のハミルトニアン  $H = \int d^3x (\pi_r \dot{\phi}_r - \mathcal{L})$  は Dirac 場に対して

$$H = \int d^3x \bar{\psi} (-i\gamma^j \partial_j + m) \psi$$

となる．場  $\psi$  は Dirac 方程式を満たすため，

$$(-i\gamma^j \partial_j + m) \psi = i\gamma^0 \partial_0 \psi$$

と書き換えられることに注意し，正規順序化を施すと

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x N [\bar{\psi} (i\gamma^0 \partial_0) \psi] \\ &= \int \frac{d^3x}{V} \sum_{r,s} \sum_{\mathbf{p},\mathbf{q}} m \sqrt{\frac{E_{\mathbf{q}}}{E_{\mathbf{p}}}} N [\{d_r(\mathbf{p}) v_r^\dagger(\mathbf{p}) e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + c_r^\dagger(\mathbf{p}) u_r^\dagger(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\} \{c_s(\mathbf{q}) u_s(\mathbf{q}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} - d_s^\dagger(\mathbf{q}) v_s(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}\}] \\ &= \sum_{r,s} \sum_{\mathbf{p},\mathbf{q}} m \sqrt{\frac{E_{\mathbf{q}}}{E_{\mathbf{p}}}} N [d_r(\mathbf{p}) c_s(\mathbf{q}) v_r^\dagger(\mathbf{p}) u_s(\mathbf{q}) \delta_{\mathbf{p},-\mathbf{q}} e^{-i(E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{q}})t} \\ &\quad - d_r(\mathbf{p}) d_s^\dagger(\mathbf{q}) v_r^\dagger(\mathbf{p}) v_s(\mathbf{q}) \delta_{\mathbf{p}\mathbf{q}} e^{-i(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{q}})t} \\ &\quad + c_r(\mathbf{p}) c_s(\mathbf{q}) u_r^\dagger(\mathbf{p}) u_s(\mathbf{q}) \delta_{\mathbf{p}\mathbf{q}} e^{i(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{q}})t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -c_r^\dagger(\mathbf{p})d_s^\dagger(\mathbf{q})u_r^\dagger(\mathbf{p})v_s(\mathbf{q})\delta_{\mathbf{p},-\mathbf{q}}e^{i(E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{q}})t}] \\
= & \sum_{r,s} \sum_{\mathbf{p}} mN[-d_r(\mathbf{p})d_s^\dagger(\mathbf{p}) + c_r^\dagger(\mathbf{p})c_s(\mathbf{p})] \frac{E_{\mathbf{p}}}{m} \delta_{rs} \\
= & \sum_{r,\mathbf{p}} E_{\mathbf{p}}[N_r(\mathbf{p}) + \bar{N}_r(\mathbf{p})] : (98)
\end{aligned}$$

が得られる。

■ $P$  の式 (99) の導出

$$\begin{aligned}
P &= -i\hbar \int d^3x N[\psi^\dagger \nabla \psi] \quad (\text{エネルギー} \cdot \text{運動量の一般式 (38) による}) \\
&= -i \int d^3x N \left[ \sum_{r,s} \sum_{\mathbf{p},\mathbf{q}} \frac{m}{V\sqrt{E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} (d_r(\mathbf{p})v_r^\dagger(\mathbf{p})e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + c_r^\dagger(\mathbf{p})u_r^\dagger(\mathbf{p})e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}) \right. \\
&\quad \left. \times i\mathbf{q}(c_s(\mathbf{q})u_s(\mathbf{q})e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} - d_s^\dagger(\mathbf{q})v_s(\mathbf{q})e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}) \right] \\
&= N \left[ \sum_{r,s} \sum_{\mathbf{p},\mathbf{q}} \frac{m}{\sqrt{E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} \mathbf{q} \right. \\
&\quad \times (d_r(\mathbf{p})c_s(\mathbf{q})v_r^\dagger(\mathbf{p})u_s(\mathbf{q})\delta_{\mathbf{p},-\mathbf{q}}e^{-i(E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{q}})t} \\
&\quad - d_r(\mathbf{p})d_s^\dagger(\mathbf{q})v_r^\dagger(\mathbf{p})v_s(\mathbf{q})\delta_{\mathbf{p}\mathbf{q}}e^{-i(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{q}})t} \\
&\quad + c_r^\dagger(\mathbf{p})c_s(\mathbf{q})u_r^\dagger(\mathbf{p})u_s(\mathbf{q})\delta_{\mathbf{p}\mathbf{q}}e^{i(E_{\mathbf{p}}-E_{\mathbf{q}})t} \\
&\quad \left. - c_r^\dagger(\mathbf{p})d_s^\dagger(\mathbf{q})u_r^\dagger(\mathbf{p})v_s(\mathbf{q})\delta_{\mathbf{p},-\mathbf{q}}e^{i(E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{q}})t}) \right] \\
&= N \left[ \sum_{r,s} \sum_{\mathbf{p}} \frac{m}{E_{\mathbf{p}}} \mathbf{p} (-d_r(\mathbf{p})d_s^\dagger(\mathbf{p}) + c_r^\dagger(\mathbf{p})c_s(\mathbf{p})) \frac{E_{\mathbf{p}}}{m} \delta_{rs} \right] \\
&= \sum_{r,\mathbf{p}} \mathbf{p} (N_r(\mathbf{p}) + \bar{N}_r(\mathbf{p})) : (99).
\end{aligned}$$

■ $Q$  の式 (100) の導出

$$\begin{aligned}
Q &= q \int d^3x N[\psi^\dagger \psi] : (87) \\
&= q \int d^3x N \left[ \sum_{r,s} \sum_{\mathbf{p},\mathbf{q}} \frac{m}{V\sqrt{E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}}} (d_r(\mathbf{p})v_r^\dagger(\mathbf{p})e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + c_r^\dagger(\mathbf{p})u_r^\dagger(\mathbf{p})e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}) \right. \\
&\quad \left. \times (c_s(\mathbf{q})u_s(\mathbf{q})e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} + d_s^\dagger(\mathbf{q})v_s(\mathbf{q})e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}) \right] \\
&= qN \left[ \sum_{r,s} \sum_{\mathbf{p}} \frac{m}{E_{\mathbf{p}}} (d_r(\mathbf{p})d_s^\dagger(\mathbf{p}) + c_r^\dagger(\mathbf{p})c_s(\mathbf{p})) \frac{E_{\mathbf{p}}}{m} \delta_{rs} \right] \\
&= q \sum_{r,\mathbf{p}} (N_r(\mathbf{p}) - \bar{N}_r(\mathbf{p})) : (100).
\end{aligned}$$

■  $S_p$  の固有方程式 (102) の導出 (Dirac 場がスピン 1/2 の粒子を記述することの証明)

$$\begin{aligned}
S_p &\equiv \frac{1}{2} \int d^3x N[\psi^\dagger \sigma_p \psi] : (101) \\
&= \frac{1}{2} \int d^3x N \left[ \sum_{r,s} \sum_{\mathbf{p},\mathbf{q}} \frac{m}{V \sqrt{E_p E_q}} (-1)^{r+1} (d_r(\mathbf{p}) v_r^\dagger(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} + c_r^\dagger(\mathbf{p}) u_r^\dagger(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x}) \right. \\
&\quad \left. \times (c_s(\mathbf{q}) u_s(\mathbf{q}) e^{-iq \cdot x} - d_s^\dagger(\mathbf{q}) v_s(\mathbf{q}) e^{iq \cdot x}) \right] \\
&= \frac{\hbar}{2} \sum_{r,\mathbf{p}} (-1)^{r+1} (N_r(\mathbf{p}) + \bar{N}_r(\mathbf{p})) \quad \rightarrow \quad S_p \text{ の固有方程式 (102)}.
\end{aligned}$$

■ 場の演算子に対する反交換関係 (104) の導出 式 (104) はスピノル添字を明記すると, 式 (4.52b):

$$\{\psi_\alpha^\pm(x), \bar{\psi}_\beta^\mp(y)\} = i(i\cancel{\partial} + m)_{\alpha\beta} \Delta^\pm(x-y)$$

の意味である. 複号の上側について, 左辺は  $\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$  とすると, 場の展開係数の反交換関係 (97) より

$$\{\psi_\alpha^\pm(x), \bar{\psi}_\beta^\mp(y)\} = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_r \int d^3p \frac{m}{E_p} (u_r(\mathbf{p}) \bar{u}_r(\mathbf{p}))_{\alpha\beta} e^{-ip \cdot (x-y)}$$

と計算される. 一方, 右辺は式 (68):  $\Delta^+(x) \equiv -\frac{i}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \omega_k} e^{-ik \cdot x}$  より

$$i(i\cancel{\partial} + m)_{\alpha\beta} \Delta^+(x-y) = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{E_p} (\cancel{\not{p}} + m)_{\alpha\beta} e^{-ip \cdot (x-y)}$$

となる. これらはエネルギー射影演算子 (337) の満たす式 (340) (教科書の付録 A):

$$m \sum_r (u_r(\mathbf{p}) \bar{u}_r(\mathbf{p}))_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\cancel{\not{p}} + m)_{\alpha\beta}$$

により一致する. 複号の下側についても同様である.

#### 4.3.1 スピン統計定理

スピン 0 の粒子系 (スカラー場) とスピン 1/2 の粒子系 (Dirac 場) に関する知識を利用して, 粒子のスピンと統計性の関係に対する入門的な解説を与えることができる.

- Dirac 場 (スピン 1/2 の粒子を記述)

Bose-Einstein 統計に従うよう, 交換関係  $[c_r(\mathbf{p}), c_s^\dagger(\mathbf{p}')] = [d_r(\mathbf{p}), d_s^\dagger(\mathbf{p}')] = \delta_{rs} \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}$ , etc. で量子化.

↓

場のエネルギーは式 (98) の代わりに

$$H = \sum_{r,\mathbf{p}} E_p [N_r(\mathbf{p}) - \bar{N}_r(\mathbf{p})] \quad (109)$$

となり (導出は下記), 際限なく低くなり得る.

- 実 Klein-Gordon 場 (スピン 0 の粒子を記述)  
Fermi-Dirac 統計に従うよう, 反交換関係  $\{a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')\} = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ , etc. で量子化.

↓

場の観測量  $A(x), B(y)$  に対して, 微視的因果律

$$[A(x), B(y)] = 0, \quad \text{for } (x - y)^2 < 0 \quad (110)$$

が成立しなくなる (証明は下記).

一般にこのような困難を避けるには,

- 整数スピンを持つ粒子は Bose-Einstein 統計に従うように
- 半整数スピンを持つ粒子は Fermi-Dirac 統計に従うように

量子化しなければならない (スピン-統計定理).

#### 4.3.1 節, 式の導出など

■交換関係で量子化された Dirac 場のエネルギー (109) の導出 Dirac 場のエネルギー (98) の導出過程における式

$$H = \sum_{r, \mathbf{p}} E_{\mathbf{p}} N [-d_r(\mathbf{p})d_r^\dagger(\mathbf{p}) + c_r^\dagger(\mathbf{p})c_r(\mathbf{p})]$$

を正規順序化する際, 生成・消滅演算子  $d_r^\dagger(\mathbf{p}), d_r(\mathbf{p})$  を交換することになる. よって式 (109):

$$H = \sum_{r, \mathbf{p}} E_{\mathbf{p}} [N_r(\mathbf{p}) - \bar{N}_r(\mathbf{p})]$$

を得る.

■反交換関係で量子化された実 Klein-Gordon 場に対して, 微視的因果律 (110) が破られることの確認 実 Klein-Gordon 場の観測量 (式 (60),(62)) は  $X \equiv (\phi, \partial_\mu \phi)$  の 2 次形式

$$A = a_{ij} X_i X_j, \quad B = b_{ij} X_i X_j$$

の形をしており, 公式

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B, \quad [AB, C] = A\{B, C\} - \{A, C\}B$$

を利用すると, 交換子

$$[A(x), B(y)] = a_{ij} b_{kl} [(X_i X_j)_x, (X_k X_l)_y]$$

を

$$\begin{aligned} [X_i(x), X_j(y)] & \quad \text{i.e.} \quad [\phi(x), \phi(y)], \quad \frac{\partial}{\partial x^\mu} [\phi(x), \phi(y)], \quad \frac{\partial}{\partial y^\mu} [\phi(x), \phi(y)], \quad \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial y^\mu} [\phi(x), \phi(y)], \\ \{X_i(x), X_j(y)\} & \quad \text{i.e.} \quad \{\phi(x), \phi(y)\}, \quad \frac{\partial}{\partial x^\mu} \{\phi(x), \phi(y)\}, \quad \frac{\partial}{\partial y^\mu} \{\phi(x), \phi(y)\}, \quad \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial y^\mu} \{\phi(x), \phi(y)\} \end{aligned}$$

の項へと分解することができる。よって微視的因果律 (110) が成り立つ条件は、

$$\begin{aligned} [\phi(x), \phi(y)] &= 0 & \text{for } (x-y)^2 < 0 \\ \{\phi(x), \phi(y)\} &= 0 & \text{for } (x-y)^2 < 0 \end{aligned}$$

のいずれかが成り立つことである。しかし Klein-Gordon 場を Fermi-Dirac 統計に従うように反交換関係  $\{a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')\} = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ , etc. で量子化すると、「上のどちらの条件も成立しないことを示すのは容易である」(p.78, 1.6,7) [証明は問題 4.4].

#### 4.4 フェルミオンの伝播関数

フェルミオン場に関する時間順序化積を

$$\begin{aligned} T\{\psi(x)\bar{\psi}(x')\} &= \theta(t-t')\psi(x)\bar{\psi}(x') - \theta(t'-t)\bar{\psi}(x')\psi(x) \\ &= \begin{cases} \psi(x)\bar{\psi}(x') & (t > t' \text{ のとき}) \\ -\bar{\psi}(x')\psi(x) & (t' > t \text{ のとき}) \end{cases} \end{aligned}$$

のように定義する ( $t \equiv x^0, t' \equiv x'^0$ ). つまりボゾン場の時間順序化を正規化と同様にボゾン因子の交換によって行ったように、フェルミオン場の時間順序化もまた正規化と同様、フェルミオン因子の反交換によって行う。

フェルミオン伝播関数は

$$\langle 0|T\{\psi(x)\bar{\psi}(x')\}|0\rangle = \begin{cases} \langle 0|\psi(x)\bar{\psi}(x')|0\rangle & (t > t' \text{ のとき}) \\ -\langle 0|\bar{\psi}(x')\psi(x)|0\rangle & (t' > t \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義される。

- $t > t'$  の場合の伝播関数  $\langle 0|\psi(x)\bar{\psi}(x')|0\rangle$   
 $c$  粒子 (以下, 電子) が時空点  $x'$  において生成され,  $x$  まで伝播して消滅する過程を表す.
- $t < t'$  の場合の伝播関数  $-\langle 0|\bar{\psi}(x')\psi(x)|0\rangle$   
 $d$  粒子 (以下, 陽電子) が時空点  $x$  において生成され,  $x'$  まで伝播して消滅する過程を表す.
- ★ 中間子の伝播関数に対して指摘したように, これを額面通りに解釈してはならない.

そのような過程として, 具体的には Compton 散乱 (光子-電子散乱) における中間状態が考えられる (図 13 参照). ここで約束として, 矢印を場  $\bar{\psi}$  の関係する点  $x'$  から場  $\psi$  の関係する点  $x$  に向けて描いている. 言い換えれば電子の矢は時間と同じ向きであり, 陽電子の矢は時間と逆向きに描く. このとき接続したフェルミオン線に沿って, 矢は一方通行になる. そして図 13 の 2 つのダイアグラムは連続的な変形によって互いに移行できる, トポロジ的に等価な関係となることが保証される.

そこで図 13 の 2 つのグラフをまとめて図 14 のような単一の Feynman グラフで表す. Feynman グラフでは内線  $xx'$  における点  $x, x'$  の時間的前後は指定されない. これに対し慣習的に始状態の粒子は左からダイアグラムに入る外線で, 終状態の粒子はダイアグラムから右側に出る外線で表され, 時間の向きを伴った線と見なされる. フェルミオンの外線は矢の向きで, 粒子 (電子) と反粒子 (陽子) を区別する.

フェルミオン伝播関数は

$$\langle 0|T\{\psi(x)\bar{\psi}(x')\}|0\rangle = iS_F(x-x') \quad (111)$$

と表される. ここに  $S_F$  関数は

$$S_F(x) = \theta(t)S^+(x) - \theta(-t)S^-(x) = (i\cancel{\partial} + m)\Delta_F(x) \quad (4.62)$$

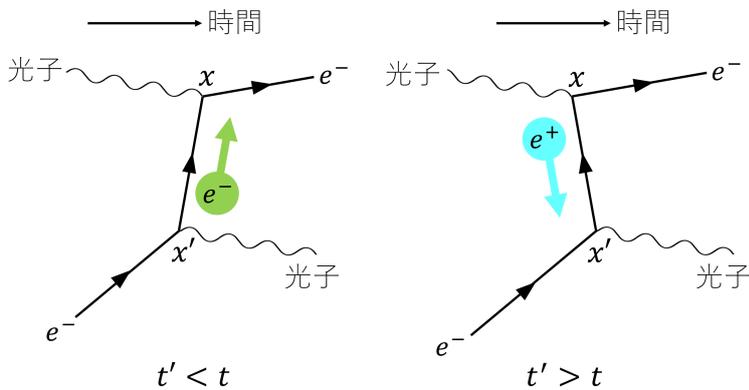


図 13 Compton 散乱への寄与を表す時間順序化グラフ

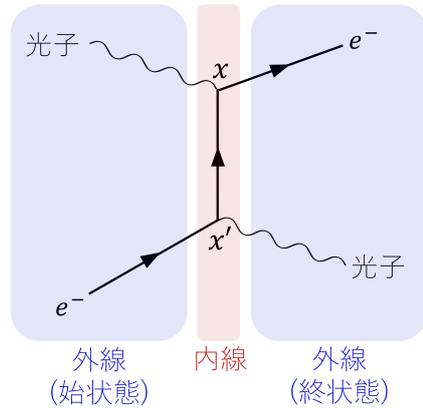


図 14 Compton 散乱への寄与を表す Feynman グラフ

で定義される (この  $S_F$  もフェルミオン伝播関数と呼ぶ, 上式 (111) の導出は下記).

$\Delta_F(x)$  の積分表示 (76) より,  $S_F(x)$  の積分表示は

$$S_F(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot x} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

となる.

#### 4.4 節, 式の導出など

##### ■フェルミオン伝播関数の式 (111) の導出

$$\begin{aligned} & \langle 0 | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(x') \} | 0 \rangle \\ &= \begin{cases} \langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(x') | 0 \rangle = \langle 0 | \psi^+(x) \bar{\psi}^-(x') | 0 \rangle = \langle 0 | \{ \psi^+(x), \bar{\psi}^-(x') \} | 0 \rangle = iS^+(x-x') & (t > t' \text{ のとき}) \\ -\langle 0 | \bar{\psi}(x') \psi(x) | 0 \rangle = -\langle 0 | \bar{\psi}^+(x') \psi^-(x) | 0 \rangle = -\langle 0 | \{ \psi^-(x), \bar{\psi}^+(x') \} | 0 \rangle = -iS^-(x-x') & (t < t' \text{ のとき}) \end{cases} \\ &= \pm iS^\pm(x-x') \quad (t \geq t' \text{ のとき}) \\ &= iS_F(x-x') : (111). \end{aligned}$$

#### 4.4 について

##### ■フェルミオン伝播関数の解釈について

- $t > t'$  の場合の伝播関数  $\langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(x') | 0 \rangle$  において,

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(x) \text{ は } c_r^\dagger(\mathbf{p}) \text{ を含む} & \rightarrow \bar{\psi}(x) | 0 \rangle \text{ は } c \text{ 粒子 (電子) が } x' \text{ に局在した状態,} \\ \psi(x) \text{ は } c_r(\mathbf{p}) \text{ を含む} & \rightarrow \langle 0 | \psi(x) \text{ は } c \text{ 粒子 (電子) が } x \text{ に局在した状態} \end{aligned}$$

と解釈できる.

- $t < t'$  の場合の伝播関数  $-\langle 0 | \bar{\psi}(x') \psi(x) | 0 \rangle$  において,

$$\begin{aligned} \psi(x) \text{ は } d_r^\dagger(\mathbf{p}) \text{ を含む} & \rightarrow \psi(x) | 0 \rangle \text{ は } d \text{ 粒子 (陽電子) が } x \text{ に局在した状態,} \\ \bar{\psi}(x') \text{ は } d_r(\mathbf{p}) \text{ を含む} & \rightarrow \langle 0 | \bar{\psi}(x') \text{ は } d \text{ 粒子 (陽電子) が } x' \text{ に局在した状態} \end{aligned}$$

と解釈できる。

## 4.5 電磁的相互作用とゲージ不変性

### QED のラグランジアン密度

電磁場との相互作用がある場合の Dirac 場のラグランジアン密度は、自由 Dirac 場のラグランジアン密度 (84): $\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi$  において

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu \equiv \partial_\mu - ieA_\mu \quad (112)$$

と置き換えて得られるものと仮定する (説明は下記). 自由電磁場項  $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$  を含めると (5.1 節), 完全なラグランジアン密度は

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(iD\!\!\!/ - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (113)$$

あるいは

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi + \mathcal{L}_1 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad \mathcal{L}_1 \equiv e\bar{\psi}\mathbf{A}\psi : \text{相互作用項}$$

で与えられる。

### ゲージ不変性

電磁ポテンシャルを  $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu f$  と変化させても導かれる電磁場  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  は変化しない。また電磁場のゲージ変換  $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu f$  と同時に Dirac 場に局所的な位相変換

$$\psi_l(x) \rightarrow \psi_l(x)e^{ief(x)}, \quad \bar{\psi}_l(x) \rightarrow \bar{\psi}_l(x)e^{-ief(x)}$$

を施せばラグランジアン密度 (113) は (従って理論は) 不変に留まる (この位相変換が局所的と呼ばれるのは、位相  $\pm ef(x)$  が  $x$  に依存するからである)。電磁場と Dirac 場の変換を一括してゲージ変換と呼ぶ。逆に言えば、Dirac 場の局所的位相変換に対して不変なラグランジアン密度を得るには  $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu f$  と変換するゲージ場  $A_\mu$  を導入して、極小置換  $\partial_\mu \rightarrow D_\mu \equiv \partial_\mu - ieA_\mu$  を施せば良い [11, pp.218–219].

理論のゲージ不変性から得られる保存する流れは、自由 Dirac 場の場合と同じ電磁カレント (88): $s^\alpha = -e\bar{\psi}\gamma^\alpha\psi$  となる [導出は本稿次節]。相互作用項は保存するカレントと電磁場の結合項となっている。

$$\mathcal{L}_1 = -s_\alpha A^\alpha.$$

### 4.5 節, 式の導出など

教科書の説明を多少, 補足しつつ式の導出などを行う。

■極小置換 置き換え (112): $\partial_\mu \rightarrow D_\mu$  は極小置換と呼ばれる。これをボトムアップ式に意味付ける発見的な議論を行う (ここでは  $c$  と  $\hbar$  を明記する)。質量  $m$ , 電荷  $q$  の粒子を古典的に考え, 粒子の速度を  $\mathbf{v}$ , 粒子を記述するラグランジアンを  $L$ , ハミルトニアンを  $H$  と書く。  $\mathbf{P} \equiv \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}$  は粒子の正準運動量である。粒子の力学的運動量  $\mathbf{p} \equiv \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$  とエネルギー  $E \equiv \sqrt{m^2c^4 + \mathbf{p}^2c^2}$  は電磁場がある場合,

$$\text{式 (30): } \mathbf{p} = \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{p} = \mathbf{P} - \frac{q}{c}\mathbf{A},$$

$$\text{式 (31): } E = H \rightarrow E = H - q\phi$$

と置き換わる (問題 1.2). これに対応して非相対論的量子力学では,  $\psi$  を波動関数とした自由粒子の Schrödinger 方程式

$$\frac{1}{2m}(-i\hbar\nabla)^2\psi = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi$$

において

$$-i\hbar\nabla \rightarrow -i\hbar\nabla - \frac{q}{c}\mathbf{A}, \quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi$$

と置き換えると電磁場中の粒子の正しい波動方程式

$$\frac{1}{2m}\left(-i\hbar\nabla - \frac{q}{c}\mathbf{A}\right)^2\psi = \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi\right)\psi$$

が得られる [1, p.177]. この置き換えは

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu \equiv \partial_\mu + \frac{iq}{\hbar c}A_\mu$$

とまとめられる. ここで電荷  $q$  を電子の電荷  $-e$  にとり, 自然単位系を採用して  $c = \hbar = 1$  としたものが極小置換の式 (112) である.

■ゲージ不変性 QED のラグランジアン密度 (113) のゲージ不変性を確かめる. まず, 電磁テンソル  $F_{\mu\nu}$  は, 従ってラグランジアン密度 (113) における自由電磁場の項  $-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$  はゲージ変換  $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu f$  に対して不変である. 実際ある電磁ポテンシャル  $A^\mu$  から作られる電磁テンソルを  $F_{\mu\nu}$ ,  $f$  を時空座標の任意の関数として電磁ポテンシャル  $A'^\mu \equiv A^\mu + \partial^\mu f$  から作られる電磁テンソルを  $F'_{\mu\nu}$  と書くと,

$$F'_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu = \partial_\mu(A_\nu + \partial_\nu f) - \partial_\nu(A_\mu + \partial_\mu f) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu}$$

である. そこで自由 Dirac 場の項  $\mathcal{L}_0 \equiv \bar{\psi}(i\partial - m)\psi$  と相互作用項  $\mathcal{L}_1 \equiv e\bar{\psi}\mathbf{A}\psi$  に対して  $\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1$  の不変性を示せば十分である. ゲージ変換

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu f, \quad \psi \rightarrow \psi e^{ief}, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} e^{-ief} \quad (114)$$

に対して

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &\rightarrow (\bar{\psi} e^{-ief})(i\partial - m)(\psi e^{ief}) = \mathcal{L}_0 + \bar{\psi} i(i\partial f)\psi = \mathcal{L}_0 - e\bar{\psi}(\partial f)\psi, \\ \mathcal{L}_1 &\rightarrow e(\bar{\psi} e^{-ief})(\mathbf{A} + \partial f)(\psi e^{ief}) = \mathcal{L}_1 + e\bar{\psi}(\partial f)\psi \end{aligned}$$

だから  $\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1$  は不変である.

#### 4.5 について

■相互作用ラグランジアン密度  $\mathcal{L}_1 = -s_\alpha A^\alpha$  は「保存する流れ……を電磁場に結合させる働きをする」(p.83, l.10,11) について これは電磁場と相互作用する荷電粒子の古典論と全く同じ結果である [4, p.80].

■Dirac 場のゲージ変換について 非相対論的量子力学においても, 電磁場と相互作用する荷電粒子の波動関数の位相変換により, 理論のゲージ不変性が回復する [1, pp.179–182].

■「この一括変換に対して……電荷保存則が再び導かれることが容易に示される」(p.84, 1.12,13) について  $\mathcal{L}_0$  の式 (4.67),  $\mathcal{L}_I$  の式 (4.68), ゲージ変換の式 (4.69) より

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} \delta A_\mu = -s^\mu (\partial_\mu f), \quad \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \delta \psi \right) = \partial_\mu [(\bar{\psi} i \gamma^\mu) (i e f \psi)] = \partial_\mu (s^\mu f), \quad \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \delta \bar{\psi} \right) = 0$$

であり, ここからカレントに対する連続の式が導かれる.

$$0 = \delta \mathcal{L} = -s^\mu (\partial_\mu f) + \partial_\mu (s^\mu f) + 0 = f \partial_\mu s^\mu, \quad \therefore \partial_\mu s^\mu = 0.$$

## 練習問題 (第 4 章)

4.2  $S(x), S_F(x)$  がそれぞれ斉次, 非斉次 Dirac 方程式の解であることの確認

$$(i\partial - m)(i\partial + m) = -(\partial^2 + m^2) = -(\partial^2 + m^2)$$

および, 3.3 節の式 (71) と章末問題 3.3 の結果

$$(\partial^2 + m^2)\Delta(x) = 0, \quad (\partial^2 + m^2)\Delta_F(x) = -\delta^{(4)}(x)$$

より,

$$S(x) = (i\partial + m)\Delta(x) : (4.54b), \quad S_F(x) = (i\partial + m)\Delta_F(x) : (4.62)$$

はそれぞれ,

$$(i\partial - m)S(x) = -(\partial^2 + m^2)\Delta(x) = 0, \quad (i\partial - m)S_F(x) = -(\partial^2 + m^2)\Delta_F(x) = \delta^{(4)}(x)$$

を満たす.

4.4 反交換関係で量子化された実 Klein-Gordon 場に対して, 微視的因果律 (110) が破られることの確認 (続き)

$$\begin{aligned} [\phi(x), \phi(y)] &= [\phi^+(x), \phi^-(y)] + [\phi^-(x), \phi^+(y)] \\ &= \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \frac{1}{2V(\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'})^{1/2}} \left\{ [a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] e^{-i(k \cdot x - k' \cdot y)} + [a^\dagger(\mathbf{k}), a(\mathbf{k}')] e^{-i(k \cdot y - k' \cdot x)} \right\} \end{aligned}$$

における最右辺の交換子は

$$\begin{aligned} [a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] &= \{a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')\} - 2a^\dagger(\mathbf{k}')a(\mathbf{k}) \\ &= \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} - 2a^\dagger(\mathbf{k}')a(\mathbf{k}), \\ [a^\dagger(\mathbf{k}), a(\mathbf{k}')] &= \{a(\mathbf{k}'), a^\dagger(\mathbf{k})\} - 2a(\mathbf{k}')a^\dagger(\mathbf{k}) \\ &= \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} - 2a(\mathbf{k}')a^\dagger(\mathbf{k}) \end{aligned}$$

に修正されるため、交換子  $[\phi(x), \phi(y)]$  には付加的な項が現れる。

$$\begin{aligned}
[\phi(x), \phi(y)] &= i\Delta(x-y) - \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \frac{1}{V(\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'})^{1/2}} \left\{ a^\dagger(\mathbf{k}')a(\mathbf{k})e^{-i(\mathbf{k}\cdot y - \mathbf{k}'\cdot x)} + a(\mathbf{k}')a^\dagger(\mathbf{k})e^{-i(\mathbf{k}\cdot y - \mathbf{k}'\cdot x)} \right\} \\
&= i\Delta(x-y) - \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \frac{1}{V(\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'})^{1/2}} \{a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')\} \left\{ e^{i(\mathbf{k}\cdot x - \mathbf{k}'\cdot y)} + e^{-i(\mathbf{k}\cdot x - \mathbf{k}'\cdot y)} \right\} \\
&\quad (\{\dots\} \text{内の第2項で } \mathbf{k}, \mathbf{k}' \text{ を入れ替えた}) \\
&= i\Delta(x-y) - \frac{2}{V} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}} \cos\{\mathbf{k}\cdot(x-y)\} \\
&\rightarrow i\Delta(x-y) - 2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \omega_{\mathbf{k}}} \cos\{\mathbf{k}\cdot(x-y)\}. \quad (V \rightarrow \infty)
\end{aligned}$$

時空点  $x, y$  が空間的に隔たるとき  $((x-y)^2 < 0)$ ,  $x$  と  $y$  が同時刻となる座標系をとることができる。既に見たように、そのような座標系では  $i\Delta(x-y)$  はゼロになる。ところが付加的な項は  $\mathbf{k}$  の偶関数の積分となっており、ゼロにはならない。そしてこの項も  $\Delta$  関数と同様、相対論的な不変性が明白な形に書き換えられる。

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \omega_{\mathbf{k}}} \cos\{\mathbf{k}\cdot(x-y)\} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4k \delta(k^2 - m^2) e^{-i\mathbf{k}\cdot(x-y)}.$$

よって任意の座標系で  $[\phi(x), \phi(y)] \neq 0$  である。

また交換関係 (65):  $[\phi^+(x), \phi^-(y)] = i\Delta^+(x-y)$  は反交換関係

$$\{\phi^+(x), \phi^-(y)\} = i\Delta^+(x-y)$$

に置き換わり、

$$\{\phi(x), \phi(y)\} = \{\phi^+(x), \phi^-(y)\} + \{\phi^-(x), \phi^+(y)\} = i(\Delta^+(x-y) + \Delta^+(y-x)) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \omega_{\mathbf{k}}} \cos\{\mathbf{k}\cdot(x-y)\}$$

となるので、同様に空間的に隔たる時空点  $x, y$  に対して  $\{\phi(x), \phi(y)\} \neq 0$  である。

#### 4.5

■カイラル位相変換と軸性ベクトルカレント  $\gamma_5$  は Hermite なので (教科書の付録 A.1, 本稿の式 (316)), カイラル位相変換

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \exp(i\alpha\gamma_5)\psi(x), \quad \psi^\dagger(x) \rightarrow \psi'^\dagger(x) = \psi^\dagger(x)\exp(-i\alpha\gamma_5)$$

はユニタリー変換である。ラグランジアン密度  $\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi$  における第1項は

$$\begin{aligned}
i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi &\rightarrow i(\psi^\dagger e^{-i\alpha\gamma_5})\gamma^0\gamma^\mu\partial_\mu(e^{i\alpha\gamma_5}\psi) \\
&= i\psi^\dagger(e^{-i\alpha\gamma_5}\gamma^0\gamma^\mu e^{i\alpha\gamma_5})\partial_\mu\psi \\
&= i\psi^\dagger(-\gamma^0 e^{-i\alpha\gamma_5} + \{e^{-i\alpha\gamma_5}, \gamma^0\})(-e^{i\alpha\gamma_5}\gamma^\mu + \{e^{i\alpha\gamma_5}, \gamma^\mu\})\partial_\mu\psi \\
&= i\psi^\dagger\gamma^0(e^{-i\alpha\gamma_5}e^{i\alpha\gamma_5})\gamma^\mu\partial_\mu\psi \\
&= i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi
\end{aligned}$$

と変換し、不変に留まる。ただし第3の等号では  $\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$  (教科書の付録 A.1, 本稿の式 (316)) を用いた。同様に考えると第2項は

$$m\bar{\psi}\psi \rightarrow m(\psi^\dagger e^{-i\alpha\gamma_5})\gamma^0(e^{i\alpha\gamma_5}\psi) = -m\bar{\psi}\psi$$

と変換し、符号を変える。以上より  $\mathcal{L}$  は質量ゼロの極限においてのみ、カイラル位相変換に関して不変となる。

これに付随する、保存されるカレントを調べよう。無限小のカイラル位相変換による場の変化は

$$\delta\psi = i\alpha\gamma_5\psi, \quad \delta\bar{\psi} = \psi^\dagger(-i\alpha\gamma_5)\gamma^0 = i\alpha\gamma_5\bar{\psi}$$

なので、保存するカレントは

$$f^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\delta\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})}\delta\bar{\psi} = (i\bar{\psi}\gamma^\mu)(i\alpha\gamma_5\psi) = -\alpha J_A^\mu, \\ J_A^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi$$

と計算される。この  $J_A^\mu$  が軸性ベクトルであることについては、教科書の付録における (A.53)(あるいは本稿の式 (304)) を参照。

■ “右手型” “左手型” の場 Dirac 方程式に射影演算子  $P_L, P_R$  を作用させる。式 (316)  $\{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0$  により  $P_{L,R} = \frac{1}{2}(1 \mp \gamma_5)$  に対して  $P_{L,R}\gamma^\mu = \gamma^\mu P_{R,L}$  なので

$$0 = P_{L,R}(i\partial - m)\psi = (i\partial P_{R,L} - mP_{L,R})\psi = i\partial\psi_{R,L} - m\psi_{L,R}$$

となるから、運動方程式

$$i\partial\psi_L - m\psi^R = 0, \quad i\partial\psi_R - m\psi^L = 0$$

を得る。これは第 2 巻における場の運動方程式 (16.92) の確認作業に当たる。(式 (16.92) との添字 L の位置の違いに意味はない。単なる教科書の表記ゆれである。) 「これらの式は質量がゼロの極限において互いに分離する」(第 2 巻 p.458, 1.1)。この極限での場の方程式  $i\partial\psi^L = 0$  は、ラグランジアン密度

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}_L\partial\psi_L$$

から導かれる。 $m = 0$  の極限では  $(1 - \gamma_5)/2$  はヘリシティ射影演算子となるので、 $\psi_L$  は負のヘリシティだけを持つフェルミオンと、正のヘリシティだけを持つ反フェルミオンを記述する(教科書の付録 A.6)。 $\psi_L$  を Weyl 場と呼ぶ。

## 第5章 光子：共変な理論

本稿では既に自然単位系 (6.1 節) を採用し,  $c = 1, \hbar = 1$  としている箇所がある.  
やや長くなるが, 概要として序文を引用する.

第1章における電磁場の議論では, 横波の輻射場だけが独立な力学的自由度に対応することをふまえて横波だけを量子化した. そこでは電荷の間に働く同時刻の Coulomb 相互作用が電荷分布から完全に決定される古典的なポテンシャルとして扱われた. このような量子電磁力学の定式化は古典論と密接に関係しており, 各項の解釈も馴染み深いものとなる. しかしながら場を横波成分と縦波成分に分解する措置は明らかに座標系に依存するものであり, 理論の Lorentz 不変性を隠してしまう.

量子電磁力学の完全な展開のためには, Lorentz 共変性が明白な定式化が不可欠である. これは理論の繰り込み可能性を確立するために, すなわち摂動のすべての次数において有限で自己無撞着な結果を得るために必要とされる. また実際に高次の輻射補正を計算するためにも, 共変な形式は極めて有用である.

本章では電磁気学の共変な理論を展開する. 5.1 節において 4 元ポテンシャル  $A^\mu(x) = (\phi, \mathbf{A})$  の 4 つの成分をすべて同等に扱う共変な古典電磁気学の形式を提示する. これは系が実際に持つ自由度よりも多くの力学的自由度を導入することになるが, 余分な自由度は後から適切な拘束条件を課することによって除かれる.

5.2 節では 4 元ポテンシャル  $A^\mu(x)$  のすべての成分に量子化を施して量子場の理論を導くが, これは表面的には第1章のそれと異なって見える. しかしながら, これらの 2 通りの定式化は互いに等価である. そのことは 5.3 節で光子の伝播関数を論じる際に見ることにする.

### 5.1 古典電磁場

本節は古典電磁気学の復習にあたることを踏まえ, 本稿では自由電磁場の Fourier 展開に焦点を当てる形で要約し, それ以外については多少, 省略する. 教科書では電磁テンソルを

$$F^{\mu\nu} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu \quad (5.5)$$

で定義していることを特筆しておく (右辺の 2 つの項の順序に注意).

古典電磁気学において自由電磁場はラグランジアン密度

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (115)$$

によって記述され, 特に電磁場  $A^\mu$  として Lorenz 条件

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad (116)$$

を満たすものを考えると, 場の方程式として波動方程式

$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu = 0 \quad (117)$$

が導かれる. Lorenz 条件を採用することの利点は, その式 (116) が座標変換に対して共変的であることと, 場の方程式が波動方程式 (117) に単純化されることにある.

ここで便宜的に空間を一辺  $L$ , 体積  $V = L^3$  の立方体領域と見なして周期境界条件

$$A^\mu(0, y, z, t) = A^\mu(L, y, z, t), \quad \text{etc.}$$

を課すと, 離散的な 4 元波数ベクトル

$$k = (\omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}), \quad \mathbf{k} = \frac{2\pi}{L} \mathbf{n}, \quad \omega_{\mathbf{k}} \equiv |\mathbf{k}|$$

を用いて ( $\mathbf{n}$  は整数を成分に持つベクトル), 波動方程式 (117) の解は

$$A^\mu(x) = A^{\mu+}(x) + A^{\mu-}(x), \quad (118)$$

$$A^{\mu+}(x) \equiv \sum_{\mathbf{k}, r} \left( \frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} \varepsilon_r^\mu(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot x}, \quad (119)$$

$$A^{\mu-}(x) \equiv \sum_{\mathbf{k}, r} \left( \frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} \varepsilon_r^\mu(\mathbf{k}) a_r^\dagger(\mathbf{k}) e^{ik \cdot x} \quad (120)$$

と Fourier 展開される ( $r = 0, 1, 2, 3$ ). ただし  $k \cdot x = \omega_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$  は 4 元内積である ( $x \equiv (t, \mathbf{x})$ ). また, この段階では展開係数  $a_r(\mathbf{k}), a_r^\dagger(\mathbf{k})$  は演算子ではなく通常の数であり, 後の都合のために因子  $(1/2V\omega_{\mathbf{k}})^{1/2}$  をくくり出している. 展開係数  $a_r(\mathbf{k}), a_r^\dagger(\mathbf{k})$  を互いに複素共役にとり  $\varepsilon_r^\mu(\mathbf{k})$  を実数の 4 元ベクトルとすると, 電磁場  $A^\mu$  が実数であることが保証される.  $\varepsilon_r^\mu(\mathbf{k})$  は偏極ベクトルと呼ばれる.

例えば特定の波数ベクトル  $\mathbf{k}$  を考え  $\mathbf{k}/|\mathbf{k}| = (0, 0, 1)$  となる座標系をとり,  $\varepsilon_1(\mathbf{k}), \varepsilon_2(\mathbf{k}), \varepsilon_3(\mathbf{k}) \equiv \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$  を互いに直交する単位ベクトル

$$\varepsilon_1(\mathbf{k}) = (1, 0, 0), \quad \varepsilon_2(\mathbf{k}) = (0, 1, 0), \quad \varepsilon_3(\mathbf{k}) = (0, 0, 1)$$

として

$$\varepsilon_0^\mu = n^\mu \equiv (1, \mathbf{0}), \quad (121)$$

$$\varepsilon_r^\mu = (0, \varepsilon_r(\mathbf{k})), \quad r = 1, 2, 3 \quad (122)$$

とすると, 電磁場  $A^\mu \equiv (\phi, \mathbf{A})$  の Fourier 展開 (118),(119),(120) において  $r = 0$  の項はスカラーポテンシャル  $\phi$  を,  $r = 1, 2$  の項はベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  の横波成分を,  $r = 3$  の項はベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  の縦波成分を成す. このため  $\varepsilon_0^\mu$  はスカラー偏極,  $\varepsilon_1^\mu, \varepsilon_2^\mu$  は横偏極,  $\varepsilon_3^\mu$  は縦偏極と呼ばれる. このように電磁場を横波成分に限定せずに 4 つの偏極ベクトルを導入したことにより, 電磁場の Fourier 展開 (118),(119),(120) は座標変換に対して共変的な形となる. ところが電磁波は本来, 横波だから,  $r = 0, 3$  の 2 つの偏極状態は系の実際に持つ自由度に比べて余分な自由度であることになる. これについては 5.2 節以降で改めて論じられる.

このとき

$$\varepsilon_3^\mu(\mathbf{k}) = \frac{k^\mu - (k \cdot \mathbf{n})n^\mu}{[(k \cdot \mathbf{n})^2 - k^2]^{1/2}} \quad (5.22c)$$

と書けることが, 後に [5.3 節で] 有用となる [確認は下記].

任意の座標系では偏極ベクトルの成分は式 (121), 式 (122) のように具体的には指定されず,

$$\zeta_0 = -1, \quad \zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = 1$$

として偏極ベクトル (121),(122) の満たす性質

$$\varepsilon_r(\mathbf{k}) \cdot \varepsilon_s(\mathbf{k}) \equiv \varepsilon_{r\mu}(\mathbf{k})\varepsilon_s^\mu(\mathbf{k}) = -\zeta_r\delta_{rs}, \quad r, s = 0, 1, 2, 3, \quad (123)$$

$$\sum_r \zeta_r \varepsilon_r^\mu(\mathbf{k})\varepsilon_r^\nu(\mathbf{k}) = -g^{\mu\nu} \quad (124)$$

のみが要請される (上式 (123) 最右辺では  $r$  について和をとらない, 導出は下記). 座標系を変えるとベクトルの成分は変化するため, 偏極ベクトルの具体的な表式 (121),(122) は特定の座標系でしか成り立たないのに対し, 偏極ベクトルの正規直交性 (123) と完全性の条件 (124) は座標変換に対して共変的であり, 任意の座標系で成り立つ関係式である.

電磁場に正準量子化を施す際, 電磁場  $A^\mu$  と共役な場

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu}$$

(ドットは時間微分を表す) を Heisenberg 描像の演算子と見なして同時刻交換関係

$$[A^\mu(\mathbf{x}, t), \pi^\nu(\mathbf{x}', t)] = ig^{\mu\nu}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (125)$$

を課す. ところがラグランジアン密度 (115) に対して共役な場は

$$\pi^\mu = -F^{0\mu}, \quad \therefore \pi^0 = 0 \quad (126)$$

となり (導出は下記), これは交換関係 (125) を満たすことができない. そこでラグランジアン密度を

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) \quad (127)$$

に改める. これは Fermi によって提案されたものである. このとき再び Lorenz 条件の下での場の方程式 (117) が導かれるため, 電磁場の Fourier 展開 (118),(119),(120) は変更されない (証明は下記). またラグランジアン密度 (127) はどの成分もゼロとならない共役な場

$$\pi^\mu = -\dot{A}^\mu \quad (128)$$

を与えるため (導出は下記), 正準量子化に適している. (量子化の後に Lorenz 条件を適正に考慮する必要がある.)

## 5.1 節, 式の導出など

適宜, 教科書の説明を補いつつ式の導出などを行う.

### ■偏極ベクトルの性質 (123),(124)

$$\text{式 (121)} : \varepsilon_0^\mu = (1, \mathbf{0}), \quad \text{式 (122)} : \varepsilon_r^\mu = (0, \boldsymbol{\varepsilon}_r), \quad r = 1, 2, 3$$

で与えられる偏極ベクトル  $\varepsilon_r^\mu = (\varepsilon_0^\mu, \boldsymbol{\varepsilon}_r)$  は正規直交性 (123):

$$\begin{aligned} \varepsilon_r \cdot \varepsilon_s &= \varepsilon_r^0 \varepsilon_s^0 - \boldsymbol{\varepsilon}_r \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_s \\ &= \begin{cases} (\varepsilon_0^0)^2 = 1 = -\zeta_0\delta_{00} & (r = s = 0) \\ 0 \cdot 1 - \mathbf{0} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_s = 0 = \zeta_0\delta_{0s} & (r = 0, s = 1, 2, 3) \\ -\boldsymbol{\varepsilon}_r \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_s = -\delta_{rs} = -\zeta_r\delta_{rs} & (r, s = 1, 2, 3) \end{cases} \\ &= -\zeta_r\delta_{rs} \end{aligned}$$

を満たす.

また

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = (1, 0, 0), \quad \boldsymbol{\varepsilon}_2 = (0, 1, 0), \quad \boldsymbol{\varepsilon}_3 = (0, 0, 1)$$

より  $i, j = 1, 2, 3$  に対して

$$\begin{aligned} (\varepsilon_1^i)^2 + (\varepsilon_2^i)^2 + (\varepsilon_3^i)^2 &= 1, \\ \sum_{r=1}^3 \varepsilon_r^i \varepsilon_r^j &= 0, \quad i \neq j \end{aligned}$$

であり, これらを

$$\sum_{r=1}^3 \varepsilon_r^i \varepsilon_r^j = -g^{ij} \quad (129)$$

とまとめられることに注意すると, 完全性の条件 (124):

$$\begin{aligned} \sum_r \zeta_r \varepsilon_r^\mu \varepsilon_r^\nu &= -\varepsilon_0^\mu \varepsilon_0^\nu + \sum_{r=1}^3 \varepsilon_r^\mu \varepsilon_r^\nu \\ &= \begin{cases} -(\varepsilon_0^0)^2 = -1 = -g^{00} & (\mu = \nu = 0) \\ -1 \cdot 0 + 0 \cdot \sum_{r=1}^3 \varepsilon_r^i = 0 = -g^{0i} & ((\mu, \nu) = (0, i), i = 1, 2, 3) \\ \sum_{r=1}^3 \varepsilon_r^i \varepsilon_r^j = -g^{ij} & ((\mu, \nu) = (i, j), i, j = 1, 2, 3, \therefore \text{式 (129)}) \end{cases} \\ &= -g^{\mu\nu} \end{aligned}$$

が満たされていることが分かる.

■ラグランジアン密度 (115):  $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$  から導かれる共役な場 (126):  $\pi^\mu = -F^{0\mu}$  自由電磁場のラグランジアン密度を式 (115):  $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$  で与えると, 電磁場に共役な場の式 (126):  $\pi^\mu = -F^{0\mu}$  が導かれる. 実際,

$$\pi^\lambda \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\lambda)} = -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_\lambda)} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

において

$$F_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_\lambda)} F^{\mu\nu} = F_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_\lambda)} (g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta}) = (g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\mu\nu}) \frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_\lambda)} F_{\alpha\beta} = F^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_\lambda)} F_{\alpha\beta}$$

に注意すると

$$\begin{aligned} \pi^\lambda &= -2 \times \frac{1}{4} \left\{ \frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_\lambda)} F_{\mu\nu} \right\} F^{\mu\nu} = -2 \times \frac{1}{4} \left\{ \frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_\lambda)} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \right\} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\ &= -2 \times \frac{1}{4} (\delta_\mu^0 \delta_\nu^\lambda - \delta_\nu^0 \delta_\mu^\lambda) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\ &= -(\partial^0 A^\lambda - \partial^\lambda A^0) = -F^{0\lambda} : (126) \end{aligned}$$

を得る.

■ラグランジアン密度 (115),(127) の等価性 練習問題 5.1 参照. Fermi のラグランジアン密度 (127): $\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu)$  は (質量  $m = 0$  の) Klein-Gordon 場に対するそれと類似しており, Klein-Gordon 方程式が導かれるのと同様に  $A^\mu$  に対する波動方程式が導かれる.

■ラグランジアン密度 (115): $\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu)$  から導かれる共役な場 (128): $\pi^\mu = -\dot{A}^\mu$  Fermi の提案したラグランジアン密度 (115): $\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu)$  に対して共役な場が式 (128): $\pi^\mu = -\dot{A}^\mu$  で与えられることが次のように確かめられる.

$$\begin{aligned}\pi^\lambda &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\lambda)} = -2 \times \frac{1}{2}(\partial^\mu A^\nu) \frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_\lambda)}(\partial_\mu A_\nu) \\ &= -(\partial^\mu A^\nu) \delta^0_\mu \delta^\lambda_\nu \\ &= -\partial^0 A^\lambda \\ &= -\dot{A}^\lambda.\end{aligned}$$

■式 (5.22c) の導出

$$\begin{aligned}k^\mu - (k \cdot n)n^\mu &= [(k^0, \mathbf{k}) - k^0(1, \mathbf{0})]^\mu = (0, \mathbf{k})^\mu, \\ (k \cdot n)^2 - k^2 &= (k^0)^2 - \{(k^0)^2 - \mathbf{k}^2\} = \mathbf{k}^2\end{aligned}$$

なので,

$$\varepsilon_3^\mu(\mathbf{k}) = \left(0, \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}\right)^\mu = \frac{k^\mu - (k \cdot n)n^\mu}{[(k \cdot n)^2 - k^2]^{1/2}}$$

と書き換えられる.

## 5.2 共変な量子化

ここでは自由電磁場の正準量子化について述べる. 電磁場  $A^\mu$  と共役な場 (128): $\pi^\mu = -\dot{A}^\mu$  を Heisenberg 描像における演算子と見なして, 正準交換関係として同時刻交換関係 (125):

$$\begin{aligned}[A^\mu(\mathbf{x}, t), A^\nu(\mathbf{x}', t)] &= 0, & [\pi^\mu(\mathbf{x}, t), \pi^\nu(\mathbf{x}', t)] &= 0, & [A^\mu(\mathbf{x}, t), \pi^\nu(\mathbf{x}', t)] &= ig^{\mu\nu} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ \Leftrightarrow [A^\mu(\mathbf{x}, t), A^\nu(\mathbf{x}', t)] &= 0, & [\dot{A}^\mu(\mathbf{x}, t), \dot{A}^\nu(\mathbf{x}', t)] &= 0, & [A^\mu(\mathbf{x}, t), \dot{A}^\nu(\mathbf{x}', t)] &= -ig^{\mu\nu} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\end{aligned}\quad (130)$$

を課するのが自然である. これは電磁場の Fourier 展開 (118),(119),(120) における展開係数  $a_r(\mathbf{k}), a_r^\dagger(\mathbf{k})$  に対する交換関係

$$[a_r(\mathbf{k}), a_s^\dagger(\mathbf{k}')] = \zeta_r \delta_{rs} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \quad [a_r(\mathbf{k}), a_s(\mathbf{k}')] = 0, \quad [a_r^\dagger(\mathbf{k}), a_s^\dagger(\mathbf{k}')] = 0 \quad (131)$$

になる (導出は下記).

このとき場の交換関係は

$$[A^\mu(x), A^\nu(x')] = iD^{\mu\nu}(x - x'), \quad D^{\mu\nu}(x) \equiv -g^{\mu\nu} \Delta(x) \quad (132)$$

と計算される (導出は下記). ここに

$$\Delta(x) \equiv \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \omega_{\mathbf{k}}} \sin(k \cdot x)$$

は Klein-Gordon 場の交換関係 (の  $1/i$  倍) を表す不変  $\Delta$  関数 (73) である (ただし  $m = 0, \omega_{\mathbf{k}} = |\mathbf{k}|$ ). また Feynman の光子伝播関数は

$$\langle 0 | T \{ A^\mu(x) A^\nu(x') \} | 0 \rangle = i D_F^{\mu\nu}(x - x'), \quad D_F^{\mu\nu}(x) \equiv -g^{\mu\nu} \Delta_F(x) \quad (133)$$

となる (導出は下記). ここに

$$\Delta_F(x) \equiv \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot x}}{k^2 + i\varepsilon}$$

は Klein-Gordon 場に関する Feynman 伝播関数 (76) である (ただし  $m = 0, \omega_{\mathbf{k}} = |\mathbf{k}|$ ).

さて,  $r = 1, 2, 3$  に対しては  $\zeta_r = 1$  なので, 式 (131) は生成・消滅演算子に対する交換関係 (2):

$$[a_r(\mathbf{k}), a_r^\dagger(\mathbf{k})] = 1, \quad [a_r(\mathbf{k}), a_r(\mathbf{k})] = 0, \quad [a_r^\dagger(\mathbf{k}), a_r^\dagger(\mathbf{k})] = 0$$

になる ( $\mathbf{k}, r$  の異なる値を持つ展開係数  $a_r(\mathbf{k}), a_r^\dagger(\mathbf{k})$  どうしは交換する). そこで  $a_r^\dagger(\mathbf{k}), a_r(\mathbf{k})$  をそれぞれ  $r = 1, 2$  に対しては運動量  $\mathbf{k}$  を持つ横波光子の生成・消滅演算子,  $r = 3$  に対しては運動量  $\mathbf{k}$  を持つ縦波光子の生成・消滅演算子と解釈する. 一方 Gupta-Bleuler 理論に従い,  $\zeta_r = -1$  となる  $r = 0$  に対しても  $a_r^\dagger(\mathbf{k}), a_r(\mathbf{k})$  をそれぞれ運動量  $\mathbf{k}$  を持つスカラー光子の生成・消滅演算子と解釈する. さらに真空状態  $|0\rangle$  をどの種類の光子も含んでいない状態, すなわち全ての  $\mathbf{k}, r$  に対して

$$a_r(\mathbf{k}) |0\rangle = 0$$

を満たす状態と定義し, 占有数演算子を

$$N_r(\mathbf{k}) = \zeta_r a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}) \quad (134)$$

で定義する. このとき偏極の添字  $r$  で指定され, 運動量  $\mathbf{k}$  を持つ各状態 (モード)  $(\mathbf{k}, r)$  を光子が  $n_r(\mathbf{k})$  個占有している状態

$$|\cdots, n_r(\mathbf{k}), \cdots\rangle = C \left\{ \prod_{\mathbf{k}', s} a_s^\dagger(\mathbf{k}')^{n_s(\mathbf{k}')} \right\} |0\rangle \quad (135)$$

( $C$  は規格化定数) に対して,  $N_r(\mathbf{k})$  の固有値は  $n_r(\mathbf{k})$  となることが示される (導出は下記). このため式 (134) を占有数演算子と呼ぶのはもっともなことである.

さらに全ての  $r$  に対して  $a_r^\dagger(\mathbf{k}), a_r(\mathbf{k})$  をそれぞれ光子の生成・消滅演算子と解釈したことを正当化するために, 系のエネルギーを考える. それはハミルトニアン

$$H \equiv \int d^3x \left\{ \pi^\mu(x) \dot{A}_\mu(x) - \mathcal{L}(x) \right\}$$

の固有値である. ここに電磁場の Fourier 展開 (118), (119), (120) を代入すると (ただし展開係数  $a_r^\dagger(\mathbf{k}), a_r(\mathbf{k})$  はもはや通常の数ではなく, それぞれ生成・消滅演算子と見なされている), ハミルトニアンは生成・消滅演算子を用いて

$$H = \sum_{\mathbf{k}, r} \frac{1}{2} \omega_{\mathbf{k}} \zeta_r \{ a_r(\mathbf{k}) a_r^\dagger(\mathbf{k}) + a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}) \} \quad (136)$$

$$= \sum_{\mathbf{k}, r} \omega_{\mathbf{k}} \zeta_r a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, r} \omega_{\mathbf{k}} \quad (137)$$

と表される (導出は下記).

ここでもエネルギーを測る基準をとり直して、真空状態でのエネルギー期待値  $\langle 0|H|0\rangle = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k},r} \omega_{\mathbf{k}}$  を取り除くために、ハミルトニアンを

$$\begin{aligned}
H &= \int d^3x N \left[ \pi^\mu(x) \dot{A}_\mu(x) - \mathcal{L}(x) \right] \\
&= \sum_{\mathbf{k},r} \frac{1}{2} \omega_{\mathbf{k}} \zeta_r N \left[ a_r(\mathbf{k}) a_r^\dagger(\mathbf{k}) + a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}) \right] \\
&= \sum_{\mathbf{k},r} \omega_{\mathbf{k}} \zeta_r a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}) \\
&= \sum_{\mathbf{k},r} \omega_{\mathbf{k}} N_r(\mathbf{k})
\end{aligned} \tag{138}$$

と正規順序化する。

さて、演算子  $a_r^\dagger(\mathbf{k}), a_r(\mathbf{k})$  の解釈の問題に戻ろう。全ての  $r$  に対してこれらをモード  $(\mathbf{k}, r)$  の光子の生成・消滅演算子と見なすとき、式 (135) で定義される  $|\cdots, n_r(\mathbf{k}), \cdots\rangle$  は各モード  $(\mathbf{k}, r)$  を  $n_r(\mathbf{k})$  個の光子が占める状態となる。ところで Einstein の関係によれば、モード  $(\mathbf{k}, r)$  を占める 1 個の光子はエネルギー  $\omega_{\mathbf{k}}$  を持つから、この状態のエネルギーは  $\sum_{\mathbf{k},r} \omega_{\mathbf{k}} n_r(\mathbf{k})$  となるはずである。そしてハミルトニアン

$$(138): H = \sum_{\mathbf{k},r} \omega_{\mathbf{k}} N_r(\mathbf{k})$$

はここから期待される通りの固有方程式

$$H |\cdots, n_r(\mathbf{k}), \cdots\rangle = \left\{ \sum_{\mathbf{k},r} \omega_{\mathbf{k}} n_r(\mathbf{k}) \right\} |\cdots, n_r(\mathbf{k}), \cdots\rangle$$

を満たすため、矛盾なく全ての  $r$  に対して  $a_r^\dagger(\mathbf{k}), a_r(\mathbf{k})$  をそれぞれモード  $(\mathbf{k}, r)$  の光子の生成・消滅演算子と見なすことができる。こうして電磁場は光子によって構成されているという描像に移行し、自由電磁場の量子化が達成される。

電磁場の Fourier 展開 (118),(119),(120) に導入された  $r = 0, 3$  の余分な偏極状態について述べる。電磁場のスカラー偏極  $\varepsilon_0^\mu$ 、縦偏極  $\varepsilon_3^\mu$  に関する成分を構成するのがそれぞれスカラー光子と縦波光子であった。ここで Lorenz 条件 (116) を適切に考慮すると、観測量の期待値にはスカラー光子と縦波光子は寄与せず、それ故、スカラー光子と縦波光子は (自由粒子の形では) 観測されないことが示される。以下では系のエネルギー期待値に関してこのことを確認して満足することにする。

まず、古典電磁場に対する Lorenz 条件 (116) はそのままの形では量子化された場に対する演算子の式と見なせないことに注意する。と言うのも、場の演算子  $A^\mu$  が Lorenz 条件 (116):  $\partial_\mu A^\mu = 0$  を満たすとすると

$$0 = [\partial_\mu A^\mu(x), A^\nu(x')] = \partial_\mu [A^\mu(x), A^\nu(x')]$$

でなければならない ( $\partial_\mu$  は  $x'$  の関数  $A^\nu(x')$  には作用しないから)。しかし最右辺の交換関係は式 (132) の  $iD^{\mu\nu}(x-x')$  であり、その微分  $i\partial_\mu D^{\mu\nu}(x-x')$  は恒等的にはゼロとならないからである。そこで Gupta-Bleuler 理論に従い、古典電磁場に対する Lorenz 条件 (116) に対応する量子論における条件として、状態ケット  $|\Psi\rangle$  は次式を満たさなければならないものとする。

$$\partial_\mu A^{\mu+} |\Psi\rangle = 0. \tag{139}$$

ここに  $A^{\mu+}$  は式 (119) で定義される、消滅演算子のみを含む項である。このとき期待値に関する Lorenz 条件

$$\langle \Psi | \partial_\mu A^\mu | \Psi \rangle = \langle \Psi | \cdot (\partial_\mu A^{\mu+} | \Psi \rangle) + (\langle \Psi | \partial_\mu A^{\mu-} \cdot) | \Psi \rangle = 0$$

が成立し、古典的な極限で Lorenz 条件 (116):  $\partial_\mu A^\mu = 0$  が満たされることになる。

式 (121) のスカラー偏極, 式 (122) の横偏極, 縦偏極に対して条件式 (139) は

$$\{a_3(\mathbf{k}) - a_0(\mathbf{k})\} |\Psi\rangle = 0 \quad (\text{全ての } \mathbf{k} \text{ に対して}) \quad (140)$$

となり, ここから

$$\langle \Psi | H | \Psi \rangle = \langle \Psi | \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=1}^2 \omega_{\mathbf{k}} a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}) | \Psi \rangle \quad (141)$$

が帰結される (導出は下記). これはエネルギー期待値には横波光子 ( $r = 1, 2$ ) だけが寄与することを意味している. [量子論において Lorenz 条件  $\partial_\mu A^\mu = 0$  に対応する式 (139) から, スカラー光子と縦波光子が観測されないことが保証されることは, 古典論においてゲージ条件  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  が横波条件となっていることと類似している.]

■真空状態について 我々は真空状態  $|0\rangle$  を, どの種類の光子も存在しない状態として定義した.

しかしながら真空状態を, 横波光子は含まないけれども, 許容される縦波光子とスカラー光子の混合を含む状態として記述することも可能である. この記述は単に Lorenz ゲージの選び方が異なる場合に対応する. このような事情は, 横波光子を含む (真空でない) 状態に関しても同様である. (p.96, 1.6-9)

#### ■自由粒子と仮想光子

- 自由場 (自由粒子) → 横波光子のみ.
- 電荷が存在する場合 (中間状態の仮想光子)

→ 縦波光子とスカラー光子が同時刻 Coulomb 相互作用に対応 (5.3 節).

しかしこの場合にも, 散乱過程の始状態と終状態に関しては, 横波光子だけを含む系を考えればよい. これは, そのような特定のゲージが選択されているということと, 始状態と終状態において系に含まれる粒子同士が十分に離れていて, あたかも自由な系のようにゲージを選べるという事実に対応している. 6.2 節ではこの問題に戻って, 衝突する粒子が互いに接近するときに断熱的に相互作用が発生し, 散乱後に粒子が互いに遠ざかるときに断熱的に相互作用が消失するという扱い方を論じる予定である. (p.96, 1.14-20)

■負のノルム Gupta-Bleuler 形式において 1 光子状態  $|1_{\mathbf{k}r}\rangle = a_r^\dagger(\mathbf{k}) |0\rangle$  のノルムは

$$\begin{aligned} \langle 1_{\mathbf{k}r} | 1_{\mathbf{k}r} \rangle &= \langle 0 | a_r(\mathbf{k}) a_r^\dagger(\mathbf{k}) | 0 \rangle = \langle 0 | [a_r(\mathbf{k}), a_r^\dagger(\mathbf{k})] | 0 \rangle \\ &= \zeta_r \langle 0 | 0 \rangle \quad (\because \text{交換関係 (131)}) \\ &= \zeta_r \quad (\langle 0 | 0 \rangle = 1 \text{ と規格化されているものとした}) \end{aligned}$$

と計算され,  $r = 0$  に対してこれは負になってしまう. より一般には, 奇数個のスカラー光子を含む任意の状態のノルムが負になることが示される. このような困難は Lorenz 条件を無視しているために生じており, (既に示したように) 実際にはスカラー光子や縦波光子は, 現実に観測されるものではない.

Hilbert 空間において負のノルムを持つ状態が矛盾を生じないように, 不定形量を持つ関数空間を自己無撞着に規定するような体系的な定式化を行うことも可能である. しかし多くの目的に関して, このような完全な定式化を行う必要はない. (5.2 節, 最終段落より. 脚注の文献の紹介は省略.)

## 5.2 節, 式の導出など

適宜, 教科書の説明を補いつつ式の導出などを行う.

■調和振動子の交換関係 (131) と正準交換関係 (130) 計算は Klein-Gordon 場の場合と似たものになる.

展開係数を電磁場で表す 電磁場に対する正準交換関係 (130) が展開係数に対する交換関係 (131) になることを確かめる. そのために電磁場を用いて展開係数を表すことを考える. 自由スカラー場に対する議論 [10, p.35] を参考にすると,

$$k \equiv (\omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}), \quad \omega_{\mathbf{k}} \equiv |\mathbf{k}|, \quad f \overleftrightarrow{\partial}_\mu g \equiv f \partial_\mu g - (\partial_\mu f) g$$

として電磁場に対する結論

$$\begin{aligned} a_r(\mathbf{k}) &= -i\zeta_r \frac{1}{(2V\omega_{\mathbf{k}})^{1/2}} \varepsilon_{r\mu}(\mathbf{k}) \int d^3x e^{ik \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_0 A^\mu(x) \\ &= i\zeta_r \frac{1}{(2V\omega_{\mathbf{k}})^{1/2}} \varepsilon_{r\mu}(\mathbf{k}) \int d^3x e^{ik \cdot x} \{\pi^\mu(x) + i\omega_{\mathbf{k}} A^\mu(x)\}, \end{aligned} \quad (142)$$

$$\begin{aligned} a_r^\dagger(\mathbf{k}) &= i\zeta_r \frac{1}{(2V\omega_{\mathbf{k}})^{1/2}} \varepsilon_{r\mu}(\mathbf{k}) \int d^3x e^{-ik \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_0 A^\mu(x) \\ &= -i\zeta_r \frac{1}{(2V\omega_{\mathbf{k}})^{1/2}} \varepsilon_{r\mu}(\mathbf{k}) \int d^3x e^{-ik \cdot x} \{\pi^\mu(x) - i\omega_{\mathbf{k}} A^\mu(x)\} \end{aligned} \quad (143)$$

にたどり着く ( $r$  については和をとらない, 式 (128):  $\pi^\mu = -\dot{A}^\mu$ ).

実際, 例えば式 (142) は次のように確かめられる. まず一辺  $L$ , 体積  $V = L^3$  の立方体領域に関する周期境界条件の下で許される波数ベクトル  $\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L}(\mathbf{n}$  は整数を成分に持つベクトル) に対して,  $e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}/\sqrt{V}$  の規格直交性 (80):

$$\int \frac{d^3x}{V} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$$

が成り立つことに注意する. すると式 (142) において

$$\begin{aligned} & \int d^3x e^{ik \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_0 A^\mu(x) \\ &= \int d^3x e^{ik \cdot x} \{\dot{A}^\mu(x) - i\omega_{\mathbf{k}} A^\mu(x)\} \\ &= \int d^3x e^{ik \cdot x} \sum_{\mathbf{k}', s} \left( \frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}'}} \right)^{1/2} \varepsilon_s^\mu(\mathbf{k}') \\ & \times \left[ a_s(\mathbf{k}')(-i\omega_{\mathbf{k}'})e^{-ik' \cdot x} + a_s^\dagger(\mathbf{k}')(i\omega_{\mathbf{k}'})e^{ik' \cdot x} - i\omega_{\mathbf{k}} \left\{ a_s(\mathbf{k}')e^{-ik' \cdot x} + a_s^\dagger(\mathbf{k}')e^{ik' \cdot x} \right\} \right] \\ & \left( \because \text{式 (118), (119), (120)} : A^\mu(x) = \sum_{\mathbf{k}', s} \left( \frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}'}} \right)^{1/2} \varepsilon_s^\mu(\mathbf{k}') \left\{ a_s(\mathbf{k}')e^{-ik' \cdot x} + a_s^\dagger(\mathbf{k}')e^{ik' \cdot x} \right\} \right) \\ &= \int d^3x e^{ik \cdot x} \sum_{\mathbf{k}', s} \left( \frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}'}} \right)^{1/2} \varepsilon_s^\mu(\mathbf{k}') \left\{ -ia_s(\mathbf{k}')(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}'})e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} + ia_s^\dagger(\mathbf{k}')(-\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}'})e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} \right\} \\ &= \sum_{\mathbf{k}', s} \left( \frac{V}{2\omega_{\mathbf{k}'}} \right)^{1/2} \varepsilon_s^\mu(\mathbf{k}') \left\{ -ia_s(\mathbf{k}')(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}'})\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}e^{i(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}'})t} + ia_s^\dagger(\mathbf{k}')(-\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}'})\delta_{\mathbf{k}, -\mathbf{k}'}e^{i(\omega_{\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{k}'})t} \right\} \\ & (\because \text{式 (80), } t \equiv x^0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_s \left( \frac{V}{2\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} \varepsilon_s^\mu(\mathbf{k}) \{-i a_s(\mathbf{k})\} 2\omega_{\mathbf{k}} \\
&= -i(2V\omega_{\mathbf{k}})^{1/2} \sum_s \varepsilon_s^\mu(\mathbf{k}) a_s(\mathbf{k})
\end{aligned}$$

なので、偏極ベクトルの正規直交性 (123):

$$\varepsilon_{r\mu}(\mathbf{k}) \varepsilon_s^\mu(\mathbf{k}) = -\zeta_r \delta_{rs}$$

を用いると

$$\begin{aligned}
&-i\zeta_r \frac{1}{(2V\omega_{\mathbf{k}})^{1/2}} \varepsilon_{r\mu}(\mathbf{k}) \int d^3x e^{ik \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_0 A^\mu(x) \\
&= -\zeta_r \sum_s \{\varepsilon_{r\mu}(\mathbf{k}) \varepsilon_s^\mu(\mathbf{k})\} a_s(\mathbf{k}) \\
&= \zeta_r \sum_s (\zeta_r \delta_{rs}) a_s(\mathbf{k}) \\
&= a_r(\mathbf{k}) : (142) \quad (\because \zeta_r = \pm 1, (\zeta_r)^2 = 1)
\end{aligned}$$

を得る。同様に式 (142) の Hermite 共役をとった式 (143) が成り立つことを確かめられる。

ところで展開係数  $a_r(\mathbf{k}), a_r^\dagger(\mathbf{k})$  の表式 (142), (143) は見掛け上、時刻  $x^0$  に依る。そこでこれらが実際には時刻  $x^0$  に依らないことを確かめておこう。  $a_r(\mathbf{k})$  の式 (142) の時刻  $x^0$  による微分

$$\begin{aligned}
&\partial_0 \left[ i\zeta_r \frac{1}{(2V\omega_{\mathbf{k}})^{1/2}} \varepsilon_{r\mu}(\mathbf{k}) \int d^3x e^{ik \cdot x} \{\pi^\mu(x) + i\omega_{\mathbf{k}} A^\mu(x)\} \right] \\
&= i\zeta_r \frac{1}{(2V\omega_{\mathbf{k}})^{1/2}} \varepsilon_{r\mu}(\mathbf{k}) \int d^3x \partial_0 \left[ e^{ik \cdot x} \{-\dot{A}^\mu(x) + i\omega_{\mathbf{k}} A^\mu(x)\} \right] \quad (\because \text{式 (128)} : \pi^\mu = -\dot{A}^\mu)
\end{aligned}$$

において電磁場  $A^\mu$  が波動方程式  $\ddot{A}^\mu - \nabla^2 A^\mu = 0$  を満たすことを用いると

$$\begin{aligned}
&\int d^3x \partial_0 \left\{ e^{ik \cdot x} (-\dot{A}^\mu + i\omega_{\mathbf{k}} A^\mu) \right\} \\
&= \int d^3x e^{ik \cdot x} \left\{ i\omega_{\mathbf{k}} (-\dot{A}^\mu + i\omega_{\mathbf{k}} A^\mu) + (-\ddot{A}^\mu + i\omega_{\mathbf{k}} \dot{A}^\mu) \right\} \\
&= - \int d^3x e^{ik \cdot x} (\ddot{A}^\mu + \omega_{\mathbf{k}}^2 A^\mu) \\
&= - \int d^3x e^{ik \cdot x} (\nabla^2 + \omega_{\mathbf{k}}^2) A^\mu \\
&= - \int d^3x e^{ik \cdot x} \{(-i\mathbf{k})^2 + \omega_{\mathbf{k}}^2\} A^\mu \quad (\text{部分積分した}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

なので  $a_r(\mathbf{k})$  の式 (142) は時刻  $x^0$  に依らない。同様に  $a_r^\dagger(\mathbf{k})$  の式 (143) が時刻  $x^0$  に依らないことも確かめられる。

展開係数の交換関係 (131) の導出 さて、展開係数を電磁場で表した式 (142), (143) を用いて、電磁場に対する正準交換関係 (130) から展開係数に対する交換関係 (131) を導こう。式 (142), (143) は右辺が時刻  $x^0$  に依らないから、これらを用いて得られる

$$\begin{aligned}
&[a_r(\mathbf{k}), a_s^\dagger(\mathbf{k}')] \\
&= -i^2 \zeta_r \zeta_s \frac{1}{2V(\omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}'})^{1/2}} \varepsilon_{r\mu}(\mathbf{k}) \varepsilon_{s\nu}(\mathbf{k}') \int d^3x d^3x' e^{i(k \cdot x - k' \cdot x')} [\pi^\mu(x) + i\omega_{\mathbf{k}} A^\mu(x), \pi^\nu(x') - i\omega_{\mathbf{k}'} A^\nu(x')]
\end{aligned}$$

の右辺は時刻  $x^0, x'^0$  に依らない．そこでこれを同時刻  $x^0 = x'^0 \equiv t$  で評価すると

$$\begin{aligned} & [\pi^\mu(x) + i\omega_{\mathbf{k}}A^\mu(x), \pi^\nu(x') - i\omega_{\mathbf{k}'}A^\nu(x')] \\ &= [\pi^\mu(\mathbf{x}, t), \pi^\nu(\mathbf{x}', t)] - i\omega_{\mathbf{k}'}[\pi^\mu(\mathbf{x}, t), A^\nu(\mathbf{x}', t)] + i\omega_{\mathbf{k}}[A^\mu(\mathbf{x}, t), \pi^\nu(\mathbf{x}', t)] + (i\omega_{\mathbf{k}})(-i\omega_{\mathbf{k}'})[A^\mu(\mathbf{x}, t), A^\nu(\mathbf{x}', t)] \\ &= -g^{\mu\nu}(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}'})\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ & (\because \text{同時刻交換関係 (130)} : [A^\mu(\mathbf{x}, t), A^\nu(\mathbf{x}', t)] = 0, \quad [\pi^\mu(\mathbf{x}, t), \pi^\nu(\mathbf{x}', t)] = 0, \quad [A^\mu(\mathbf{x}, t), \pi^\nu(\mathbf{x}', t)] = ig^{\mu\nu}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')) \end{aligned}$$

なので上式は

$$[a_r(\mathbf{k}), a_s^\dagger(\mathbf{k}')] = -\frac{1}{V} \frac{\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}'}}{2(\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'})^{1/2}} \zeta_r \zeta_s g^{\mu\nu} \varepsilon_{r\mu}(\mathbf{k}) \varepsilon_{s\nu}(\mathbf{k}') e^{i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'})t} \int d^3x d^3x' e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}')} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

となる．右辺の空間積分は

$$\int d^3x d^3x' e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}')} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \int d^3x e^{-i(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} = V \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \quad (\because \text{式 (80)})$$

となるから，

$$[a_r(\mathbf{k}), a_s^\dagger(\mathbf{k}')] = \frac{\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}'}}{2(\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'})^{1/2}} \zeta_r \zeta_s g^{\mu\nu} \varepsilon_{r\mu}(\mathbf{k}) \varepsilon_{s\nu}(\mathbf{k}') e^{i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'})t} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$$

を得る．右辺には  $\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$  があるため，その前の因子を  $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$  で評価すると

$$\begin{aligned} & [a_r(\mathbf{k}), a_s^\dagger(\mathbf{k}')] \\ &= -\zeta_r \zeta_s \{g^{\mu\nu} \varepsilon_{r\mu}(\mathbf{k}) \varepsilon_{s\nu}(\mathbf{k})\} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \\ &= -\zeta_r \zeta_s (-\zeta_r \delta_{rs}) \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \quad (\because \text{式 (123)} : \varepsilon_{r\mu}(\mathbf{k}) \varepsilon_s^\mu(\mathbf{k}) = -\zeta_r \delta_{rs}) \\ &= \zeta_s \delta_{rs} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} : (131) \quad (\because \zeta_r = \pm 1, (\zeta_r)^2 = 1) \end{aligned}$$

を得る．同様に展開係数に対する交換関係 (131) の残りの 2 式

$$[a_r(\mathbf{k}), a_s(\mathbf{k}')] = 0, \quad [a_r^\dagger(\mathbf{k}), a_s^\dagger(\mathbf{k}')] = 0$$

も導ける．

逆証 逆に調和振動子の交換関係 (131) から正準交換関係 (130) を導くことは容易である．例えば，

$$\begin{aligned} & [A^\mu(\mathbf{x}, t), \dot{A}^\nu(\mathbf{x}', t)] \\ &= \sum_{r,s} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \frac{1}{2V \sqrt{\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'}}} \varepsilon_r^\mu(\mathbf{k}) \varepsilon_s^\nu(\mathbf{k}') (-i\omega_{\mathbf{k}'}) \\ & \quad \times \left\{ -[a_r(\mathbf{k}), a_s^\dagger(\mathbf{k}')] e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}')} + [a_r^\dagger(\mathbf{k}), a_s(\mathbf{k}')] e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}')} \right\} \\ &= i \sum_{r,\mathbf{k}} \frac{1}{2V} (\zeta_r \varepsilon_r^\mu(\mathbf{k}) \varepsilon_r^\nu(\mathbf{k})) \left( e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{x}')} + e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \right) \\ & \quad (\because \text{式 (131)}, x, x' \text{ は同時刻}) \\ &= i \sum_r \frac{1}{V} (-g^{\mu\nu}) e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \\ & \quad (\because \text{式 (124)}, \text{第 2 項で } -\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k} \text{ と置換}) \\ &= -ig^{\mu\nu} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \end{aligned}$$

■非同時刻交換関係  $[A^\mu(x), A^\nu(y)]$  の式 (132) の導出 非同時刻交換関係  $[A^\mu(x), A^\nu(y)]$  の式 (132) を、実 Klein-Gordon 場に対する計算 (pp.53-54) を参考にして確かめる。まず生成演算子どうし、消滅演算子どうしは交換するから

$$[A^\mu(x), A^\nu(y)] = [A^{\mu+}(x), A^{\nu-}(y)] + [A^{\mu-}(x), A^{\nu+}(y)]$$

となる。右辺第 1 項は

$$\begin{aligned} [A^{\mu+}(x), A^{\nu-}(y)] &= \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', r, s} \frac{1}{(\omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}'})^{1/2}} \varepsilon_r^\mu(\mathbf{k}) \varepsilon_s^\nu(\mathbf{k}') [a_r(\mathbf{k}), a_s^\dagger(\mathbf{k}')] e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{y})} \\ & (\because \text{電磁場の Fourier 展開 (118), (119), (120)}) \\ &= \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}} \left\{ \sum_r \zeta_r \varepsilon_r^\mu(\mathbf{k}) \varepsilon_s^\nu(\mathbf{k}) \right\} e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} \\ & (\because \text{交換関係 (131): } [a_r(\mathbf{k}), a_s^\dagger(\mathbf{k}')] = \zeta_r \delta_{rs} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} ) \\ &= -\frac{g^{\mu\nu}}{2V} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}} e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} \\ & (\because \text{偏極ベクトルの完全性の条件 (124)}) \end{aligned}$$

と計算できる。後の都合のためにこれ以降は  $V \rightarrow \infty$  の極限をとった結果を示すことにする。今、波数空間の体積要素  $\Delta^3 k$  の中には周期境界条件の下で許される波数ベクトル  $\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L} \mathbf{n}$  を (波数空間の) 位置ベクトルに持つ点が  $\frac{\Delta^3 k}{(2\pi/L)^3}$  個含まれるため ( $\mathbf{n}$  は整数を成分に持つベクトル)、近似的に

$$\sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \sum \frac{\Delta^3 k}{(2\pi/L)^3} \quad \left( \sum \text{ は体積要素 } \Delta^3 k \text{ についての和} \right)$$

と置き換わり、 $V \rightarrow \infty$  の極限で

$$\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}$$

となることに注意すると

$$[A^{\mu+}(x), A^{\nu-}(y)] = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 \omega_{\mathbf{k}}} e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} \equiv -i g^{\mu\nu} \Delta^+(x - y), \quad (144)$$

$$\Delta^+(x) \equiv -\frac{i}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 \omega_{\mathbf{k}}} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} : (3.39)$$

を得る。よって

$$[A^{\mu-}(x), A^{\nu+}(y)] = -[A^{\nu+}(y), A^{\mu-}(x)] = i g^{\mu\nu} \Delta^+(y - x) \quad (145)$$

$$\equiv -i g^{\mu\nu} \Delta^-(x - y), \quad (146)$$

$$\Delta^-(x) \equiv -\Delta^+(-x) = \frac{i}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 \omega_{\mathbf{k}}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} : (3.41)$$

となるから式 (132):

$$[A^\mu(x), A^\nu(y)] = -i g^{\mu\nu} \Delta(x - y) = i D^{\mu\nu}(x - y),$$

$$\Delta(x) \equiv \Delta^+(x) + \Delta^-(x) = -\int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 \omega_{\mathbf{k}}} \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}),$$

$$D^{\mu\nu} \equiv -g^{\mu\nu} \Delta(x)$$

が導かれる。

■Feynman の光子伝播関数 (133) の導出

$$\begin{aligned}\langle 0|\mathsf{T}\{A^\mu(x)A^\nu(x')\}|0\rangle &= \begin{cases} \langle 0|A^\mu(x)A^\nu(x')|0\rangle & (t > t') \\ \langle 0|A^\nu(x')A^\mu(x)|0\rangle & (t < t') \end{cases} \\ &= \theta(t-t')\langle 0|A^\mu(x)A^\nu(x')|0\rangle + \theta(t'-t)\langle 0|A^\nu(x')A^\mu(x)|0\rangle\end{aligned}$$

である。ところで上で得た結果

$$[A^{\mu+}(x), A^{\nu-}(x')] = -ig^{\mu\nu}\Delta^+(x-x')$$

を用いると、式 (3.51) の代わりに

$$-ig^{\mu\nu}\Delta^+(x-x') = \langle 0|[A^{\mu+}(x), A^{\nu-}(x')]|0\rangle = \langle 0|A^{\mu+}(x), A^{\nu-}(x')|0\rangle = \langle 0|A^\mu(x), A^\nu(x')|0\rangle$$

が成り立つ。よって式 (133):

$$\begin{aligned}\langle 0|\mathsf{T}\{A^\mu(x)A^\nu(x')\}|0\rangle &= -ig^{\mu\nu}\Delta_F(x-x'), \\ \Delta_F(x-x') &\equiv \theta(t-t')\Delta^+(x-x') + \theta(t'-t)\Delta^-(x-x')\end{aligned}$$

を得る。

■占有数表示  $N_r(\mathbf{k})$  の固有方程式 状態 (135):

$$|\cdots, n_r(\mathbf{k}), \cdots\rangle = C \left\{ \prod_{\mathbf{k}', s} a_s^\dagger(\mathbf{k}')^{n_s(\mathbf{k}')} \right\} |0\rangle$$

が占有数演算子 (134):

$$N_r(\mathbf{k}) = \zeta_r a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k})$$

の固有値  $n_r(\mathbf{k})$  に属する固有状態であることを示す。

$$N_r(\mathbf{k}) |\cdots, n_r(\mathbf{k}), \cdots\rangle = C \zeta_r \left\{ \prod' a_s^\dagger(\mathbf{k}')^{n_s(\mathbf{k}')} \right\} a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}) a_r^\dagger(\mathbf{k})^{n_r(\mathbf{k})} |0\rangle$$

( $\prod'$  は  $(\mathbf{k}', s) (\neq (\mathbf{k}, r))$  についての積) において,

$$\begin{aligned}a_r(\mathbf{k}) a_r^\dagger(\mathbf{k}) &= a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}) + [a_r(\mathbf{k}), a_r^\dagger(\mathbf{k})] \\ &= a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}) + \zeta_r \quad (\because \text{交換関係 (131)})\end{aligned}$$

を繰り返し用いて  $a_r(\mathbf{k})$  を  $a_r^\dagger(\mathbf{k})^{n_r(\mathbf{k})}$  の右側に移動すると

$$\begin{aligned}a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}) a_r^\dagger(\mathbf{k})^{n_r(\mathbf{k})} |0\rangle &= \left\{ a_r^\dagger(\mathbf{k})^{n_r(\mathbf{k})+1} a_r(\mathbf{k}) + n_r(\mathbf{k}) \zeta_r a_r^\dagger(\mathbf{k})^{n_r(\mathbf{k})} \right\} |0\rangle \\ &= n_r(\mathbf{k}) \zeta_r a_r^\dagger(\mathbf{k})^{n_r(\mathbf{k})} |0\rangle \quad (\because a_r(\mathbf{k}) |0\rangle = 0)\end{aligned}$$

となる。よって占有数演算子  $N_r(\mathbf{k})$  の固有方程式

$$\begin{aligned}N_r(\mathbf{k}) |\cdots, n_r(\mathbf{k}), \cdots\rangle &= (\zeta_r)^2 n_r(\mathbf{k}) \left\{ C \prod_{\mathbf{k}', s} a_s^\dagger(\mathbf{k}')^{n_s(\mathbf{k}')} \right\} |0\rangle \\ &= n_r(\mathbf{k}) |\cdots, n_r(\mathbf{k}), \cdots\rangle \quad (\because \zeta_r = \pm 1, (\zeta_r)^2 = 1)\end{aligned}$$

を得るから示された。

■ハミルトニアン(136),(137)の導出 自由電磁場の系のハミルトニアンが生成・消滅演算子を用いて式(136),(137)のように表されることを確かめる。あらかじめ計算の方針を以下に示しておく。

- ハミルトニアン(136),(137)の定義式に電磁場の Fourier 展開(118),(119),(120)を代入する。
  - 2種類の波数ベクトル  $\mathbf{k}, \mathbf{k}'$ , 2種類の偏極の指数  $r, s$  についての和が現れる。
  - ハミルトニアン密度の位置  $\mathbf{x}$  依存性が指数関数  $e^{\pm i(\mathbf{k} \pm \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}}$  になる(複号任意)。
- 位置  $\mathbf{x}$  に関する積分を実行する。
  - $\delta_{\mathbf{k}, \pm \mathbf{k}'}$  が現れる。
- $\mathbf{k}'$  についての和をとる。
  - 展開に現れる2種類の偏極ベクトル  $\varepsilon_{r\mu}(\mathbf{k}), \varepsilon_s^\mu(\mathbf{k}')$  の引数が  $\mathbf{k}$  に統一され、 $\varepsilon_{r\mu}(\mathbf{k})\varepsilon_s^\mu(\mathbf{k})$  が現れる。
- 偏極ベクトルの正規直交性(123)を用いる。
  - $\delta_{rs}$  が現れる。
- $s$  についての和をとる。

さて、以上の流れに沿ってハミルトニアンを具体的に計算しよう。

$$\begin{aligned}
 H &= \int d^3x (\pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{L}) \\
 &= \int d^3x \left\{ -\dot{A}_\mu \dot{A}^\mu + \frac{1}{2} (\partial_\nu A_\mu) (\partial^\nu A^\mu) \right\} \\
 &\quad \left( \text{式(127)} : \mathcal{L} = -\frac{1}{2} (\partial_\nu A_\mu) (\partial^\nu A^\mu), \quad \text{式(128)} : \pi^\mu = -\dot{A}^\mu \right) \\
 &= \int d^3x \left[ - \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', r, s} \frac{1}{2V \sqrt{\omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}'}}} \varepsilon_{r\mu}(\mathbf{k}) \varepsilon_s^\mu(\mathbf{k}') \right. \\
 &\quad \times \{ a_r(\mathbf{k}) (-i\omega_{\mathbf{k}}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + a_r^\dagger(\mathbf{k}) (i\omega_{\mathbf{k}}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \} \{ a_s(\mathbf{k}') (-i\omega_{\mathbf{k}'}) e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}} + a_s^\dagger(\mathbf{k}') (i\omega_{\mathbf{k}'}) e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}} \} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', r, s} \frac{1}{2V \sqrt{\omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}'}}} \varepsilon_{r\mu}(\mathbf{k}) \varepsilon_s^\mu(\mathbf{k}') \\
 &\quad \times \{ a_r(\mathbf{k}) (-ik_\nu) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + a_r^\dagger(\mathbf{k}) (ik_\nu) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \} \{ a_s(\mathbf{k}') (-ik'^\nu) e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}} + a_s^\dagger(\mathbf{k}') (ik'^\nu) e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}} \} \left. \right] \\
 &\quad (\because \text{電磁場の Fourier 展開(118), (119), (120)}) \\
 &= \int d^3x \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', r, s} \frac{1}{2V \sqrt{\omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}'}}} \varepsilon_{r\mu}(\mathbf{k}) \varepsilon_s^\mu(\mathbf{k}') \left( \omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}'} - \frac{1}{2} k_\nu k'^\nu \right) \\
 &\quad \times \{ a_r(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} - a_r^\dagger(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \} \{ a_s(\mathbf{k}') e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}} - a_s^\dagger(\mathbf{k}') e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}} \}
 \end{aligned}$$

において

$$\begin{aligned}
 &\int \frac{d^3x}{V} \{ a_r(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} - a_r^\dagger(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \} \{ a_s(\mathbf{k}') e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}} - a_s^\dagger(\mathbf{k}') e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}} \} \\
 &= \int \frac{d^3x}{V} \left\{ a_r(\mathbf{k}) a_s(\mathbf{k}') e^{-i(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}'})t} e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} \right. \\
 &\quad - a_r(\mathbf{k}) a_s^\dagger(\mathbf{k}') e^{-i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'})t} e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} \\
 &\quad \left. - a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_s(\mathbf{k}') e^{i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'})t} e^{-i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + a_r^\dagger(\mathbf{k})a_s^\dagger(\mathbf{k}')e^{i(\omega_{\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{k}'})t}e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} \quad (x \equiv (t, \mathbf{x})) \\
& = a_r(\mathbf{k})a_s(\mathbf{k}')e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{k}'})t}\delta_{\mathbf{k},-\mathbf{k}'} \\
& - a_r(\mathbf{k})a_s^\dagger(\mathbf{k}')e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}'})t}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \\
& - a_r^\dagger(\mathbf{k})a_s(\mathbf{k}')e^{i(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}'})t}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \\
& + a_r^\dagger(\mathbf{k})a_s^\dagger(\mathbf{k}')e^{i(\omega_{\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{k}'})t}\delta_{\mathbf{k},-\mathbf{k}'} \quad (\because \text{式 (80)})
\end{aligned}$$

であり,  $\mathbf{k}' = \mp\mathbf{k}$  のとき

$$k_\nu k'^\nu = \omega_{\mathbf{k}}^2 \pm \mathbf{k}^2 = \begin{cases} 2\omega_{\mathbf{k}}^2 & (\mathbf{k}' = -\mathbf{k} \text{ に対して}) \\ 0 & (\mathbf{k}' = \mathbf{k} \text{ に対して}) \end{cases}, \quad \therefore \omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'} - \frac{1}{2}k_\nu k'^\nu = \begin{cases} 0 & (\mathbf{k}' = -\mathbf{k} \text{ に対して}) \\ \omega_{\mathbf{k}}^2 & (\mathbf{k}' = \mathbf{k} \text{ に対して}) \end{cases}$$

となることに注意すると

$$\begin{aligned}
H & = \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', r, s} \frac{1}{2\sqrt{\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'}}} \varepsilon_{r\mu}(\mathbf{k})\varepsilon_s^\mu(\mathbf{k}') \\
& \quad \times \left\{ a_r(\mathbf{k})a_s(\mathbf{k}')e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{k}'})t}\delta_{\mathbf{k},-\mathbf{k}'} \right. \\
& \quad - a_r(\mathbf{k})a_s^\dagger(\mathbf{k}')e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}'})t}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \\
& \quad - a_r^\dagger(\mathbf{k})a_s(\mathbf{k}')e^{i(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}'})t}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \\
& \quad \left. + a_r^\dagger(\mathbf{k})a_s^\dagger(\mathbf{k}')e^{i(\omega_{\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{k}'})t}\delta_{\mathbf{k},-\mathbf{k}'} \right\} \\
& = - \sum_{\mathbf{k}, r, s} \frac{1}{2}\omega_{\mathbf{k}}\varepsilon_{r\mu}(\mathbf{k})\varepsilon_s^\mu(\mathbf{k})\{a_r(\mathbf{k})a_s^\dagger(\mathbf{k}) + a_r^\dagger(\mathbf{k})a_s(\mathbf{k})\} \\
& = \sum_{\mathbf{k}, r, s} \frac{1}{2}\omega_{\mathbf{k}}\zeta_r\delta_{rs}\{a_r(\mathbf{k})a_s^\dagger(\mathbf{k}) + a_r^\dagger(\mathbf{k})a_s(\mathbf{k})\} \quad (\because \text{式 (123)} : \varepsilon_{r\mu}(\mathbf{k})\varepsilon_s^\mu(\mathbf{k}) = -\zeta_r\delta_{rs}) \\
& = \sum_{\mathbf{k}, r} \frac{1}{2}\omega_{\mathbf{k}}\zeta_r\{a_r(\mathbf{k})a_r^\dagger(\mathbf{k}) + a_r^\dagger(\mathbf{k})a_r(\mathbf{k})\} : (136)
\end{aligned}$$

を得る.

さらに交換関係 (131) を用いて

$$a_r(\mathbf{k})a_r^\dagger(\mathbf{k}) = a_r^\dagger(\mathbf{k})a_r(\mathbf{k}) + [a_r(\mathbf{k}), a_r^\dagger(\mathbf{k})] = a_r^\dagger(\mathbf{k})a_r(\mathbf{k}) + \zeta_r$$

と書き換えると, 式 (137):

$$H = \sum_{\mathbf{k}, r} \omega_{\mathbf{k}}\zeta_r a_r^\dagger(\mathbf{k})a_r(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, r} \omega_{\mathbf{k}} \quad (\because \zeta_r = \pm 1, (\zeta_r)^2 = 1)$$

を得る.

■スカラー光子, 縦波光子 条件式 (139):  $\partial_\mu A^{\mu+} |\Psi\rangle = 0$  が式 (140):  $\{a_3(\mathbf{k}) - a_0(\mathbf{k})\} |\Psi\rangle = 0$  に書き換えられることを確かめる. 条件式 (139) に  $A^{\mu+}$  の定義式 (119) を代入すると

$$0 = \partial_\mu A^{\mu+}(x) |\Psi\rangle = \sum_{\mathbf{k}, r} \left( \frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} \varepsilon_r^\mu(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}) (-ik_\mu) e^{-ik\cdot x} |\Psi\rangle$$

となる。ここで式 (121) のスカラー偏極, 式 (122) の横偏極, 縦偏極に対して, 最右辺における  $\mu, r$  に関する和は

$$\begin{aligned}\sum_r k_\mu \varepsilon_r^\mu(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}) &= \sum_r \{ \omega_{\mathbf{k}} \varepsilon_r^0(\mathbf{k}) - \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k}) \} a_r(\mathbf{k}) \\ &= \omega_{\mathbf{k}} a_0(\mathbf{k}) - |\mathbf{k}| a_3(\mathbf{k}) \\ &= -\omega_{\mathbf{k}} \{ a_3(\mathbf{k}) - a_0(\mathbf{k}) \}\end{aligned}$$

となるから, 全ての  $\mathbf{k}$  に対して式 (140):

$$\{ a_3(\mathbf{k}) - a_0(\mathbf{k}) \} |\Psi\rangle = 0$$

が成り立つ。

次にエネルギー期待値の式 (141) を導こう。ハミルトニアン の式 (138):

$$H = \sum_{\mathbf{k}, r} \omega_{\mathbf{k}} \zeta_r a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k})$$

により

$$\begin{aligned}\langle \Psi | H | \Psi \rangle &= \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} \langle \Psi | \sum_r \zeta_r a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}) | \Psi \rangle \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} \left[ \langle \Psi | \sum_{r=1}^2 a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}) | \Psi \rangle + \langle \Psi | \{ a_3^\dagger(\mathbf{k}) a_3(\mathbf{k}) - a_0^\dagger(\mathbf{k}) a_0(\mathbf{k}) \} | \Psi \rangle \right]\end{aligned}$$

となる。ところが式 (140):  $\{ a_3(\mathbf{k}) - a_0(\mathbf{k}) \} |\Psi\rangle = 0$  を用いると, 最右辺において

$$\begin{aligned}\langle \Psi | \{ a_3^\dagger(\mathbf{k}) a_3(\mathbf{k}) - a_0^\dagger(\mathbf{k}) a_0(\mathbf{k}) \} | \Psi \rangle \\ = \langle \Psi | \left[ a_3^\dagger(\mathbf{k}) \{ a_3(\mathbf{k}) - a_0(\mathbf{k}) \} + \{ a_3^\dagger(\mathbf{k}) - a_0^\dagger(\mathbf{k}) \} a_0(\mathbf{k}) \right] | \Psi \rangle \\ = 0\end{aligned}$$

となるから式 (141):

$$\langle \Psi | H | \Psi \rangle = \langle \Psi | \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=1}^2 \omega_{\mathbf{k}} a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}) | \Psi \rangle$$

を得る。

■ゲージ条件により自由度が2つ除かれる理由 一見すると1つのゲージ条件  $\partial_\mu A^\mu = 0$  を考慮しただけで, 4つの偏極状態から2つの自由度が除かれ, 観測量には横波光子 ( $r = 1, 2$ ) しか寄与しないことが示されるのは不思議である。しかしながら Lorenz 条件を満たすポテンシャル  $A^\mu$  は無数にあり, Lorenz ゲージの下でもなお, ゲージ変換  $A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu f$  を行う自由度が残されている。そこでゲージ関数  $f$  を固定すると, さらに自由度が1だけ減り, 古典論でよく知られているように電磁場の自由度は2となる<sup>\*23\*24</sup>。

<sup>\*23</sup> このような事情は“軸性ゲージ”において, より見やすい。すなわち  $A_0 = -\phi = 0$  と置くと, 場  $A_\mu$  の成分は3つになり, ここで物理的な状態  $|\Psi\rangle$  に対する補助条件  $(\nabla \cdot \mathbf{E}) |\Psi\rangle = 0$  を課すと, さらに自由度が1つ減る [13, p.94].

<sup>\*24</sup> 一見すると, 我々はゲージ条件を古典論と量子論の2段階で考慮していると考えたくなるかもしれない。すなわち, まず古典において, 自由電磁場はゲージ条件  $\partial_\mu A^\mu = 0$  を課すと波動方程式に従うため, 4つの偏極ベクトルを用いて展開される。次いで量子論において再びゲージ条件を式 (5.34):  $\partial_\mu A^{+\mu}(x) |\Psi\rangle = 0$  によって考慮したところ, 合計2つの自由度が取り除かれ, 2つの横波成分だけが観測量に寄与を持つことが説明される, と。しかし正しくは, 自由度は古典論の段階で2である。

### 5.3 光子の伝播関数

光子の伝播関数 (5.27) は

$$D_F^{\mu\nu}(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} D_F^{\mu\nu}(k) e^{-ik \cdot x},$$

$$D_F^{\mu\nu}(k) = \frac{-g^{\mu\nu}}{k^2 + i\varepsilon} = \frac{1}{k^2 + i\varepsilon} \sum_r \zeta_r \varepsilon_r^\mu(\mathbf{k}) \varepsilon_r^\nu(\mathbf{k}) \quad (5.39)$$

である\*25. [ここまでの結果は座標系に依らない.] これを解釈するために, 偏極ベクトルが

$$\varepsilon_0^\mu(\mathbf{k}) = n^\mu \equiv (1, 0, 0, 0), \quad \varepsilon_r^\mu(\mathbf{k}) = (0, \varepsilon_r(\mathbf{k})) \quad (r = 1, 2, 3)$$

(ただし  $\varepsilon_r^\mu(\mathbf{k})$  は正規直交系を成し,  $\varepsilon_3^\mu(\mathbf{k}) = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ ) で与えられる特定の座標系を採用すると, 波数 (運動量) 空間の伝播関数は

$$D_F^{\mu\nu}(k) = \frac{1}{k^2 + i\varepsilon} \left\{ \sum_{r=1}^2 \varepsilon_r^\mu(\mathbf{k}) \varepsilon_r^\nu(\mathbf{k}) + \frac{[k^\mu - (k \cdot n)n^\mu][k^\nu - (k \cdot n)n^\nu]}{(k \cdot n)^2 - k^2} + (-1)n^\mu n^\nu \right\} \quad (5.40)$$

と表される\*26. 各項は順に [ $r = 1, 2, r = 3, r = 0$  の項から得られ,] 横波光子, 縦波光子, スカラー光子の交換を表している.

後ろの 2 つの項 (縦波光子とスカラー光子の項) は, 両者を組合せた上で, 改めて  $n^\mu n^\nu$  に比例する項とそれ以外の項に分けた方が解釈しやすくなる.

$$D_F^{\mu\nu}(k) = {}_T D_F^{\mu\nu}(k) + {}_C D_F^{\mu\nu}(k) + {}_R D_F^{\mu\nu}(k), \quad (5.42)$$

$${}_T D_F^{\mu\nu}(k) \equiv \frac{1}{k^2 + i\varepsilon} \sum_{r=1}^2 \varepsilon_r^\mu(\mathbf{k}) \varepsilon_r^\nu(\mathbf{k}), \quad (5.41a)$$

$${}_C D_F^{\mu\nu}(k) \equiv \frac{n^\mu n^\nu}{(k \cdot n)^2 - k^2}, \quad (5.41b)$$

$${}_R D_F^{\mu\nu}(k) \equiv \frac{1}{k^2 + i\varepsilon} \left[ \frac{k^\mu k^\nu - (k \cdot n)(k^\mu k^\nu + k^\nu k^\mu)}{(k \cdot n)^2 - k^2} \right]. \quad (5.41c)$$

${}_T D_F^{\mu\nu}(k)$  は既に述べたように, 縦波光子の寄与である. また  ${}_C D_F^{\mu\nu}(k)$  は座標空間に移すと, 同時刻 Coulomb ポテンシャルの形

$${}_C D_F^{\mu\nu}(x) = \frac{g^{\mu 0} g^{\nu 0}}{(2\pi)^4} \int \frac{d^3k e^{k \cdot x}}{|\mathbf{k}|^2} \int dk^0 e^{-ik^0 x^0}$$

$$= g^{\mu 0} g^{\nu 0} \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} \delta(x^0) \quad (5.43)$$

になる [本稿次節で補足].

したがって式 (5.43) によって表される縦波光子とスカラー光子の交換は, 電荷間の同時刻 Coulomb 相互作用に対応している. 第 1 章では横波の輻射場だけを量子化し, 同時刻 Coulomb 場が力学的自由

\*25 式 (5.39) 第 2 の等号は偏極ベクトルの満たす式 (5.19):  $\sum_r \zeta_r \varepsilon_r^\mu(\mathbf{k}) \varepsilon_r^\nu(\mathbf{k}) = -g^{\mu\nu}$  による.

\*26 運動量空間の伝播関数 (5.39) において  $\zeta_r$  の定義式 (5.20):  $\zeta_0 = -1, \zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = 1$  を思い出し, 我々の座標系における偏極ベクトルの表式を用いる. 特に  $r = 3$  の項については, 式 (5.22c):  $\varepsilon_3^\mu(\mathbf{k}) = \frac{k^\mu - (k \cdot n)n^\mu}{[(k \cdot n)^2 - k^2]^{1/2}}$  を利用できる.

$$\begin{aligned}
D_F^{\mu\nu}(x) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot x}}{k^2 + i\epsilon} \left\{ \underbrace{\sum_{r=1}^2 \varepsilon_r^\mu(\mathbf{k}) \varepsilon_r^\nu(\mathbf{k})}_{r=1,2 \text{ 横波光子}} + \underbrace{\frac{[k^\mu - (k \cdot n)n^\mu][k^\nu - (k \cdot n)n^\nu]}{(k \cdot n)^2 - k^2}}_{r=3 \text{ 縦波光子}} + \underbrace{(-1)n^\mu n^\nu}_{r=0 \text{ スカラー光子}} \right\} \\
&= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot x}}{k^2 + i\epsilon} \left\{ \underbrace{\sum_{r=1}^2 \varepsilon_r^\mu(\mathbf{k}) \varepsilon_r^\nu(\mathbf{k})}_{\text{横波光子の伝播関数}} + \underbrace{\frac{k^2 n^\mu n^\nu}{(k \cdot n)^2 - k^2}}_{\substack{=g^{\mu 0} g^{\nu 0} \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} \delta(x^0) \\ \text{同時刻 Coulomb相互作用}}} + \underbrace{\frac{k^\mu k^\nu - (k \cdot n)(k^\mu k^\nu + k^\nu k^\mu)}{(k \cdot n)^2 - k^2}}_{\text{観測量に寄与しない}} \right\} \\
&\quad \begin{array}{l} \downarrow \\ \text{横波光子の伝播関数} \\ \downarrow \\ \text{同時刻 Coulomb相互作用} \\ \downarrow \\ \text{観測量に寄与しない} \end{array}
\end{aligned}$$

図 15 光子伝播関数の解釈 (特定の座標系)

度を持たず電荷分布によって完全に決まってしまうという事実により、これを古典的なポテンシャルとして扱った。しかしここでは縦波成分とスカラー場成分も量子化され、同時刻 Coulomb 相互作用は縦波光子とスカラー光子の交換の効果として現れる。(p.98, 1.11-16)

残る  ${}_R D_F^{\mu\nu}(k)$  はあらゆる観測量に寄与を持たない。例えば後で式 (7.14) の箇所で見るように、最低次の摂動論では電荷間の相互散乱の確率振幅は、演算子

$$\int d^4x d^4y s_1^\mu(x) D_{F\mu\nu}(x-y) s_2^\nu(y) \tag{5.44}$$

の行列要素で与えられる。電荷保存則  $\partial_\mu s_r^\mu(x) = 0$  を考慮すると ( $r = 1, 2$ )、 ${}_R D_F^{\mu\nu}(k)$  の上式 (5.44) への寄与はゼロになることが確かめられる [確認は下記]。この例証において、電磁場は保存する電荷-電流密度  $s_r^\mu(x)$  だけと相互作用することが重要である。

なお、式 (5.43) の  ${}_C D_F^{\mu\nu}(x)$  の式 (5.44) への寄与

$$\int d^4x d^4y s_1^\mu(x) {}_C D_{F\mu\nu}(x-y) s_2^\nu(y) = c^2 \int dx^0 d^3x d^3y \frac{\rho_1(\mathbf{x}, x^0) \rho_2(\mathbf{y}, x^0)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}$$

はあからさまに電荷  $\rho_1(\mathbf{x}, x^0) d^3x, \rho_2(\mathbf{y}, x^0) d^3x$  間の同時刻 Coulomb 相互作用に対応している。横波光子の伝播関数  ${}_T D_F^{\mu\nu}(x)$  の式 (5.44) への寄与は、電流密度  $\mathbf{s}_1(x), \mathbf{s}_2(y)$  間の電磁相互作用を表す。

以上の議論を図 15 に視覚的にまとめておく。

### 5.3 節、式の導出など

■  ${}_R D_F^{\mu\nu}(k)$  が式 (5.44) に寄与しないことの証明  ${}_R D_F^{\mu\nu}(x-y)$  の式 (5.44) への寄与は、運動量空間に変換すると

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k s_1^\mu(-k) {}_R D_F^{\mu\nu}(k) s_2^\nu(k) \tag{5.45}$$

となる [本稿次節で補足]。  ${}_R D_F^{\mu\nu}(k)$  は式 (5.41c) のように、  $k_\mu$  または  $k_\nu$  (もしくはこれら両方) に比例している。ところが電荷保存則  $\partial_\mu s_r^\mu(x) = 0$  は運動量空間において  $k_\mu s_r^\mu(k) = 0$  を意味するので ( $r = 1, 2$ )、上式

(5.45) はゼロになる。

### 5.3 について

■ $T D_F^{\mu\nu}(k)$  の式 (5.41a) について 電磁場の展開 (5.16) において, 実 Klein-Gordon 場の展開 (3.7) と比べて新たに加わった偏極ベクトルを除けば, 実空間の伝播関数への寄与

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} T D_F^{\mu\nu}(k) e^{-ik \cdot x}$$

は中間子の伝播関数 (3.58) に一致する。

■ $C D_F^{\mu\nu}(k)$  の式 (5.41b) について 係数  $k^2/(k^2 + i\varepsilon)$  は  $\varepsilon = 0$  とおいて 1 としてある。(分子に  $k^2$  が現れるため, 発散の恐れがなくなっている。)

■ $C D_F^{\mu\nu}(x)$  の式 (5.43) について 第 1 の等号では  $n^\mu = g^{\mu 0}, n^\nu = g^{\nu 0}$  を用いる。第 2 の等号では  $\mathbf{k}$  の極座標を積分変数にとり,

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}}{|\mathbf{k}|^2} &= \int \frac{e^{ikr \cos \theta}}{k^2} \frac{2\pi k^2 \sin \theta d\theta dk}{(2\pi)^3} = \int_0^\infty \frac{dk}{(2\pi)^2} \int_{-1}^1 d(\cos \theta) e^{ikr \cos \theta} = \frac{2}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \frac{\sin kr}{kr} \\ &= \frac{1}{4\pi r} \quad (k \equiv |\mathbf{k}|, r \equiv |\mathbf{r}|) \end{aligned}$$

とすれば良い。

■伝播関数 (5.43) が「同時刻 Coulomb ポテンシャルの性質を備えている」(p.98, l.10,11) ことについて このため縦波光子とスカラー光子の伝播関数への寄与 (5.43) が「電荷間の同時刻 Coulomb 相互作用に対応している」(p.98, l.12) ことは, 直観的に充分説得力があるが, そもそも伝播関数がポテンシャルに対応するのは次のように考えられる。まず Klein-Gordon 場に対して問題 3.3 で見たように, Feynman 伝播関数は場の方程式の Green 関数になる。電磁場  $A_\mu$  に対しては, (非斉次) 波動方程式の Green 関数は (適当な境界条件の下で), 遅延ポテンシャルの形をとる。縦波・スカラー光子の寄与に対応する Green 関数が実は同時刻 Coulomb ポテンシャルの形をとることは, これと同様の事情と推察できる。

■式 (5.44) について 式 (7.14) を見ても分かるように, 散乱する 2 つの電荷は同じ Dirac 場で記述されるので, 実際には電荷-電流密度  $s_r^\mu$  に電荷を指定する添字  $r = 1, 2$  を付ける必要はないと考えられる。

■式 (5.45) について 運動量空間への変換 (5.45) とは次の量である。

$$\begin{aligned} &\int d^4 x d^4 y s_1^\mu(x) {}_R D_{F\mu\nu}(x-y) s_2^\nu(y) \\ &= \int d^4 x d^4 y \left( \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} s_1^\mu(k') e^{-ik' \cdot x} \right) \left( \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} {}_R D_{F\mu\nu}(k) e^{-ik \cdot (x-y)} \right) \left( \int \frac{d^4 k''}{(2\pi)^4} s_2^\nu(k'') e^{-ik'' \cdot y} \right) \\ &= \int \frac{d^4 k' d^4 k d^4 k''}{(2\pi)^4} s_1^\mu(k') {}_R D_{F\mu\nu}(k) s_2^\nu(k'') \left( \int \frac{d^4 x}{(2\pi)^4} e^{-i(k'+k) \cdot x} \right) \left( \int \frac{d^4 y}{(2\pi)^4} e^{-i(k-k'') \cdot y} \right) \\ &= \int \frac{d^4 k' d^4 k d^4 k''}{(2\pi)^4} s_1^\mu(k') {}_R D_{F\mu\nu}(k) s_2^\nu(k'') \delta(k' + k) \delta(k - k'') \\ &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} s_1^\mu(-k) {}_R D_F^{\mu\nu}(k) s_2^\nu(k). \end{aligned}$$

## 練習問題 (第 5 章)

### 5.1 Fermi による自由電磁場のラグランジアン密度

自由電磁場のラグランジアン密度 (115):

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

と Fermi によって提案されたラグランジアン密度 (127):

$$\mathcal{L}_{\text{Fermi}} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu)$$

が, Lorenz 条件の下で同じ場の方程式へと導くことを示す.

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\ &= -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) + \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\nu A^\mu) \\ &= \mathcal{L}_{\text{Fermi}} + \frac{1}{2}\partial_\mu(A_\nu\partial^\nu A^\mu) \quad (\because \text{Lorenz 条件 (116)} : \partial_\mu A^\mu = 0)\end{aligned}$$

のように, 2つのラグランジアン密度の差は  $A_\nu\partial^\nu A^\mu/2$  の 4元発散である. このとき練習問題 2.1 で見たように, 2つのラグランジアン密度は等価となる.

## 第 6 章 S 行列展開

ここから先は場の相互作用を扱う。

- 摂動論により近似的に解く。  
(QED における結合の強さに相当する微細構造定数  $\alpha \simeq 1/137$  が小さいため、摂動論が成功。)
- Heisenberg 描像から相互作用描像へ切り替える。

6.1 節では自然単位系を導入する。6.2 節では衝突過程の取り扱いに適した摂動級数として、Dyson による S 行列展開を導く。6.3 節では S 行列展開を基に、着目する過程に関わる遷移振幅を任意の次数まで拾い上げる手続きを説明する。

### 6.1 自然単位系

自然単位系では質量 ( $M$ )、作用 ( $A$ )、速度 ( $V$ ) を基本的な次元と考え、 $\hbar$  を作用の単位量、光速  $c$  を速度の単位量として選ぶ。これは

$$\hbar = 1, \quad c = 1$$

とおくことに相当する。このとき任意の量は質量の冪  $M^n$  として表され、例えば

$$(\text{波数}) = (\text{運動量}) = (\text{エネルギー}) = (\text{質量}), \quad (\text{長さ}) = (\text{時間}) = (\text{質量})^{-1}$$

である。

自然単位系の量を別の単位系に変換するには、使用したい単位系で正しい次元になるように、 $\hbar$  と  $c$  の適当な冪を掛ければ良い。ここでは 2 つの例を取り上げる。

- Thomson 散乱の全断面積 (1.72):  $\sigma = \frac{8\pi}{3} \frac{\alpha^2}{m^2}$   
 $\frac{1}{m^2} = \frac{1}{(0.511\text{MeV})^2}$  に  $(\hbar c)^2 = (1.973 \times 10^{-11}\text{MeV} \cdot \text{cm})^2$  を掛けて  $\left(\frac{1.973 \times 10^{-11}}{0.511}\right)^2 \text{cm}^2$  とする。
- ポジトロニウム (電子-陽電子束縛系) の基底状態  $1^1S_0$  の寿命  $\tau = \frac{2}{\alpha^5} \frac{1}{m}$   
 $\frac{1}{m} = \frac{1}{0.511\text{MeV}}$  に  $\hbar = 6.58 \times 10^{-22}\text{MeV} \cdot \text{s}$  を掛けて  $\frac{6.58 \times 10^{-22}}{0.511}\text{s}$  とする。

また自然単位系の式を c.g.s. 単位系の式に直すには、

1. いくつかの項の和の形で与えられる式に対して、  
すべての項が同じ c.g.s. 次元を持つように各項に  $\hbar$  と  $c$  の冪を掛け、
2. 式全体が適正な c.g.s. 次元を持つように、全体に対して  $\hbar$  と  $c$  の適当な冪を掛ければ良い。

(もともと、c.g.s. 単位系の式に直す必要が生じることは少ない。)

### 6.1 について

■作用積分の次元 一般に指数関数の引数は無次元である。ここで自然単位系では、作用  $S$ 、運動量  $\mathbf{p}$ 、位置ベクトル  $\mathbf{r}$ 、エネルギー  $E$ 、時刻  $t$ 、角運動量  $\mathbf{J}$  に対して

$$1 = [S] = [Et] = [\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}] = [\mathbf{J}]$$

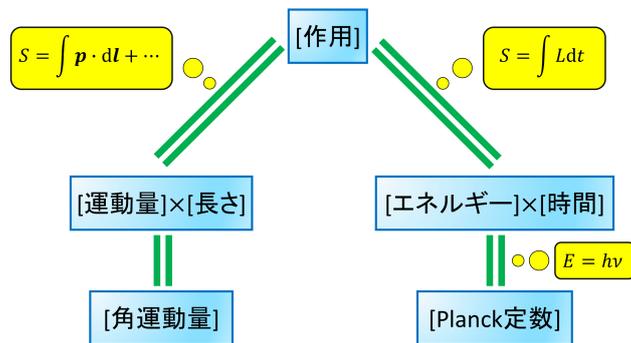


図 16 作用積分の次元を持つ量

なので (図 16 参照),  $e^{iS}, e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - Et)}, e^{i\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \phi}$  といった表現において位相は確かに無次元である ( $\mathbf{n}$  は単位ベクトル,  $\phi$  は角度を表す).

■ 諸量の次元の表 6.1 (教科書 p.103) について Heaviside 単位系での Coulomb 力の表式  $F = \frac{1}{4\pi} \frac{e^2}{r^2}$  とより, 電荷の次元は

$$[e] = \left( \frac{ML}{T^2} \times L^2 \right)^{1/2} = M^{1/2} L^{3/2} T^{-1}.$$

また  $[\hbar c] = AV = (ML^2 T^{-1}) \times (LT^{-1}) = ML^3 T^{-2}$  より, 微細構造定数は無次元であることが確かめられる.

$$[\alpha] = \left[ \frac{e^2}{4\pi \hbar c} \right] = 1.$$

## QED の全ラグランジアン密度とハミルトニアン密度

ここで 6.2 節と 6.3 節における, QED の完全なラグランジアン密度とハミルトニアン密度に関する説明をあらかじめ詳しくまとめておく.

### QED の全ラグランジアン密度

自由電磁場項  $-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$  を含めると, QED の完全なラグランジアン密度は

$$\mathcal{L} = \sum \bar{\psi}(i\mathcal{D} - m)\psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (147)$$

あるいは

$$\mathcal{L} = \sum \bar{\psi}(i\mathcal{D} - m)\psi + e \sum \bar{\psi} A \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

で与えられる (4.5 節参照). これが QED の原理である. ただしここでは QED の対象とするあらゆるスピン 1/2 の粒子を想定して, それぞれを記述する Dirac 場について和をとっている. QED ではスピン 1/2 の粒子として,

- 荷電レプトン  $l = e, \mu, \tau$  (電荷  $\pm e$  は共通, 質量  $m_l$  が異なる)

- 中性レプトン  $\nu_l, \bar{\nu}_l$  (電荷ゼロ, 質量  $m_{\nu_l}$ ,  $l = e, \mu, \tau$ )

が扱われ, それぞれに Dirac 場  $\psi_l, \psi_{\nu_l}$  をあてがうと, 具体的には

$$\sum \bar{\psi}(i\partial - m)\psi = \sum_l \{ \bar{\psi}_l(i\partial - m_l)\psi_l + \bar{\psi}_{\nu_l}(i\partial - m_{\nu_l})\psi_{\nu_l} \}, \quad e \sum \bar{\psi}A\psi = e \sum_l \bar{\psi}_l A \psi_l$$

と書ける (7.4 節, 第 2 巻 p.502, p.538). なお自由電磁場の項  $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$  は式 (127) の正準量子化に適した形  $\mathcal{L}_{\text{EM}} = -\frac{1}{2}(\partial_\nu A_\mu)(\partial^\nu A^\mu)$  に改めて良い.

QED のラグランジアン密度 (147) は

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I, \\ \mathcal{L}_0 &= \sum \mathcal{L}_{\text{Dirac}} + \mathcal{L}_{\text{EM}}, \quad \mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar{\psi}(i\partial - m)\psi, \\ \mathcal{L}_I &= e \sum \bar{\psi}A\psi \end{aligned}$$

のように, 自由場を記述する項  $\mathcal{L}_0$  と場の相互作用を記述する項  $\mathcal{L}_I$  から成る<sup>\*27</sup>. 場  $A_\mu, \psi$  に共役な運動量密度をそれぞれ  $\pi^\mu, \pi_\psi$  と書くと, ハミルトニアン密度の定義式

$$\mathcal{H} = \sum \pi_\psi \dot{\psi} + \pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{L}$$

により, ラグランジアン密度を

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \quad \rightarrow \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I$$

と置き換えたとき, ハミルトニアン密度には付加的な項

$$\mathcal{H}_I = -\mathcal{L}_I = -e \sum \bar{\psi}A\psi$$

が現れる. これは相互作用ハミルトニアンと呼ばれる.

#### QED の全ハミルトニアン密度

Dirac 場  $\psi$ , 電磁場  $A_\mu$  に共役な場

$$\begin{aligned} \pi_\psi &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi)} = \bar{\psi} i \gamma^0 = i \psi^\dagger, \\ \pi^\mu &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} = -F^{0\mu} = \begin{cases} 0 & (\mu = 0) \\ -F^{0i} & (\mu = i = 1, 2, 3) \end{cases} \end{aligned} \quad (148)$$

(自由場の場合の  $\pi_\psi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{Dirac}}}{\partial(\partial_0 \psi)}$ ,  $\pi^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{EM}}}{\partial(\partial_0 A_\mu)}$  と同じ) を用いて (p.69) [11, p.211, p.225], ハミルトニアンは

$$H = \int \mathcal{H} d^3x, \quad \text{ハミルトニアン密度: } \mathcal{H} = \sum \pi_\psi \dot{\psi} + \pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{L}$$

で定義される. ただし  $\dot{A}^\mu$  は式 (148) を用いて共役な場  $\pi^\mu$  で表されており, 具体的には

$$\mathcal{H} = \sum (i\psi^\dagger)\dot{\psi} - \sum \bar{\psi}(i\partial - m)\psi - e \sum \bar{\psi}A\psi - \frac{1}{2}\pi_k \pi^k + \pi^k \partial_k A_0 + \frac{1}{4}F_{kl}F^{kl} \quad (149)$$

である (導出は下記, ラテン文字  $k, l, \dots$  は空間成分 1, 2, 3 を動く) [11, p.225].

<sup>\*27</sup> そして全ラグランジアン密度は自由 Dirac 場項  $\mathcal{L}_{\text{Dirac}}$ , 自由電磁場項  $\mathcal{L}_{\text{EM}}$ , 相互作用項  $\mathcal{L}_I$  の 3 つから成っていると見ることができる.

### QED のハミルトニアン密度 (補足)

QED のハミルトニアン密度の式 (149) を導く. ラグランジアン密度の式 (147), 共役な場の式 (148) よりハミルトニアン密度は

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \sum_l \pi_\psi \dot{\psi} + \pi^\mu A_\mu - \mathcal{L} \\ &= \sum (i\psi^\dagger)\dot{\psi} + \pi^k \dot{A}_k - \sum \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi - e \sum \bar{\psi}A\psi + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\end{aligned}$$

となる. 最右辺に現れる  $\dot{A}_\mu$  を  $\pi^\mu$  で表すと

$$\begin{aligned}\pi^k \dot{A}_k &= \pi^k (-\pi_k + \partial_k A_0), \quad (\because \text{式 (148)}) \\ \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}F_{0k}F^{0k} + \frac{1}{4}F_{kl}F^{kl} \quad (\because F_{k0}F^{k0} = F_{0k}F^{0k}) \\ &= \frac{1}{2}\pi_k\pi^k + \frac{1}{4}F_{kl}F^{kl} \quad (\because \text{式 (148)})\end{aligned}$$

なので, ハミルトニアン密度の式 (149):

$$\mathcal{H} = \sum (i\psi^\dagger)\dot{\psi} - \sum \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi - e \sum \bar{\psi}A\psi - \frac{1}{2}\pi_k\pi^k + \pi^k\partial_k A_0 + \frac{1}{4}F_{kl}F^{kl}$$

を得る [11, p.225].

### 演算子と正規積

次に場を量子化された Heisenberg 描像の演算子と見なす. これに伴い正規積を導入すると, 演算子としての自由場のラグランジアン密度  $\mathcal{L}_0$ , 相互作用ラグランジアン密度  $\mathcal{L}_I$ , 相互作用ハミルトニアン密度  $\mathcal{H}_I$  はそれぞれ

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0 &= N \left[ \sum \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi - \frac{1}{2}(\partial_\nu A_\mu)(\partial^\nu A^\mu) \right], \\ \mathcal{L}_I &= e \sum N [\bar{\psi}A\psi], \\ \mathcal{H}_I &= -e \sum N [\bar{\psi}A\psi]\end{aligned}\tag{150}$$

となる (pp.104–105, p.110).

■正規積 ここで正規積  $N[QR\cdots W]$  とは演算子積  $QR\cdots W$  を, 全ての生成演算子が全ての消滅演算子よりも右側にある配置  $Q'R'\cdots W'$  に並べ替えたものであり, ボゾン因子とフェルミオン因子を含む一般的な系に対しては次式で定義される.

$$N[QR\cdots W] = (-1)^P Q'R'\cdots W'.\tag{151}$$

ただし  $QR\cdots W$  はそれぞれ生成演算子または消滅演算子のいずれか一方のみを含む, 生成・消滅演算子に関して 1 次の演算子であり,  $P$  は  $QR\cdots W$  を  $Q'R'\cdots W'$  に並べ替えるときに隣接するフェルミオン演算子を入れ換える回数である. また任意の演算子積に対して正規積が定義されるように, 分配則

$$N[RS\cdots + VW\cdots] = N[RS\cdots] + N[VW\cdots]\tag{152}$$

が成り立つものとする。こうしてラグランジアン密度やエネルギー・運動量、電荷などの観測量  $A$  を正規積  $N[A]$  で再定義すると、古典論との対応を損なうことなくその真空期待値  $\langle 0|A|0\rangle$  をゼロにできる (pp.48–49,p.73,p.110)。ここで 3.1 節において、無限大の真空期待値を与える実 Klein-Gordon 場のハミルトニアンを正規順序化して、真空期待値をゼロにしたことを思い出そう。

## 6.2 S 行列展開

ここでは素粒子の反応を念頭に置き、場の相互作用を摂動として扱う方法を定式化する。それを行うには相互作用描像が適している。実際、相互作用描像の場  $A^I(t)$  に対する運動方程式 (1.87):

$$\frac{dA^I}{dt} = \frac{1}{i}[A^I, H_0]$$

は、自由場の Hamilton 演算子  $H_0$  によって記述される Heisenberg 描像の自由場  $A^H(t)$  に対する運動方程式 (1.80):

$$\frac{dA^H}{dt} = \frac{1}{i}[A^H, H_0]$$

と同じものなので、相互作用する場は自由場と同様に Fourier 展開される。また QED を考えると、相互作用ラグランジアン密度  $\mathcal{L}_I = e \sum \bar{\psi} A \psi$  は場の微分に依らない。よって相互作用する場に共役な場は自由場に共役な場と同じものとなる:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{A}_\mu}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{\psi}}.$$

このため  $A^\mu, \psi$  を Heisenberg 描像における自由場、 $\pi^\mu, \pi_\psi$  をそれぞれ  $A^\mu, \psi$  に共役な場とすると、相互作用描像における場はユニタリー変換 (1.90):

$$A^{\mu I} = U^\dagger A^\mu U, \quad \psi^I = U^\dagger \psi U, \quad \pi^{\mu I} = U^\dagger \pi^\mu U, \quad \pi_\psi^I = U^\dagger \pi_\psi U$$

で与えられるため、これらは自由場と同じ同時刻 (反) 交換関係

$$[A^{\mu I}(\mathbf{x}, t), \pi^{\nu I}(\mathbf{x}', t)] = ig^{\mu\nu} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad \{\psi^I(\mathbf{x}, t), \pi_\psi^I(\mathbf{x}', t)\} = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad \text{etc}$$

を満たす (2.4 節のノート「ユニタリー変換 (2.33) について」を参照)。以上より場の Fourier 展開や正準 (反) 交換関係をはじめとし、ここから導かれる Heisenberg 描像の自由場に対する結果 (占有数表示や Feynman 伝播関数の表式) を相互作用描像における場にも流用することができる。

相互作用描像を採用し、以降ケットやブラ、演算子から相互作用描像のものであることを表す添字の I を省く。そして系の状態を  $|\Phi(t)\rangle$  と書き、始状態を粒子の衝突が起こるよりも十分前の時刻  $t = -\infty$  の状態

$$|i\rangle = |\Phi(-\infty)\rangle$$

に設定する。時刻  $t = -\infty$  において粒子は互いに無限に離れており相互作用していないので、始状態  $|i\rangle$  として粒子の個数、運動量、スピン・偏極が確定した状態を考えられる。一方、時刻  $t = \infty$  の状態  $|\Phi(\infty)\rangle$  を終状態と呼ぶ。これは衝突した (すなわち相互作用した) 粒子が再び無限に遠ざかった状態に対応する。そして系の状態  $|\Phi(t)\rangle$  は式 (6.12):

$$i \frac{d}{dt} |\Phi(t)\rangle = H_I(t) |\Phi(t)\rangle$$

に従って時間発展し、始状態  $|i\rangle$  から終状態  $|\Phi(\infty)\rangle$  に変化する。ここで始状態  $|i\rangle$  と終状態  $|\Phi(\infty)\rangle$  を次式で関係付ける演算子として S 演算子 (S 行列) を定義する。

$$|\Phi(\infty)\rangle = S|i\rangle.$$

すなわち S 演算子は相互作用描像における、時刻  $t = -\infty$  から時刻  $t = \infty$  への時間発展の演算子である。[このことは式 (12.4h):  $S = U(\infty, -\infty)$  においてはじめて明記されている.] そして終状態  $|\Phi(\infty)\rangle$  には、S 演算子によって引き起こされるあらゆる可能な時間発展の結果が重畳として含まれている。これに対して、粒子の衝突・散乱後の時刻  $t = \infty$  における終状態として、粒子の個数、運動量、スピン・偏極を指定した状態  $|f\rangle$  を考える。このとき遷移  $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$  は具体的な素粒子の反応を表し、考えている素粒子の反応  $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$  が起きる確率、すなわち系の終状態  $|\Phi(\infty)\rangle$  を状態  $|f\rangle$  に見いだす確率は  $|\langle f|\Phi(\infty)\rangle|^2$  で与えられる。そして対応する確率振幅

$$\langle f|\Phi(\infty)\rangle = \langle f|S|i\rangle \equiv S_{fi}$$

は S 演算子の行列要素となる。

**S 演算子のユニタリー性** 時間発展方程式 (6.12):  $i\frac{d}{dt}|\Phi(t)\rangle = H_I(t)|\Phi(t)\rangle$  における  $H_I(t)$  の Hermite 性より、状態ベクトル  $|\Phi(t)\rangle$  の時間発展はユニタリー変換となる [本稿次節で補足]。よって状態ベクトルのノルム (および規格化) は、時間の経過の下で保存される。

$$\langle \Phi(t)|\Phi(t)\rangle = \text{const.}$$

S 行列のユニタリー性は

$$\sum_f |S_{fi}|^2 = 1 \quad (6.20)$$

と表される [本稿次節で補足]。これは (粒子の生成・消滅も許容したすべての可能性を含め、) 何らかの終状態が実現する確率の総和が 1 であることを保証している。

今 QED を考え、中性レプトンを度外視して物質粒子として荷電レプトンのみを考慮すると (7.4 節)、相互作用ハミルトニアンは

$$H_I(t) = \int \mathcal{H}_I(x) d^3x, \quad \mathcal{H}_I(x) = -e \sum_l N[\bar{\psi}_l(x) A(x) \psi_l(x)]: \text{相互作用ハミルトニアン密度 (7.52)}$$

である。これは偶数個のフェルミオン場を含むので、異なる時刻の  $H_I(t)$  が交換することに注意すると、時間発展方程式 (6.12) の帰結として S 演算子は

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n T\{\mathcal{H}_I(x_1) \cdots \mathcal{H}_I(x_n)\} \quad (153)$$

と展開されることが分かる ( $T\{\cdots\}$  は以下で定義する時間順序化積)。これは Dyson 展開と呼ばれ<sup>\*28</sup>、場の相互作用を摂動とした S 演算子の摂動級数を成す。相互作用ハミルトニアン密度の式 (7.52) を代入してこれを具体的に書くと

<sup>\*28</sup> Dyson 展開は通常の指数  $\exp\{-i \int dt H_I(t)\}$  の展開とよく似た形を持つため、 $S = T \exp\{-i \int dt H_I(t)\}$  と書く。

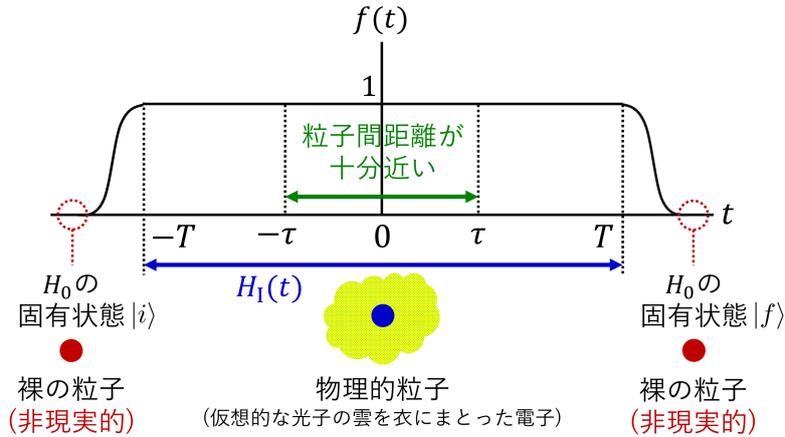


図 17 断熱仮説

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ie)^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \sum_{l_1, \dots, l_n} T\{N(\bar{\psi}_{l_1} A \psi_{l_1})_{x_1} \cdots N(\bar{\psi}_{l_n} A \psi_{l_n})_{x_n}\} \quad (154)$$

となる (ただし  $N(\bar{\psi}_l A \psi_l)_x \equiv N[\bar{\psi}_l(x) A(x) \psi_l(x)]$  である)。

**時間順序化積** 時間順序化積または T 積を  $T\{\dots\}$  と書く。これは引数の時刻がより早い演算子が先にケットに作用するように、演算子積の演算子を引数の時刻の順序が右から左になるように並べ替えたものである。ただし並べ替えの際、隣接するフェルミオン場どうしを入れ替えると符号が入替わるものとする。例えば  $x_1^0 < x_2^0 < x_3^0$  とすると、ボゾン場  $\phi$ 、フェルミオン場  $\psi_a, \psi_b$  に対して

$$T\{\phi(x_1)\psi_a(x_2)\psi_b(x_3)\} = -\psi_b(x_3)\psi_a(x_2)\phi(x_1)$$

である。また演算子積を T 積に並び替えることを時間順序化と呼ぶ。これは 2 つの演算子に対する T 積 (pp.56-57, p.78) の自然な一般化にあたり、演算子の入れ替えの規則は正規順序化の場合と同じである。

■断熱仮説 例えば電子は他の電子と離れた状態にあっても、仮想的な光子の雲を“衣にまとって”いる。このため始・終状態  $|i\rangle, |f\rangle$  を自由場ハミルトニアン  $H_0$  の固有状態 (裸の粒子の状態) と考えることは非現実的である。そこで断熱仮説を導入する。これは散乱を、実質的に相互作用の起きている間よりも遙か以前・以後の記述に依らないものと仮定して  $t \rightarrow \pm\infty$  において相互作用  $H_1$  をゼロにし、始・終状態の粒子を裸の粒子とする扱いを正当化するものである。そのためには  $t \rightarrow \pm\infty$  においてゼロになり、散乱過程の [実質的な] 時間よりも充分長い時間  $T$  においてほとんど 1 となるような関数  $f(t)$  を用い、相互作用  $H_1(t)$  を  $f(t)H_1(t)$  に置き換えれば良い (図 17 参照)。これは QED では、素電荷  $e$  を  $ef(t)$  に置き換える措置と等価である。

## 6.2 節, 式の導出など

■Dyson 級数 (153) の導出 教科書の説明を補いつつ, QED において S 演算子が式 (153) のように Dyson 級数に展開されることを示す. 状態  $|\Phi(t)\rangle$  の時間発展方程式 (6.12):

$$i \frac{d}{dt} |\Phi(t)\rangle = H_I(t) |\Phi(t)\rangle$$

は初期条件  $|\Phi(-\infty)\rangle = |i\rangle$  を考慮すると

$$|\Phi(t)\rangle = |i\rangle + (-i) \int_{-\infty}^t dt' H_I(t') |\Phi(t')\rangle$$

と書き換えられる. 逐次代入により

$$\begin{aligned} |\Phi(t)\rangle &= |i\rangle + (-i) \int_{-\infty}^t dt_1 H_I(t_1) |i\rangle + (-i)^2 \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) |i\rangle + \cdots \\ &\rightarrow S |i\rangle \quad (t \rightarrow \infty), \\ \therefore S &= \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1) H_I(t_2) \cdots H_I(t_n) \end{aligned} \quad (155)$$

を得る. ここで上式 (155) の右辺について,  $n=0$  の項は 1,  $n=1$  の項は  $-i \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 H_I(t_1)$  と約束する. 次にこれを

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n \mathcal{T}\{H_I(t_1) H_I(t_2) \cdots H_I(t_n)\} \quad (156)$$

と書き換えられることについて説明する. 式 (156) の積分範囲は  $n$  次元空間  $(t_1, t_2, \dots, t_n)$  全体である. これは  $n!$  通りの置換

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_n \end{pmatrix}$$

に対して, 不等式  $t_{\pi n} \leq t_{\pi(n-1)} \leq \cdots \leq t_{\pi 2} \leq t_{\pi 1}$  で表される  $n!$  個の領域に分けられる. その各々にわたる積分は

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_{\pi 1} \int_{-\infty}^{t_{\pi 1}} dt_{\pi 2} \cdots \int_{-\infty}^{t_{\pi(n-1)}} dt_{\pi n} \mathcal{T}\{H_I(t_1) H_I(t_2) \cdots H_I(t_n)\}$$

なので

$$\begin{aligned} (\text{式 (156) 右辺}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \sum_{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt_{\pi 1} \int_{-\infty}^{t_{\pi 1}} dt_{\pi 2} \cdots \int_{-\infty}^{t_{\pi(n-1)}} dt_{\pi n} \mathcal{T}\{H_I(t_1) H_I(t_2) \cdots H_I(t_n)\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \sum_{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt_{\pi 1} \int_{-\infty}^{t_{\pi 1}} dt_{\pi 2} \cdots \int_{-\infty}^{t_{\pi(n-1)}} dt_{\pi n} H_I(t_{\pi 1}) H_I(t_{\pi 2}) \cdots H_I(t_{\pi n}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \times n! \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1) H_I(t_2) \cdots H_I(t_n) \\ &= (\text{式 (155) 右辺}) \end{aligned}$$

となるから確かに式 (156) が成り立つ。ここで第2の等号で  $H_I(t_1)H_I(t_2)\cdots H_I(t_n)$  を  $H_I(t_{\pi_1})H_I(t_{\pi_2})\cdots H_I(t_{\pi_n})$  に並べ替えるとき、QED では異なる時刻の  $H_I(t)$  が交換することを用いた。以上より

$$\begin{aligned} \text{式 (156)} : S &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n T\{H_I(t_1)H_I(t_2)\cdots H_I(t_n)\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n T\{\mathcal{H}_I(x_1)\cdots \mathcal{H}_I(x_n)\} : \text{式 (153)} \end{aligned}$$

を得る。

## 6.2 について

■「 $H_I(t)$  の Hermite 性により、……ユニタリー変換となるはず」(p.106, l.11,12) について 時間発展演算子が微小時間  $dt$  の1次の近似で  $U = 1 - iH_I dt$  となることは、今の場合にも正しい。

■S行列のユニタリー性 (6.20) について 正しくは  $f$  について和をとる (本稿の要約では訂正を反映した)。  
S行列 ( $S_{fi}$ ) のユニタリー性は

$$\delta_{ij} = \sum_f S_{if}^\dagger S_{fj} = \sum_f S_{fi}^* S_{fj}, \quad \delta_{ij} = \sum_f S_{if} S_{fj}^\dagger = \sum_f S_{if} S_{jf}^*$$

と表され、特に  $i = j$  とおくと

$$1 = \sum_f |S_{fi}|^2, \quad 1 = \sum_f |S_{if}|^2$$

が得られる。第1式は式 (6.20) であり、これは与えられた始状態  $i$  から可能な全ての終状態  $f$  への遷移確率の和が1になることを意味している。第2式によれば全ての可能な始状態  $f$  から与えられた終状態  $i$  への遷移確率の和も1となる。

■「QEDにおいて…… $\alpha \approx 1/137$ であり、これが小さいのでQEDでは摂動解が意味を持つ」(p.107 下3行) について  $\hbar, c$  をあらわに書くと、式 (6.21) で  $-i \rightarrow -i/\hbar$ , 式 (6.23) で  $-i \rightarrow -i/\hbar c$  と置き換わるので、 $\mathcal{H}_I$  の式 (6.24) とより Dyson 級数の  $n$  次の項は  $(e/\hbar c)^n \sim \alpha^{n/2}$  程度となっている。

自然単位系に戻ろう。Dyson 級数の  $n = 1$  の項は観測量に関係する確率  $|S_{fi}|^2$  に対して  $e^2 \sim \alpha$  程度の寄与を持つ。ただし  $n$  次の項が  $|S_{fi}|^2$  に  $e^{2n} \sim \alpha^n$  程度の寄与を持つとまでは言えないと考えられる。実際、例えば  $n = 2$  の項 ( $\sim e^2$ ) は  $|S_{fi}|^2$  の中で  $n = 1$  の項 ( $\sim e$ ) と掛け合わさって、 $e^3$  程度の項を作る。

■「裸の電子」(p.109, l.3) について もう少し上品な言い方があれば良いが、例えば「自由粒子 (電子)」で代用すると、散乱する相手の粒子と離れてはいるけれど仮想光子の衣をまとってはいる電子と混同が生じかねない。本稿でも慣例に従って、「裸の粒子」といった表現を用いる。

■「断熱仮説」(p.109, l.5-6) という術語について 物理学では、断熱という言葉がいろいろな意味に使われる。ときにはその間に共通なものを見出すことが困難なこともある [12, p.187]。

## 6.3 Wick の定理

本稿では QED の相互作用ハミルトニアン (6.24) と正規積の一般的な定義について前もってまとめてあるので、これらの話題はここでは省略し、S行列要素を指定した摂動の次数に関して求める考え方を述べる。式

(153) の S 演算子は、相互作用ハミルトニアン密度  $\mathcal{H}_I(x)$  に含まれる場が生成・消滅演算子の 1 次であるため、多数の粒子の生成・消滅過程を記述している。このうち行列要素  $\langle f|S|i\rangle$  に寄与するのは、始状態  $|i\rangle$  の粒子を消す消滅演算子と終状態  $|f\rangle$  の粒子を創る生成演算子を含む項だけである。そのような項を S 演算子の Dyson 展開 (153) から拾い出すのに、以下の Wick の定理が有用である。

■Wick の定理  $n$  個の場  $A_1, A_2, \dots, A_n$  をそれぞれ電磁場  $A^\mu$  (従ってボゾン場)、フェルミオン場  $\psi_l, \bar{\psi}_l$  のいずれかとすると、これらが異なる時刻を引数に持つとき次の恒等式が成り立つ (Wick の定理)。

$$\begin{aligned} T\{A_1 A_2 \cdots A_n\} = & N[A_1 A_2 \cdots A_n] \\ & + N[\underbrace{A_1 A_2 \cdots}_{\text{---}}] + \cdots + N[\cdots \underbrace{A_{n-1} A_n}_{\text{---}}] \\ & + N[\underbrace{A_1 A_2 A_3 A_4 \cdots}_{\text{---}}] + \cdots + N[\cdots \underbrace{A_{n-3} A_{n-2} A_{n-1} A_n}_{\text{---}}] \\ & + \cdots \end{aligned} \quad (157)$$

ここに  $A, B, \dots$  を電磁場  $A^\mu$ 、フェルミオン場  $\psi_l, \bar{\psi}_l$  のいずれかとすると、

$$\underbrace{A(x_1) B(x_2)}_{\text{---}} \equiv \langle 0|T\{A(x_1) B(x_2)\}|0\rangle \quad (158)$$

であり、これは  $A(x_1)$  と  $B(x_2)$  の縮約と呼ばれる。ゼロでない縮約は Feynman 伝播関数

$$\begin{aligned} \underbrace{\psi_\alpha(x_1) \bar{\psi}_\beta(x_2)}_{\text{---}} &= -\underbrace{\bar{\psi}_\beta(x_2) \psi_\alpha(x_1)}_{\text{---}} = iS_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2), \quad (\text{各 Dirac 場に対して}) \\ \underbrace{A^\mu(x_1) A^\nu(x_2)}_{\text{---}} &= iD_F^{\mu\nu}(x_1 - x_2) \end{aligned}$$

である\*29。また、例えば

$$N[\underbrace{ABCDEF \cdots JKLM \cdots}_{\text{---}}] = (-1)^P \underbrace{AK}_{\text{---}} \underbrace{BCEL \cdots}_{\text{---}} N[DF \cdots JM \cdots]$$

であり、 $P$  は  $ABC \cdots$  を  $AKB \cdots$  に並べ替える際に隣接するフェルミオン場を入れ換える回数である。そして上式 (157) 右辺の 2 行目、3 行目、 $\dots$  はそれぞれ縮約を 1 回、2 回、 $\dots$  含む項から成る。本稿では  $n = 2$  の場合に Wick の定理 (157) が成り立つことを確かめて満足することにする (導出は下記)\*30。

さて、Dyson 展開 (153) における  $T\{\mathcal{H}_I(x_1) \cdots \mathcal{H}_I(x_n)\}$  からは  $T\{N(AB \cdots)_{x_1} \cdots N(AB \cdots)_{x_n}\}$  の形の混合 T 積 (正規積で表される因子の T 積) が得られる。ただし  $(AB \cdots)_x \equiv A(x)B(x) \cdots$ ,  $N(AB \cdots)_x \equiv N[A(x)B(x) \cdots]$  である。これに対しては Wick の定理 (157) と同じ形の展開

$$\begin{aligned} & T\{N(AB \cdots)_{x_1} \cdots N(AB \cdots)_{x_n}\} \\ &= N[(AB \cdots)_{x_1} \cdots (AB \cdots)_{x_n}] \\ &+ N[\underbrace{(AB \cdots)_{x_1} \cdots (AB \cdots)_{x_n}}_{\text{---}}] + N[\underbrace{(ABC \cdots)_{x_1} \cdots (AB \cdots)_{x_n}}_{\text{---}}] + \cdots \\ &+ N[\underbrace{(ABCD \cdots)_{x_1} \cdots (AB \cdots)_{x_n}}_{\text{---}}] + \cdots \\ &+ \cdots \end{aligned} \quad (159)$$

において、右辺から同時刻縮約を除いた式が成り立つ (証明は下記)。同時刻縮約とは、共通の時刻  $x_r^0$  を引数に持つ場のグループ  $(AB \cdots)_{x_r}$  の範囲内の縮約のことである。

\*29 Klein-Gordon 場を対象に含めれば、

$$\begin{aligned} \phi(x_1)\phi(x_2) &= i\Delta_F(x_1 - x_2), \quad (\text{実 Klein-Gordon 場に対して}) \\ \underbrace{\phi(x_1)\phi^\dagger(x_2)}_{\text{---}} &= \underbrace{\phi^\dagger(x_2)\phi(x_1)}_{\text{---}} = i\Delta_F(x_1 - x_2). \quad (\text{複素 Klein-Gordon 場に対して}) \end{aligned}$$

\*30 一般の  $n$  に対する証明は帰納的に行われ、さほど教育的ではない。

### 6.3 節, 式の導出など

■Wick の定理の導出 異なる時刻を引数に持つ  $n$  個の場  $A_1, A_2, \dots, A_n$  に対して Wick の定理 (157):

$$\begin{aligned} T\{A_1 A_2 \cdots A_n\} = & N[A_1 A_2 \cdots A_n] \\ & + N[\underbrace{A_1 A_2 \cdots}_{\square}] + \cdots + N[\cdots \underbrace{A_{n-1} A_n}_{\square}] \\ & + N[\underbrace{A_1 A_2 A_3 A_4 \cdots}_{\square}] + \cdots + N[\cdots \underbrace{A_{n-3} A_{n-2} A_{n-1} A_n}_{\square}] \\ & + \cdots \end{aligned}$$

が成り立つ。ただし場  $A_1, A_2, \dots, A_n$  はそれぞれ電磁場  $A^\mu$  (従ってボゾン場), フェルミオン場  $\psi_l, \bar{\psi}_l$  のいずれかである。ここで  $n = 2$  の場合を考えよう。縮約  $\underbrace{AB}_{\square}$  は通常の数なので  $N[\underbrace{AB}_{\square}] = \underbrace{AB}_{\square}$  であることに注意すると, このとき Wick の定理 (157) は

$$T\{AB\} = N[AB] + \underbrace{AB}_{\square} \quad (160)$$

を与える。ここではこの式 (160) が正しいことを確かめる (pp.110–111).

電磁場の Fourier 展開 (118), (119), (120), Dirac 場の Fourier 展開 (94), (95) のように, 一般に場  $A$  の消滅演算子のみを含む部分 (正振動数部分) を  $A^+$ , 生成演算子のみを含む部分 (負振動数部分) を  $A^-$  と書くと,

$$AB = (A^+ + A^-)(B^+ + B^-) = A^+B^+ + A^+B^- + A^-B^+ + A^-B^-$$

となる。一方, これ以降に現れる複合は  $A, B$  が両方ともフェルミオン場のときには上側を, それ以外のときには下側をとるものと約束すると, 正規積の一般的な定義式 (151), (152) により

$$N[AB] = A^+B^+ \mp B^-A^+ + A^-B^+ + A^-B^- \quad (161)$$

なので, これらを辺々引いて

$$AB - N[AB] = \begin{cases} \{A^+, B^-\} & \text{両方ともフェルミオン場} \\ [A^+, B^-] & \text{その他} \end{cases}$$

を得る。最右辺は通常の数なのでそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} \{A^+, B^-\} &= \langle 0 | \{A^+, B^-\} | 0 \rangle \\ [A^+, B^-] &= \langle 0 | [A^+, B^-] | 0 \rangle \end{aligned} \right\} = \langle 0 | A^+ B^- | 0 \rangle = \langle 0 | AB | 0 \rangle$$

と書き換えられることに注意すると, これは

$$AB = N[AB] + \langle 0 | AB | 0 \rangle \quad (162)$$

となる。さらに正規積の式 (161) により

$$\begin{aligned} N[AB] &= B^+A^+ \mp A^-B^+ + B^-A^+ + B^-A^- \\ &= \mp A^+B^+ \mp A^-B^+ + B^-A^+ \mp A^-B^- \\ &= \mp N[AB] \end{aligned} \quad (163)$$

であることに注意する。以上より場  $A, B$  の引数をそれぞれ  $x_1, x_2$  とし,  $t_1 \equiv x_1^0, t_2 \equiv x_2^0 (\neq t_1)$  と書くと,  $t_1 > t_2$  のとき

$$\begin{aligned} T\{AB\} &= AB = N[AB] + \langle 0 | AB | 0 \rangle \quad (\because \text{式 (162)}) \\ &= N[AB] + \langle 0 | T\{AB\} | 0 \rangle, \end{aligned}$$

$t_2 > t_1$  のとき

$$\begin{aligned} T\{AB\} &= \mp BA = \mp(N[BA] + \langle 0|BA|0\rangle) \quad (\because \text{式 (162)}) \\ &= \mp(\mp N[AB] \mp \langle 0|T\{AB\}|0\rangle) \quad (\because \text{式 (163)}) \\ &= N[AB] + \langle 0|T\{AB\}|0\rangle \end{aligned}$$

となり、確かに式 (160) が成り立っている。

最後に混合 T 積

$$T\{N(AB\cdots)_{x_1} \cdots N(AB\cdots)_{x_n}\}$$

に対しては Wick の定理 (157) と同じ形の展開 (159) から同時刻縮約を除いた式が成り立つことを説明する (p.113). 共通の引数  $x_r = (x_r^0, \mathbf{x}_r)$  を持つ場のグループ  $(AB\cdots)_{x_r}$  に対して、 $\varepsilon > 0$  として負振動数部分 (生成演算子のみを含む)  $A^-, B^-, \cdots$  の引数を  $(x_r^0 + \varepsilon, \mathbf{x}_r)$  に、正振動数部分 (消滅演算子のみを含む)  $A^+, B^+, \cdots$  の引数を  $(x_r^0 - \varepsilon, \mathbf{x}_r)$  に置き換える。そして引数を  $\xi_r \equiv (x_r^0, \mathbf{x}_r)$  に置き換えられた場のグループを  $(AB\cdots)_{\xi_r}$  と書く。このとき  $(AB\cdots)_{\xi_r}$  を正規順序化することは  $(AB\cdots)_{\xi_r}$  を時間順序化することと同じだから、

$$\begin{aligned} T\{N(AB\cdots)_{x_1} \cdots N(AB\cdots)_{x_n}\} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T\{N(AB\cdots)_{\xi_1} \cdots N(AB\cdots)_{\xi_n}\} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T\{(AB\cdots)_{\xi_1} \cdots (AB\cdots)_{\xi_n}\} \end{aligned}$$

となる。ここで最右辺の T 積に対して Wick の定理 (157) を適用することを考える。このとき 1 つのグループ  $(AB\cdots)_{\xi_r}$  に含まれる 2 つの場 (それらを  $A', B'$  と呼ぼう) の縮約が現れる。ところが再び  $A'B'$  の時間順序化が  $A'B'$  の正規順序化に一致することに注意し、さらに正規積の真空期待値はゼロになることを思い出すと、そのような縮約はゼロになることが分かる:

$$\underbrace{A'B'}_{\square} \equiv \langle 0|T\{A'B'\}|0\rangle = \langle 0|N[A'B']|0\rangle = 0.$$

従って Wick の定理 (157) と同じ形の展開 (159) から同時刻縮約を除いた式が成り立つ。

### 6.3 について

■「正規積では……中間状態として仮想粒子の生成-再消滅を起こすことはない」(p.110, 1.3-6) について しかしながら「これらの一般化正規積において生じるゼロにならない縮約は Feynman 伝播関数 (6.32) となり、中間状態における仮想粒子の生成-再消滅に対応する」(p.113, 下から 4,3 行目)。

■式 (6.25a), (6.27), (6.30) について ボゾン場  $Q, A^+, A$  とフェルミオン場  $R, B^-, B$  は交換するから、

$$\begin{aligned} \text{式 (6.25a) において} \quad N(QR) &= QR \text{ または } RQ, \\ \text{式 (6.27) において} \quad N(A^+B^-) &= B^-A^+, \\ \text{式 (6.30) において} \quad T\{AB\} &= +T\{BA\}. \end{aligned}$$

■式 (6.29) について 正しくは符号が逆と考えられる (「6.3 節, 式の導出など」を参照)。

■式 (6.30) について 確認は本稿の式 (160) の証明を参照 (この証明は式 (6.29) の符号を訂正してはじめて上手くいく)。

■「(3.60)」(p.111 下から 3 行目) について 式 (3.60) は存在しない。式 (6.32a) の根拠として、代わりに式 (3.55) を参照すれば良い。

## 第 7 章 QED のダイアグラム規則

やや長くなるが、概要として序文を引用する。

前章では S 行列展開 (6.23) と、その各項をさらに正規積の和に展開するために用いる Wick の定理を得た。本章では、指定された始状態  $|i\rangle$  から終状態  $|f\rangle$  への遷移を起こす行列要素  $\langle f|S|i\rangle$  を、任意の次数の摂動論で計算する方法を示す。曖昧さを避けるために、ここでは対象を QED に限定して計算方法を示すことにしよう。QED における方法が理解できれば、他の場合に適用すべき形式も容易に導出できる。

7.1 節において、S 行列展開から、着目する  $\langle f|S|i\rangle$  に対して、決められた次数の摂動の下で寄与を持つ項を拾い上げる方法を示す。そのような項は容易に特定される。すなわちその項は、始状態  $|i\rangle$  において含まれる粒子を消滅させる演算子を適切に含み、かつ終状態  $|f\rangle$  において含まれる粒子を生成する演算子も適切に含んでいなければならない。

7.2 節では、運動量空間において遷移振幅  $\langle f|S|i\rangle$  を評価する。そこから Wick 展開の各項に解釈を与える方法として、Feynman ダイアグラムを導く。各展開項と各ダイアグラムには 1 対 1 の対応関係があり、これを単純な規則にまとめることができる。このことを踏まえると、もはや Wick の定理に頼らずに、最初から直接 Feynman グラフを描いて遷移振幅を書き下すことができるようになる。7.3 節では QED に関するこのような規則 (Feynman 規則) を提示する。この規則は Dyson-Wick 形式から導かれるべきものであるが、歴史的には最初に Feynman が、場の量子論によらない直観的アプローチに基づいて導いた。

本章の最初の 3 つの節では QED を電子-陽電子場と電磁場の相互作用を扱う体系として考察する。最後の節 (7.4 節) では QED を拡張して、フェルミオンとして電子-陽電子だけでなく、他のレプトン、すなわちミュー粒子やタウ粒子も含める。

### 7.1 座標空間における Feynman ダイアグラム

QED の相互作用

$$\mathcal{H}_I(x) = -eN[\bar{\psi}(x)A(x)\psi(x)] = -eN[(\bar{\psi}^+ + \bar{\psi}^-)(A^+ + A^-)(\psi^+ + \psi^-)]_x \quad (164)$$

に対して、S 行列展開

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} S^{(n)}, \quad S^{(n)} \equiv \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n T\{\mathcal{H}_I(x_1) \cdots \mathcal{H}_I(x_n)\}$$

[ただし  $S^{(0)} = 1, S^{(1)} = -i \int d^4x N[\mathcal{H}_I(x)]$ ] を考える。相互作用 (164) (したがって 1 次項  $S^{(1)}$ ) は、最右辺における場  $\bar{\psi}^\pm, A^\pm, \psi^\pm$  の各々について、正・負振動数部分の選び方に応じて図 18 の 8 種類の過程を起こし得る [この段階ではレプトンとして電子  $l = e$  のみを想定、 $\gamma$  は光子]。これらは QED の基本結節点と呼ばれ、QED のあらゆる Feynman ダイアグラムはこれらの基本結節点を組合せることで得られる。図 18 のグラフは実過程ではあり得ない。と言うのも、物理的な光子とフェルミオンの条件  $k^2 = 0, p^2 = m^2$  を要請すると、どの過程もエネルギー・運動量保存則を両立できないからである [本稿次節で確認]。

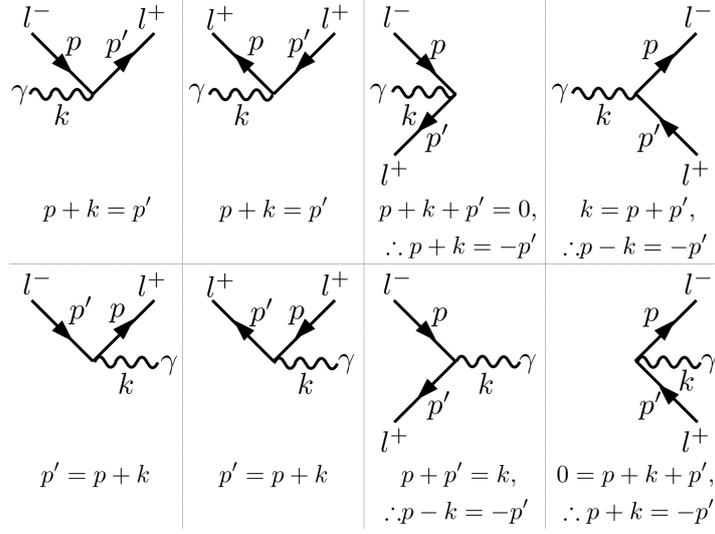


図 18 QED の基本結節点

一般に保存則を破る任意の非物理的な過程  $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$  に対して、確率振幅はゼロである。

$$0 = \langle f|S|i\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f|S^{(n)}|i\rangle.$$

ところで最右辺は結合定数  $e$  の冪級数となっているため、各次数がゼロでなければならないから、

$$\langle f|S^{(n)}|i\rangle = 0$$

が成り立つ。

次に 2 次の項  $S^{(2)}$  に対して Wick の定理を適用すると、次のようになる [本稿次節で補足]。

$$S^{(2)} = \sum_{i=A}^F S_i^{(2)},$$

$$S_A^{(2)} \equiv -\frac{e^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 N[(\bar{\psi} A \psi)_{x_1} (\bar{\psi} A \psi)_{x_2}],$$

$$\begin{aligned} S_B^{(2)} &\equiv -\frac{e^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 \{N[(\bar{\psi} A \psi)_{x_1} (\bar{\psi} A \psi)_{x_2}] + N[(\bar{\psi} A \psi)_{x_1} (\bar{\psi} A \psi)_{x_2}]\} \\ &= -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 N[(\bar{\psi} A \psi)_{x_1} (\bar{\psi} A \psi)_{x_2}], \end{aligned}$$

→  $e^\pm$  の Compton 散乱,  $e^+e^-$  の対生成・対消滅の振幅に寄与

$$S_C^{(2)} \equiv -\frac{e^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 N[(\bar{\psi} \gamma^\alpha A_\alpha \psi)_{x_1} (\bar{\psi} \gamma^\beta A_\beta \psi)_{x_2}],$$

→ フェルミオン-フェルミオン散乱の振幅に寄与

$$\begin{aligned} S_D^{(2)} &\equiv -\frac{e^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 \{N[(\bar{\psi} \gamma^\alpha A_\alpha \psi)_{x_1} (\bar{\psi} \gamma^\beta A_\beta \psi)_{x_2}] + N[(\bar{\psi} \gamma^\alpha A_\alpha \psi)_{x_1} (\bar{\psi} \gamma^\beta A_\beta \psi)_{x_2}]\} \\ &= -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 N[(\bar{\psi} \gamma^\alpha A_\alpha \psi)_{x_1} (\bar{\psi} \gamma^\beta A_\beta \psi)_{x_2}] \end{aligned}$$

→ フェルミオンの自己エネルギーダイアグラム (図 19) に寄与

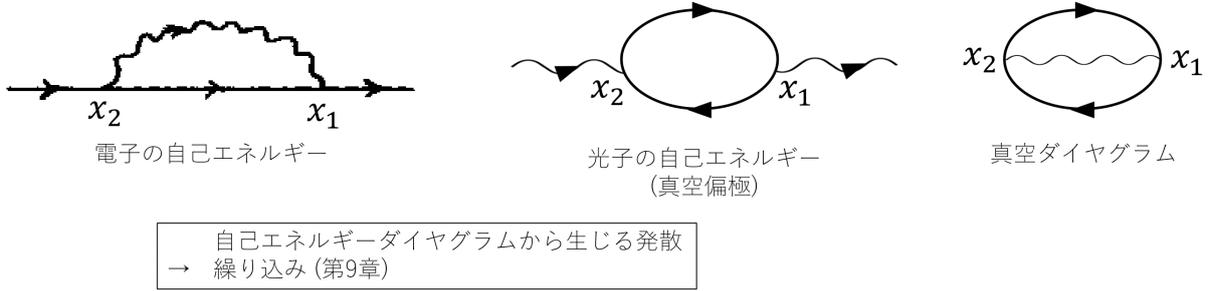


図 19  $S_D^{(2)}$ ,  $S_E^{(2)}$ ,  $S_F^{(2)}$  が関与する Feynman グラフ

$$S_E^{(2)} \equiv -\frac{e^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 N[\underbrace{(\bar{\psi} A \psi)_{x_1} (\bar{\psi} A \psi)_{x_2}}],$$

→ 光子の自己エネルギーダイアグラム (図 19) に寄与

$$S_F^{(2)} \equiv -\frac{e^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 \underbrace{(\bar{\psi} \gamma^\alpha A_\alpha \psi)_{x_1} (\bar{\psi} \gamma^\beta A_\beta \psi)_{x_2}}$$

→ 外線のない“真空ダイアグラム”(図 19) で表され, 実遷移を起こさない [12.2.3 節や文献 [13, p.44] も参照]

縮約は中間状態における粒子の伝播関数 (c-数関数) となり, ここではその両端の時空点  $x_1, x_2$  に関する積分が自然に導入されている. 残りの場の演算子が始・終状態の粒子を生成・消滅させる.

■  $S_C^{(2)}$  と Møller 散乱 ここで  $S_C^{(2)}$  の寄与する過程として, Møller (メラー) 散乱

$$e^-(1) + e^-(2) \rightarrow e^-(1') + e^-(2')$$

を考えよう. ただし 1, 2, 1', 2' はそれぞれ電子の状態の指標 [スピン状態と運動量をまとめたもの] である.

$$S_C^{(2)} = -\frac{e^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 N[(\bar{\psi} \gamma^\alpha \psi)_{x_1} (\bar{\psi} \gamma^\beta \psi)_{x_2}] iD_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2)$$

において, この過程に寄与する部分は

$$S^{(2)}(2e^- \rightarrow 2e^-) = -\frac{e^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 N[(\bar{\psi}^- \gamma^\alpha \psi^+)_{x_1} (\bar{\psi}^- \gamma^\beta \psi^+)_{x_2}] iD_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2)$$

に限定できる. さらに  $\psi^+(x), \bar{\psi}^-(x)$  それぞれにおける  $c(j), c^\dagger(j)$  に比例する成分を

$$\psi_j^+(x) = c(j) f_j(x), \quad \bar{\psi}_j^-(x) = c^\dagger(j) g_j(x)$$

と書くと,

- $\psi_1^+, \psi_2^+$  を  $\psi^+(x_1), \psi^+(x_2)$  のどちらから選ぶか (2通り)
- $\bar{\psi}_{1'}, \bar{\psi}_{2'}$  を  $\bar{\psi}^-(x_1), \bar{\psi}^-(x_2)$  のどちらから選ぶか (2通り)

に応じて 4 つの項が得られる [教科書の補足を兼ねて, 以下に具体的に書いてみる].

$$\begin{aligned}
& -\frac{e^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 N[(\bar{\psi}_{1'}^- \gamma^\alpha \psi_1^+)_{x_1} (\bar{\psi}_{2'}^- \gamma^\beta \psi_2^+)_{x_2} \\
& \quad + (\bar{\psi}_{2'}^- \gamma^\alpha \psi_2^+)_{x_1} (\bar{\psi}_{1'}^- \gamma^\beta \psi_1^+)_{x_2} \\
& \quad + (\bar{\psi}_{2'}^- \gamma^\alpha \psi_1^+)_{x_1} (\bar{\psi}_{1'}^- \gamma^\beta \psi_2^+)_{x_2} \\
& \quad + (\bar{\psi}_{1'}^- \gamma^\alpha \psi_2^+)_{x_1} (\bar{\psi}_{2'}^- \gamma^\beta \psi_1^+)_{x_2}] iD_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2).
\end{aligned}$$

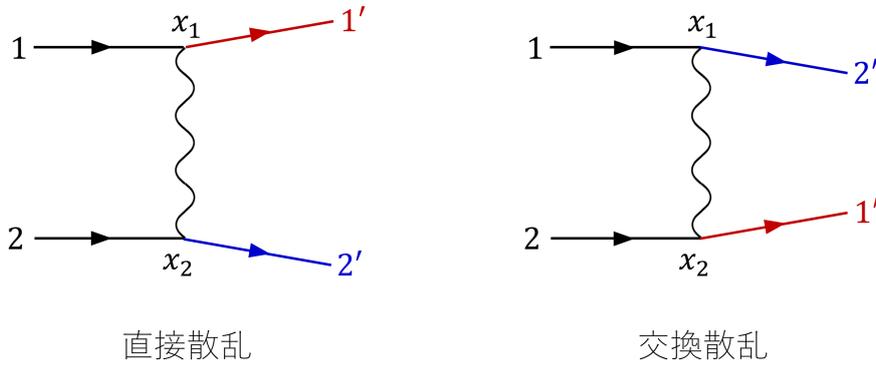


図 20 電子-電子散乱 (Møller 散乱) を表す 2 つのダイアグラム

上式の 1 行目と 2 行目, 3 行目と 4 行目はそれぞれ積分変数が  $x_1 \leftrightarrow x_2$  と入れ替わっているだけの違いしかないで、互いに等しい。よって考えている Møller 散乱の振幅への寄与は、2 本の式

$$S_a = -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 N[(\bar{\psi}_1^- \gamma^\alpha \psi_1^+)_{x_1} (\bar{\psi}_2^- \gamma^\beta \psi_2^+)_{x_2}] iD_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2),$$

$$S_b = -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 N[(\bar{\psi}_2^- \gamma^\alpha \psi_1^+)_{x_1} (\bar{\psi}_1^- \gamma^\beta \psi_2^+)_{x_2}] iD_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2)$$

の和  $S_a + S_b$  となる。  $S_a$  は図 20 に示した直接散乱を引き起こすのに対し、  $S_b$  は同図の交換散乱を引き起こす。正規順序化においてフェルミオン場の演算子を反交換する規則に基づけば、  $S_a$  と  $S_b$  は互いに  $1', 2'$  を反交換した関係にあり、相対的な符号が異なることが示される [本稿次節における式 (7.18) の確認作業を参照]。これは非相対論的な量子力学において、2 つの同種フェルミオンが反対称な波動関数で記述されたことを想起させる。

**一般論 1** S 行列展開 (7.1) における  $n$  次項  $S^{(n)}$  は、因子  $1/n!$  と、  $n$  個の変数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  を含む。後者は単に積分を実行するための時空座標変数であり、同じトポロジーを持つ Feynman グラフが含む  $n$  個の結節点に対して  $n!$  通りの方法であてがわれる。したがって、我々がトポロジー的に互いに異なる Feynman ダイアグラムだけを考えるならば (すなわち各結節点にあてがわれた座標変数が違うだけのグラフは同じものと見なすならば)、因子  $1/n!$  を省くことができる。 (p.122 より) ただし例えば図 20 に示された 2 つのグラフは、トポロジー的に異なるグラフと見なさなければならぬことに注意する。

**一般論 2** 始状態または終状態に複数の同種フェルミオンが含まれる場合、完全に反対称な  $\langle f|S|i\rangle$  が得られる。たとえば始状態  $|i\rangle$  が  $s$  個の陽電子を含み、それらの占める 1 粒子状態が  $1, 2, \dots, s$  であるとする。これに対応する S 演算子は  $s$  個の縮約されていない演算子  $N[\bar{\psi}(x_1)\bar{\psi}(x_2)\cdots\bar{\psi}(x_s)]$  を含む。これらの演算子  $\bar{\psi}(x_1), \bar{\psi}(x_2), \dots, \bar{\psi}(x_s)$  のどれでも状態 1 の陽電子を消滅させることができる、等々ということでも  $s!$  個の項が得られ、  $\bar{\psi}(x_1), \bar{\psi}(x_2), \dots, \bar{\psi}(x_s)$  が反交換するために、  $s!$  個の項の和は  $1, 2, \dots, s$  の置換に関して完全に反対称である。

さらに奇妙なことに、演算子  $\psi(x)$  は電子を消滅させることも陽電子を生成することもできるという事実は、遷移振幅が始状態の 1 電子状態と終状態の 1 陽電子状態間でも反対称となることを意味する。(もちろん  $\bar{\psi}(x)$  に着目した始状態の陽電子と終状態の電子の議論も同様に成立する。) (p.124 より)

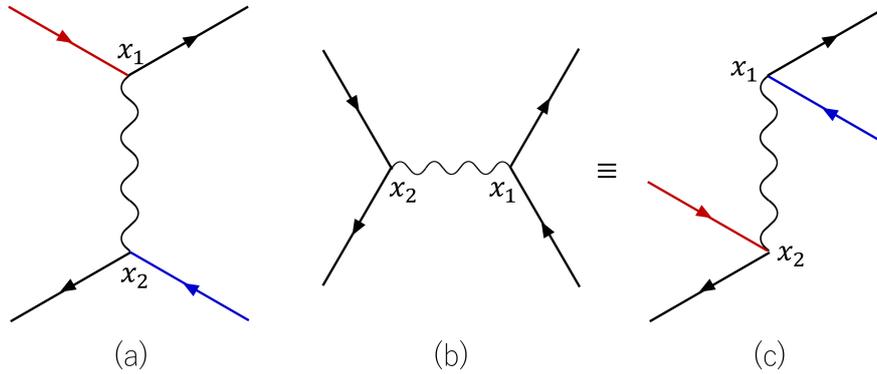


図 21 電子-陽電子散乱 (Bhabha 散乱) を表すダイアグラム

例えば Bhabha (バーバ) 散乱

$$e^+ + e^- \rightarrow e^+ + e^-$$

に寄与するダイアグラムには、図 21 に示す 2 つのグラフ (a),(b) がある。(b) を変形させて得られる等価なグラフ (c) は (a) のグラフと比べて、 $x_1$  に接続する始状態の電子線と  $x_2$  に接続する終状態の陽電子線が入れ替わっている。これら 2 種類のグラフ (a), (b)( $\equiv$ (c)) からの寄与には、符号因子 (-1) の相対的な違いがある。

■光子の自己エネルギーダイアグラムへの  $S_E^{(2)}$  の寄与 光子の自己エネルギーダイアグラム (図 19) に寄与するのは、

$$S_E^{(2)} \equiv -\frac{e^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 N[\underbrace{(\bar{\psi} A \psi)_{x_1} (\bar{\psi} A \psi)_{x_2}}]$$

のうち

$$S^{(2)}(\gamma \rightarrow \gamma) = -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 N[\underbrace{(\bar{\psi} A^- \psi)_{x_1} (\bar{\psi} A^+ \psi)_{x_2}}] \quad (165)$$

である。スピノル添字を明記し  $A_{\lambda\mu}^-(x) \equiv \gamma_{\lambda\mu}^\alpha A_\alpha^-(x)$  などと書くと、正規積の部分は

$$\begin{aligned} & N[\underbrace{(\bar{\psi}_\lambda A_{\lambda\mu}^- \psi_\mu)_{x_1} (\bar{\psi}_\sigma A_{\sigma\tau}^+ \psi_\tau)_{x_2}}] \\ &= (-1) \underbrace{\psi_\tau(x_2) \bar{\psi}_\lambda(x_1)} A_{\lambda\mu}^-(x_1) \psi_\mu(x_1) \bar{\psi}_\sigma(x_2) A_{\sigma\tau}^+(x_2) \\ &= (-1) \text{Tr}[iS_F(x_2 - x_1) A^-(x_1) iS_F(x_1 - x_2) A^+(x_2)] \end{aligned} \quad (166)$$

と計算される。ここで

- 負号 (フェルミオン場を演算子積の一端から他端に移動する際に生じている)
- 対角和 (Tr)

は、閉じたフェルミオンループ (図 19 参照) に特徴的である。

## 7.1 について

■「実粒子として光子に  $k^2 = 0$ , ……保存を両立できない」(p.117, l.1,2) について 図 18 では  $p = (E_p, \mathbf{p}), p' = (E_{p'}, \mathbf{p}')$  を  $l^\pm$  のいずれかの 4 元運動量,  $k = (\omega, \mathbf{k})$  を  $\gamma$  の 4 元運動量として、各々の過程でエ

表2  $S^{(2)}$  の Wick 展開 (7.5) におけるゼロにならない縮約

$\mathcal{H}_I(x_1)$ から選ぶ場	$\mathcal{H}_I(x_2)$ から選ぶ場
$\bar{\psi}$	$\psi$
$A$	$A$
$\psi$	$\bar{\psi}$

エネルギー・運動量が保存される条件式を付記している。このとき物理的な粒子の条件

$$p^2 = p'^2 = m_l^2, \quad k^2 = 0$$

の下で、図 18 に記した保存則の式はいずれも両辺を 2 乗する (4 元内積をとる) ことにより  $2p \cdot k = 0$  に帰着する。ところがこれは

$$p \cdot k = E_p \omega - \mathbf{p} \cdot \mathbf{k} \geq E_p \omega - |\mathbf{p}| |\mathbf{k}| = \omega(E_p - |\mathbf{p}|) > 0$$

より成り立たない。このため QED の基本結節点を組合せたタイグラムに現れる中間状態の粒子は、4 元運動量が質量殻上に乗らないような仮想粒子であることになる。

このことは、非相対論的な量子力学における非共変な摂動論とは対照的である。非共変な摂動論では時間座標と空間座標が (それに伴いエネルギーと運動量も) 別扱いになっており、中間状態における粒子は実粒子のエネルギー-運動量関係を保持する ( $p^2 = m^2, k^2 = 0$ )。そして 3 次元運動量は保存されるが、中間状態においてエネルギー保存が破られている。(7.2.2 節, p.133 下 5 行)

■  $S^{(2)}$  の Wick 展開 (7.5) について ゼロでない縮約の作り方は表 2 のように網羅的にまとめられる。その他の縮約は

$$\begin{aligned} \psi_{\square}, \bar{\psi}_{\square} \cdots \cdots \text{直交する状態 } |e^+ \rangle, |e^- \rangle \text{ の内積となって消える,} \\ \psi_{\square}, \bar{\psi}_{\square} \cdots \cdots \text{直交する状態 } |e^{\pm} \rangle, |\gamma \rangle \text{ の内積となって消える.} \end{aligned}$$

(ただし例えば 1 電子状態を  $\bar{\psi}^- |0\rangle = |e^- \rangle$  などと表記した。)

■  $S_B^{(2)}$  の式の書き換え (7.6) について スピノル添字を明記すると、式 (7.6):

$$N[\underbrace{(\bar{\psi} A \psi)_{x_1}}_{\square} \underbrace{(\bar{\psi} A \psi)_{x_2}}_{\square}] = N[(\bar{\psi} A \psi)_{x_1} (\bar{\psi} A \psi)_{x_2}]$$

は次のように確かめられる。

$$\begin{aligned} & N[(\bar{\psi}_{\alpha} A_{\alpha\beta} \psi_{\beta})_{x_1} (\bar{\psi}_{\gamma} A_{\gamma\delta} \psi_{\delta})_{x_2}] \\ &= \langle 0 | T \{ \bar{\psi}_{\alpha}(x_1) \psi_{\delta}(x_2) \} | 0 \rangle N[(A_{\alpha\beta} \psi_{\beta})_{x_1} (\bar{\psi}_{\gamma} A_{\gamma\delta})_{x_2}] \end{aligned} \tag{167}$$

$$\begin{aligned} &= (-\langle 0 | T \{ \psi_{\delta}(x_2) \bar{\psi}_{\alpha}(x_1) \} | 0 \rangle) (-N[(\bar{\psi}_{\gamma} A_{\gamma\delta})_{x_2} (A_{\alpha\beta} \psi_{\beta})_{x_1}]) \\ & \quad \text{(式 (6.29) を考慮して教科書を訂正した)} \\ &= \langle 0 | T \{ \psi_{\delta}(x_2) \bar{\psi}_{\alpha}(x_1) \} | 0 \rangle N[(\bar{\psi}_{\gamma} A_{\gamma\delta})_{x_2} (A_{\alpha\beta} \psi_{\beta})_{x_1}] \\ &= N[(\bar{\psi}_{\gamma} A_{\gamma\delta} \psi_{\delta})_{x_2} (\bar{\psi}_{\alpha} A_{\alpha\beta} \psi_{\beta})_{x_1}]. \end{aligned} \tag{168}$$

上式 (167), (168) においてスピノル添字を省くと, 見かけ上  $4 \times 4$  行列であるような「疑念が生じる」(p.118 脚注) 形の積

$$\begin{pmatrix} (A\psi)_{x_1} \\ (\bar{\psi}A)_{x_2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \psi(x_2) \\ \bar{\psi}(x_1) \end{pmatrix}$$

が現れる.

■ 「(i) と (ii) の過程について演算子を書き下す作業は, 読者に委ねることにする」(p.120, 1.1) について

(i) 式 (7.7) から  $\bar{\psi}^+(x_1), A^\pm(x_1), A^\mp(x_2), \psi^-(x_2)$  だけを取り出せば良い (複号同順).

(ii) 式 (7.7) から  $\bar{\psi}^+(x_1), A^-(x_1), A^-(x_2), \psi^+(x_2)$  だけを取り出せば良い.

■ 「式 (7.5b) においても見た」(p.122, 1.8) について  $S_B^{(2)}$  の式 (7.7) への変形のことを指している.

■ 「[直接散乱] - [交換散乱]」(p.123, 1.5,6) について 図 20(教科書の図 7.6(p.123)) においてどちらのダイヤグラムを「直接散乱」と見なすかは任意である.

■ 式 (7.16):  $\psi_j^+(x) = c(j)f_j(x), \bar{\psi}_j^-(x) = c^\dagger(j)g_j(x)$  について  $j = (r, \mathbf{p})$  として具体的に書くと

$$\psi_j^+(x) = c_r(\mathbf{p}) \underbrace{\left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}}\right)^{1/2} u_r(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x}}_{f_j(x)}, \quad \bar{\psi}_j^-(x) = c_r^\dagger(\mathbf{p}) \underbrace{\left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}}\right)^{1/2} \bar{u}_r(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x}}_{g_j(x)}.$$

■ 式 (7.18) の確認

$$\begin{aligned} \langle f | S_a | i \rangle &= \langle f | N[c^\dagger(1')c(1)c^\dagger(2')c(2)] | i \rangle \times (-e^2) \int d^4x_1 d^4x_2 g_{1'}(x_1) \gamma^\alpha f_1(x_1) g_{2'}(x_2) \gamma^\beta f_2(x_2) i D_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2) \\ &= \langle f | \{-c^\dagger(1')c^\dagger(2')c(1)c(2)\} | i \rangle \times (-e^2) \int d^4x_1 d^4x_2 g_{1'}(x_1) \gamma^\alpha f_1(x_1) g_{2'}(x_2) \gamma^\beta f_2(x_2) i D_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2) \\ &= -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 g_{1'}(x_1) \gamma^\alpha f_1(x_1) g_{2'}(x_2) \gamma^\beta f_2(x_2) i D_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle f | S_b | i \rangle &= \langle f | N[c^\dagger(2')c(1)c^\dagger(1')c(2)] | i \rangle \times (-e^2) \int d^4x_1 d^4x_2 g_{2'}(x_1) \gamma^\alpha f_1(x_1) g_{1'}(x_2) \gamma^\beta f_2(x_2) i D_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2) \\ &= \langle f | \{+c^\dagger(1')c^\dagger(2')c(1)c(2)\} | i \rangle \times (-e^2) \int d^4x_1 d^4x_2 g_{2'}(x_1) \gamma^\alpha f_1(x_1) g_{1'}(x_2) \gamma^\beta f_2(x_2) i D_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2) \\ &= +e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 g_{2'}(x_1) \gamma^\alpha f_1(x_1) g_{1'}(x_2) \gamma^\beta f_2(x_2) i D_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2). \end{aligned}$$

ただし 2 式のいずれも, 最後の等号では

$$\begin{aligned} c(1)c(2) | i \rangle &= c(1)c(2) \{c^\dagger(2)c^\dagger(1) | 0 \rangle\} = c(1) \{-c^\dagger(2)c(2) + 1\} c^\dagger(1) | 0 \rangle = c(1)c^\dagger(1) | 0 \rangle = -| 0 \rangle, \\ \therefore \langle f | c^\dagger(1')c^\dagger(2') &= \{ \langle 0 | c(1')c(2') \} c^\dagger(1')c^\dagger(2') = -\langle 0 | c(1')c(2')^\dagger(2')c^\dagger(1') = +\langle 0 |, \\ \therefore \langle f | c^\dagger(1')c^\dagger(2')c(1)c(2) &| i \rangle = -\langle 0 | 0 \rangle = -1 \end{aligned}$$

を用いた. これらを足すと式 (7.18):

$$\begin{aligned} &\langle f | S^{(2)}(2e^- \rightarrow 2e^-) | i \rangle \\ &= \left\{ -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 g_{1'}(x_1) \gamma^\alpha f_1(x_1) g_{2'}(x_2) \gamma^\beta f_2(x_2) i D_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2) \right\} - \{1' \leftrightarrow 2'\} \end{aligned} \quad (169)$$

が得られる.

■ 「式 (7.5c) から、以下に示す Bhabha 散乱に関する S 行列を導く作業は、読者の練習問題とする」 (p.124, 下 2 行) について S 演算子のうち Bhabha 散乱  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$  に寄与する部分は、最低次では

$$S_C^{(2)} = -\frac{e^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 N[(\bar{\psi}\gamma^\alpha\psi)_{x_1}(\bar{\psi}\gamma^\beta\psi)_{x_2}] iD_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2)$$

において、

- $\psi^+, \psi^-$  を  $\psi(x_1), \psi(x_2)$  のどちらから選ぶか (2 通り)
- $\bar{\psi}^+, \bar{\psi}^-$  を  $\bar{\psi}(x_1), \bar{\psi}(x_2)$  のどちらから選ぶか (2 通り)

に応じた 4 つの項に限定される：

$$\begin{aligned} S^{(2)}(e^+e^- \rightarrow e^+e^-) = & -\frac{e^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 N[(\bar{\psi}^-\gamma^\alpha\psi^+)_{x_1}(\bar{\psi}^+\gamma^\beta\psi^-)_{x_2} \\ & + (\bar{\psi}^+\gamma^\alpha\psi^-)_{x_1}(\bar{\psi}^-\gamma^\beta\psi^+)_{x_2} \\ & + (\bar{\psi}^-\gamma^\alpha\psi^-)_{x_1}(\bar{\psi}^+\gamma^\beta\psi^+)_{x_2} \\ & + (\bar{\psi}^+\gamma^\alpha\psi^+)_{x_1}(\bar{\psi}^-\gamma^\beta\psi^-)_{x_2}] iD_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2). \end{aligned}$$

上式の 1 行目と 2 行目、3 行目と 4 行目はそれぞれ積分変数が  $x_1 \leftrightarrow x_2$  と入れ替わっているだけの違いしかないで、互いに等しい。よって Bhabha 散乱の振幅への寄与は、式 (7.19):

$$\begin{aligned} S^{(2)}(e^+e^- \rightarrow e^+e^-) &= S_a + S_b, \\ S_a &= -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 N[(\bar{\psi}^-\gamma^\alpha\psi^+)_{x_1}(\bar{\psi}^+\gamma^\beta\psi^-)_{x_2}] iD_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2), \\ S_b &= -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 N[(\bar{\psi}^-\gamma^\alpha\psi^-)_{x_1}(\bar{\psi}^+\gamma^\beta\psi^+)_{x_2}] iD_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2) \end{aligned}$$

で与えられる。

■ 「式 (7.5d) [ $S_D^{(2)}$  の式] の 2 つの項は、やはり互いに等しい」 (p.125 下 2 行) について 実際、第 2 項は積分変数を  $x_1 \leftrightarrow x_2$  と入れ替えると、

$$\begin{aligned} & N[(\bar{\psi}\gamma^\alpha A_\alpha\psi)_{x_2}(\bar{\psi}\gamma^\beta A_\beta\psi)_{x_1}] \\ &= \gamma^\alpha\gamma^\beta \underbrace{\bar{\psi}(x_2)\psi(x_1)}_{\bar{\psi}(x_1)\psi(x_2)} \underbrace{A_\alpha(x_2)A_\beta(x_1)}_{A_\beta(x_1)A_\alpha(x_2)} N[\psi(x_2)\bar{\psi}(x_1)] \\ &= \gamma^\alpha\gamma^\beta \underbrace{\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)}_{\bar{\psi}(x_2)\psi(x_1)} \underbrace{A_\beta(x_1)A_\alpha(x_2)}_{A_\alpha(x_2)A_\beta(x_1)} N[\bar{\psi}(x_1)\psi(x_2)] \\ &= N[(\bar{\psi}\gamma^\alpha A_\alpha\psi)_{x_1}(\bar{\psi}\gamma^\beta A_\beta\psi)_{x_2}] \end{aligned}$$

と書き換えられ、第 1 項に一致する。ただし第 2 の等号では縮約 (T 積) と正規積の中でフェルミオン場を入れ替えると、それぞれ符号が入れ替わることを考慮した。

■ 「電子の “自己エネルギー”」 (p126, 1.7) について 電子が自ら放出した光子を再び吸収する過程から発散が現れることは、場の古典論において電荷が自身の作った電場によって無限大の自己エネルギーを持つことに似ている。

## 7.2 運動量空間における Feynman ダイアグラム

概要として第 1 段落を引用する。

前節において、特定の遷移  $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$  を起こす、決められた次数の S 演算子を導く技法を示した。実際に関心の対象となるのは  $\langle f|S^{(n)}|i\rangle$  のような形で与えられる行列要素であることが多い。状態  $|i\rangle$  と状態  $|f\rangle$  は、大抵は始状態や終状態に含まれる粒子の種類・個数と、その運動量、スピン、偏極などによって指定される。具体的な行列要素の計算を行うと、Feynman グラフの運動量空間における再解釈に導かれる。いくつかの具体例の考察を通じて、ダイアグラムが、対応する数式と密接に関連していることを示してみる。そして Feynman ダイアグラムから、詳細な計算をせず直接に行列要素を書き下すための一連の規則をまとめ上げることができる。この Feynman 規則は次節において与えるが、実際の摂動計算において不可欠な道具になる。

- 4 元運動量空間における伝播関数

$$S_F(p) = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} = \frac{1}{\not{p} - m + i\varepsilon}, \quad D_F^{\alpha\beta}(k) = \frac{-g^{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon}.$$

[非相対論的な量子力学において運動量空間の波動関数、したがって伝播関数が、Fourier 変換で定義されたことを思い出そう.]

- 縮約されていない演算子  $\psi^+, \bar{\psi}^+, A_\alpha^+$  は、始状態  $|i\rangle$  を  $|0\rangle$  に移行させる作用を持つ。

$$\begin{aligned} \psi^+(x) |e^- \mathbf{p} r\rangle &= \sum_{\mathbf{q}, s} \left( \frac{m}{VE_{\mathbf{q}}} \right)^{1/2} c_s(\mathbf{q}) u_s(\mathbf{q}) e^{-iq \cdot x} |e^- \mathbf{p} r\rangle \\ &= |0\rangle \left( \frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} u_r(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x}, \end{aligned} \quad (7.25a)$$

$$\begin{aligned} \bar{\psi}^+(x) |e^+ \mathbf{p} r\rangle &= \sum_{\mathbf{q}, s} \left( \frac{m}{VE_{\mathbf{q}}} \right)^{1/2} d_s(\mathbf{q}) \bar{v}_s(\mathbf{q}) e^{-iq \cdot x} |e^+ \mathbf{p} r\rangle \\ &= |0\rangle \left( \frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} \bar{v}_r(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x}, \end{aligned} \quad (7.25b)$$

$$\begin{aligned} A_\alpha^+(x) |\gamma \mathbf{k} r\rangle &= \sum_{s, \mathbf{k}'} \left( \frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}'}} \right)^{1/2} \varepsilon_{s\alpha}(\mathbf{k}') a_s(\mathbf{k}') e^{-ik' \cdot x} |\gamma \mathbf{k} r\rangle \\ &= |0\rangle \left( \frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} \varepsilon_{r\alpha}(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot x}. \end{aligned} \quad (7.25c)$$

(ただし例えば  $|e^- \mathbf{p} r\rangle = c_r^\dagger(\mathbf{p}) |0\rangle$  は 1 電子状態,  $|\gamma \mathbf{k} r\rangle = a_r^\dagger(\mathbf{k}) |0\rangle$  は 1 光子状態である.)

- 縮約されていない演算子  $\psi^-, \bar{\psi}^-, A_\alpha^-$  は、 $|0\rangle$  を終状態  $|f\rangle$  に移行させる作用を持つ。

$$\bar{\psi}^-(x) |0\rangle = \sum_{\mathbf{p}, r} |e^- \mathbf{p} r\rangle \left( \frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} \bar{u}_r(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x},$$

$$\psi^-(x) |0\rangle = \sum_{\mathbf{p}, r} |e^+ \mathbf{p} r\rangle \left( \frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} v_r(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x},$$

$$A_\alpha^-(x) |0\rangle = \sum_{\mathbf{k}, r} |\gamma \mathbf{k} r\rangle \left( \frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} \varepsilon_{r\alpha}(\mathbf{k}) e^{ik \cdot x}.$$

★ 教科書ではこれ以降、スピン・偏極状態の指標を省略した表記が頻繁に用いられる。

## 7.2 序文 (pp.128–129) について

■式 (7.25) について 例えば式 (7.25a) では、状態  $|e^- \mathbf{p} r\rangle$  において運動量、スピン  $(\mathbf{q}, s) (\neq (\mathbf{p}, r))$  を持つ粒子  $e^-$  は存在しないため、 $c_s(\mathbf{q})$  が  $|e^- \mathbf{p} r\rangle$  作用すると状態が消失する\*31。

式 (7.25a–c) の両辺の Hermite 共役をとると (フェルミオンの式 (7.25a,b) については、さらに右から  $\gamma^0$  をかける),

$$\langle e^- \mathbf{p} r | \bar{\psi}^-(x) = \left( \frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} \bar{u}_r(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p} \cdot x} \langle 0 |, \quad (170)$$

$$\langle e^+ \mathbf{p} r | \bar{\psi}^-(x) = \left( \frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} \bar{v}_r(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p} \cdot x} \langle 0 |, \quad (171)$$

$$\langle \gamma \mathbf{k} r | A_{\alpha}^-(x) = \left( \frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} \varepsilon_{r\alpha}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot x} \langle 0 | \quad (172)$$

となることも有用である。

### 7.2.1 1 次の項 $S^{(1)}$

最初の例として過程  $e^- \rightarrow e^- + \gamma$ , すなわち遷移

$$|i\rangle = |e^- \mathbf{p} s\rangle = c_s^{\dagger}(\mathbf{p}) |0\rangle \rightarrow |f\rangle = |e^- \mathbf{p}' s'; \gamma \mathbf{k}' r'\rangle = c_{s'}^{\dagger}(\mathbf{p}') a_{r'}^{\dagger}(\mathbf{k}') |0\rangle$$

を考える。場を Fourier 展開して運動量空間に移行すると [すなわち座標に関する積分を運動量空間での積分に書き換えると],  $S^{(1)}$  の振幅への寄与は

$$\langle f | S^{(1)} | i \rangle = \left[ (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\mathbf{p}' + \mathbf{k}' - \mathbf{p}) \left( \frac{m}{VE_{\mathbf{p}'}} \right)^{1/2} \left( \frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} \left( \frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}'}} \right)^{1/2} \right] \mathcal{M}, \quad (7.31)$$

$$\mathcal{M} = ie \bar{u}_{s'}(\mathbf{p}') \not{\epsilon}_{r'}(\mathbf{k}' = \mathbf{p} - \mathbf{p}') u_s(\mathbf{p}) \quad (7.32)$$

と計算される [導出は下記].  $\mathcal{M}$  は [個々の過程に固有の部分であり,] Feynman 振幅と呼ばれ, 図 22 に示す運動量空間の Feynman ダイアグラムに対応付けられる. デルタ関数  $\delta^{(4)}(\mathbf{p}' + \mathbf{k}' - \mathbf{p})$  は [座標空間のダイアグラムにおける] 結節点  $x$  に関する積分から生じており [下記の導出過程を参照], 結節点におけるエネルギー・運動量の保存を保証する. [保存則  $\mathbf{p} = \mathbf{p}' + \mathbf{k}'$  を満たさない遷移  $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$  を想定すると, 確率振幅はゼロになる.]

7.1 節で見たように,  $e^- \rightarrow e^- + \gamma$  を含め図 18 の 1 次過程ではエネルギー・運動量保存則が成立しないので, 実過程にならない. [すなわち始・終状態の粒子を質量殻上にある物理的粒子とすると, その過程の確率振幅は自然に導かれるデルタ関数因子のためにゼロとならざるを得ない.]

\*31 丁寧に述べれば, 占有数をモード  $(\mathbf{q}, s)$  ごとに  $|\dots, e^- \mathbf{p} r, \dots\rangle = |0\rangle \dots |e^- \mathbf{p} r\rangle \dots |0\rangle$  と分けて書き, モード  $(\mathbf{q}, s) (\neq (\mathbf{p}, r))$  の消滅演算子  $c_s(\mathbf{q})$  はそのモードの真空ケット  $|0\rangle$  に作用してゼロになると説明できると考えられる。

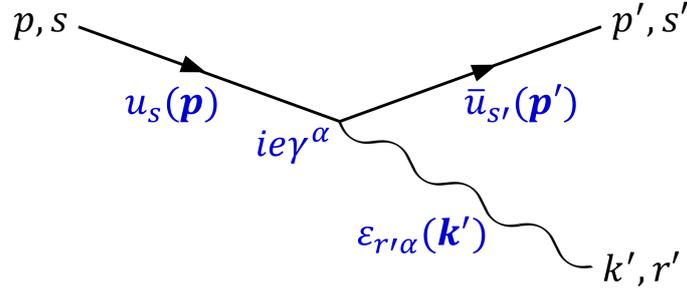


図 22 1 次過程  $e^-(\mathbf{p}, s) \rightarrow e^-(\mathbf{p}', s') + \gamma(\mathbf{k}', r')$ . 7.3 節の Feynman 規則を考慮して, 結節点因子と外線因子を付してある.

### 7.2.1 節, 式の導出など

■行列要素  $\langle f|S^{(1)}|i\rangle$  の式 (7.31), (7.32) の導出 専ら式 (7.25) を利用すると,

$$\begin{aligned}
 & \langle f|S^{(1)}|i\rangle \\
 &= \langle e^-\mathbf{p}'s'; \gamma\mathbf{k}'r' | ie \int d^4x \bar{\psi}^-(x) \gamma^\alpha A_\alpha^-(x) \psi^+(x) | e^-\mathbf{p}s \rangle \\
 &= ie \int d^4x \left[ \left( \frac{m}{VE_{\mathbf{p}'}} \right)^{1/2} \bar{u}_{s'}(\mathbf{p}') e^{ip' \cdot x} \right] \gamma^\alpha \left[ \left( \frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}'}} \right)^{1/2} \epsilon_{r'\alpha}(\mathbf{k}') e^{ik' \cdot x} \right] \left[ \left( \frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} u_s(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} \right] \langle 0|0 \rangle \\
 &= \left[ \int d^4x e^{i(p'+k'-p) \cdot x} \right] \left( \frac{m}{VE_{\mathbf{p}'}} \right)^{1/2} \left( \frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} \left( \frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}'}} \right)^{1/2} [ie \bar{u}_{s'}(\mathbf{p}') \not{\epsilon}_{r'}(\mathbf{k}' = \mathbf{p} - \mathbf{p}') u_s(\mathbf{p})]
 \end{aligned}$$

となる. 最右辺における座標  $x$  に関する積分は, 保存則に関するデルタ関数になる.

$$\int d^4x e^{i(p'+k'-p) \cdot x} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' + k' - p).$$

よって式 (7.31), (7.32) を得る.

### 7.2.1 について

■Feynman 振幅 (7.32) を 7.3 節の Feynman 規則に従って導くこと 7.3 節の Feynman 規則 1,4(a)(b)(f) に基づき図 22 のように, Feynman グラフに結節点因子と外線因子を充てることができる. 規則 5 に従ってフェルミオン因子を並べ (この際, ボゾンの因子  $\epsilon_{r'\alpha}(\mathbf{k}')$  をどこに挿入しても式の意味は変わらない), 次いで規則 7 に従って保存則  $\mathbf{k}' = \mathbf{p} - \mathbf{p}'$  を成立させると Feynman 振幅 (7.32) が得られる.

### 7.2.2 Compton 散乱

第 2 の例として Compton 散乱  $e^-\gamma \rightarrow e^-\gamma$  を考え, 始・終状態を

$$|i\rangle = c^\dagger(\mathbf{p}) a^\dagger(\mathbf{k}) |0\rangle \quad \rightarrow \quad |f\rangle = c^\dagger(\mathbf{p}') a^\dagger(\mathbf{k}') |0\rangle$$

と設定する (教科書にならって, スピン・偏極状態の指標を省略する). この過程を引き起こす S 演算子の項は, [最低次では] 7.1 節の式 (7.7):

$$S_B^{(2)} = -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 N[(\bar{\psi} A \psi)_{x_1} (\bar{\psi} A \psi)_{x_2}]$$

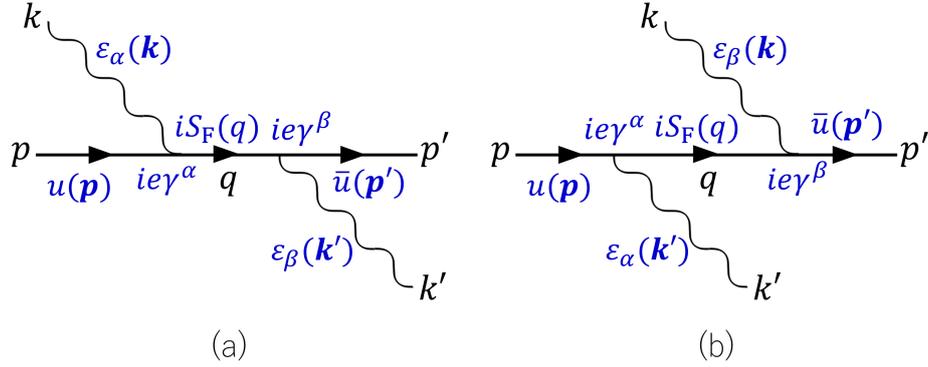


図 23 電子の Compton 散乱. 7.3 節の Feynman 規則に基づく因子を付してある.

から得られる 2 つの部分

$$S_a = -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\alpha iS_F(x_1 - x_2) \gamma^\beta A_\alpha^-(x_1) A_\beta^+(x_2) \psi^+(x_2),$$

$$S_b = -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \bar{\psi}^-(x_1) \gamma^\alpha iS_F(x_1 - x_2) \gamma^\beta A_\beta^-(x_2) A_\alpha^+(x_1) \psi^+(x_2)$$

である. 再び行列要素を運動量空間に移して計算すると

$$\langle f | S_{a,b} | i \rangle = \left[ (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' + k' - p - k) \right. \\ \left. \times \left( \frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} \left( \frac{m}{VE_{\mathbf{p}'}} \right)^{1/2} \left( \frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} \left( \frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}'}} \right)^{1/2} \right] \mathcal{M}_{a,b}, \quad (7.37)$$

$$\mathcal{M}_a = -e^2 \bar{u}(\mathbf{p}') \not{\epsilon}(\mathbf{k}') iS_F(q = p + k) \not{\epsilon}(\mathbf{k}) u(\mathbf{p}), \quad (7.38a)$$

$$\mathcal{M}_b = -e^2 \bar{u}(\mathbf{p}') \not{\epsilon}(\mathbf{k}) iS_F(q = p - k') \not{\epsilon}(\mathbf{k}') u(\mathbf{p}) \quad (7.38b)$$

となる [導出は下記, および「7.2.2 について」の節]. Feynman 振幅  $\mathcal{M}_{a,b}$  はそれぞれ図 23 に示す運動量空間の Feynman ダイアグラムに対応付けられる. ここから一般に成り立つ Feynman 規則のいくつかを垣間見ることができる. とは言え議論を徹底させるため, 具体的に Feynman 規則から改めて  $\mathcal{M}_{a,b}$  の式 (7.38) を導く作業は本稿の「7.2.2 について」に回そう.

#### ■ Feynman ダイアグラムにおける運動量の指標に関する約束

- “外線” に付記する 4 元運動量は, 始・終状態に存在する粒子の“実際の” 4 元運動量である.
  - “電子の外線” に付記された 4 元運動量は, 外線の矢と同じ向きである.
  - “陽電子の外線” に付記された 4 元運動量は, 外線の矢と反対向きである.
- フェルミオンの“内線” に付記する 4 元運動量は, “常に” 矢と“同じ向き”の 4 元運動量を表す.

#### 7.2.2 節, 式の導出など

■  $\langle f | S_a | i \rangle$  の式 (7.37), (7.38a) の導出 専ら式 (7.25) を利用すると,

$$\langle f | S_a | i \rangle = -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \left[ \left( \frac{m}{VE_{\mathbf{p}'}} \right)^{1/2} \bar{u}(\mathbf{p}') e^{ip' \cdot x_1} \right] \left[ \left( \frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}'}} \right)^{1/2} \not{\epsilon}(\mathbf{k}') e^{ik' \cdot x_1} \right]$$

$$\times \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} iS_F(q) e^{-iq \cdot (x_1 - x_2)} \left[ \left( \frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} \not{\epsilon}(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot x_2} \right] \left[ \left( \frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} u(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x_2} \right]$$

となる [7.2 節序文のノートにおける式 (170) を併用する]. ここで 4 成分スピノル  $u, \bar{u}$  および  $4 \times 4$  行列  $S_F, \not{\epsilon}$  は, 行列積の定義された適切な順序で書かなければならないことに注意する. Fourier 展開により場の  $x_1, x_2$  依存性は指数関数の形となるため, これらの座標  $x_1, x_2$  に関する積分を実行することができる (これにより運動量  $q$  の積分だけが残る).

$$\begin{aligned} & \int d^4 x_1 e^{i(p'+k'-q) \cdot x_1} \int d^4 x_2 e^{i(q-p-k) \cdot x_2} \\ &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' + k' - q) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q - p - k) \\ &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' + k' - p - k) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q - p - k). \end{aligned}$$

これを上式に代入して  $q$  に関する積分を実行すると  $\langle f|S_a|i \rangle$  の式 (7.37), (7.38a) を得る.  $\langle f|S_b|i \rangle$  の式 (7.37), (7.38b) の確認は「読者の練習問題」(p.133, 1.6,7) となっている. 本稿次節で取り組もう.

### 7.2.2 について

■  $\langle f|S_b|i \rangle$  の式 (7.37), (7.38b) の導出

$$\begin{aligned} \langle f|S_b|i \rangle &= -e^2 \int d^4 x_1 d^4 x_2 \left[ \left( \frac{m}{VE_{\mathbf{p}'}} \right)^{1/2} \bar{u}(\mathbf{p}') e^{ip' \cdot x_1} \right] \left[ \left( \frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}'}} \right)^{1/2} \varepsilon_\beta(\mathbf{k}') e^{ik' \cdot x_2} \right] \\ &\quad \times \gamma^\alpha \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} iS_F(q) e^{-iq \cdot (x_1 - x_2)} \gamma^\beta \left[ \left( \frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} \varepsilon_\alpha(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot x_1} \right] \left[ \left( \frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} u(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x_2} \right]. \end{aligned}$$

座標  $x_1, x_2$  の積分から現れる, 保存則を表すデルタ関数は

$$\begin{aligned} & (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' - k - q) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k' - p + q) \\ &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' + k' - p - k) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k' - p + q) \end{aligned}$$

となることに注意して,  $q$  に関する積分を実行する. そして行列  $\gamma^\alpha, \gamma^\beta$  は交換できないのに対して, 偏極ベクトル  $\varepsilon_\alpha(\mathbf{k}), \varepsilon_\beta(\mathbf{k}')$  は適当に移動できることに注意すると, 上式は

$$\begin{aligned} & \left[ (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' + k' - p - k) \left( \frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} \left( \frac{m}{VE_{\mathbf{p}'}} \right)^{1/2} \left( \frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} \left( \frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}'}} \right)^{1/2} \right] \\ & \times \left[ -e^2 \bar{u}(\mathbf{p}') \not{\epsilon}(\mathbf{k}) \left\{ \int d^4 q iS_F(q) \delta(q - (p - k')) \right\} \not{\epsilon}(\mathbf{k}') u(\mathbf{p}) \right] \end{aligned}$$

と書き換えられ, 式 (7.37), (7.38b) に一致する.

■ Feynman 規則から改めて  $\mathcal{M}_{a,b}$  の式 (7.38) を導くこと 7.3 節の Feynman 規則 1,3,4(a)(b)(e)(f) に基づき図 23 のように, Feynman グラフに結節点・外線・内線因子を充てることことができる. 規則 5 に従ってフェルミオン因子を並べると

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_a &\sim \varepsilon_\beta(\mathbf{k}') \varepsilon_\alpha(\mathbf{k}) \times [\bar{u}(\mathbf{p}') i e \gamma^\beta i S_F(q) i e \gamma^\alpha u(\mathbf{p})], \\ \mathcal{M}_b &\sim \varepsilon_\beta(\mathbf{k}) \varepsilon_\alpha(\mathbf{k}') \times [\bar{u}(\mathbf{p}') i e \gamma^\beta i S_F(q) i e \gamma^\alpha u(\mathbf{p})] \end{aligned}$$

となる (式がまだ完全には確定していないことを「 $\sim$ 」で表しておいた). 各偏極ベクトル  $\varepsilon(\mathbf{k})$  を  $\gamma$  行列の隣に移動し, 次いで規則 7 に従って保存則

$$\begin{cases} q = p + k & (\mathcal{M}_a \text{ に対して}) \\ q = p - k' & (\mathcal{M}_b \text{ に対して}) \end{cases}$$

を成立させると Feynman 振幅 (7.38) が得られる.

■陽電子の Compton 散乱 (p.134) について 陽電子の Compton 散乱  $e^+(\mathbf{p})\gamma(\mathbf{k}) \rightarrow e^+(\mathbf{p}')\gamma(\mathbf{k}')$  に関して行列要素を第一原理から計算することは, 練習問題として読者に委ねられている. この過程に対する S 演算子の寄与は, 7.1 節の式 (7.7):

$$S_B^{(2)} = -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 N[(\bar{\psi} A \psi)_{x_1} (\bar{\psi} A \psi)_{x_2}]$$

から得られる 2 つの部分

$$\begin{aligned} S_a &\equiv -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 N[\bar{\psi}_\mu^+(x_1)(\gamma^\alpha)_{\mu\nu} A_\alpha^+(x_1) iS_{F\nu\rho}(x_1 - x_2)(\gamma^\beta)_{\rho\sigma} A_\beta^-(x_2) \psi_\sigma^-(x_2)] \\ &= +e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 (\gamma^\alpha)_{\mu\nu} iS_{F\nu\rho}(x_1 - x_2)(\gamma^\beta)_{\rho\sigma} \bar{\psi}_\sigma^-(x_2) A_\beta^-(x_2) A_\alpha^+(x_1) \psi_\mu^+(x_1), \\ S_b &\equiv -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 N[\bar{\psi}_\mu^+(x_1)(\gamma^\alpha)_{\mu\nu} A_\alpha^-(x_1) iS_{F\nu\rho}(x_1 - x_2)(\gamma^\beta)_{\rho\sigma} A_\beta^+(x_2) \psi_\sigma^-(x_2)] \\ &= +e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 (\gamma^\alpha)_{\mu\nu} iS_{F\nu\rho}(x_1 - x_2)(\gamma^\beta)_{\rho\sigma} \bar{\psi}_\sigma^-(x_2) A_\alpha^-(x_1) A_\beta^+(x_2) \psi_\mu^+(x_1) \end{aligned}$$

である. ただし正規順序化の際に行列積が定義されない形が現れることを踏まえ, 式の意味を明確にするためにスピノル添字  $\mu, \nu, \rho, \sigma$  を導入した.

$S_a$  の行列要素は

$$\begin{aligned} &\langle f | S_a | i \rangle \\ &= +e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 (\gamma^\alpha)_{\mu\nu} \left[ \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} iS_{F\nu\rho}(q) e^{-iq \cdot (x_1 - x_2)} \right] (\gamma^\beta)_{\rho\sigma} \\ &\quad \times \left[ \left( \frac{m}{VE_{\mathbf{p}'}} \right)^{1/2} v_\sigma(\mathbf{p}') e^{ip' \cdot x_2} \right] \left[ \left( \frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}'}} \right)^{1/2} \varepsilon_\beta(\mathbf{k}') e^{ik' \cdot x_2} \right] \left[ \left( \frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} \varepsilon_\alpha(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot x_1} \right] \left[ \left( \frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} \bar{v}_\mu(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x_1} \right] \\ &= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \int d^4x_1 e^{-i(q+k+p) \cdot x_1} \int d^4x_2 e^{i(p'+q+k') \cdot x_2} \left( \frac{m}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} \left( \frac{m}{VE_{\mathbf{p}'}} \right)^{1/2} \left( \frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} \left( \frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}'}} \right)^{1/2} \\ &\quad \times e^2 \varepsilon_\beta(\mathbf{k}') \varepsilon_\alpha(\mathbf{k}) [\bar{v}_\mu(\mathbf{p})(\gamma^\alpha)_{\mu\nu} iS_{F\nu\rho}(q)(\gamma^\beta)_{\rho\sigma} v_\sigma(\mathbf{p}')] \end{aligned}$$

と計算される. 座標  $x_1, x_2$  に関する積分はデルタ関数

$$\begin{aligned} &(2\pi)^4 \delta^{(4)}(q + k + p) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q + p' + k') \\ &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q + k + p) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' + k' - p - k) \end{aligned}$$

になることに注意して  $q$  に関する積分を実行すると,  $\langle f | S_a | i \rangle$  は電子に対する式 (7.37) における Feynman 振幅 (7.38a) を式 (7.39):

$$\mathcal{M}'_a = e^2 \bar{v}(\mathbf{p}) \not{\varepsilon}(\mathbf{k}) iS_F(q = -p - k) \not{\varepsilon}(\mathbf{k}') v(\mathbf{p}')$$

で置き換えた式で与えられることが分かる.

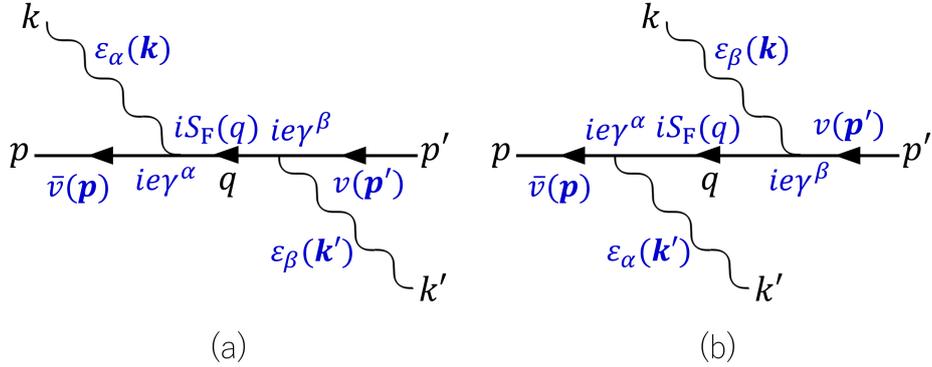


図 24 陽電子の Compton 散乱. 7.3 節の Feynman 規則に基づく因子を付してある.

$\langle f|S_b|i\rangle$  を得るには  $\langle f|S_a|i\rangle$  の計算過程で, 光子に関する因子を

$$\varepsilon_\beta(\mathbf{k}')e^{ik'\cdot x_2} \rightarrow \varepsilon_\alpha(\mathbf{k}')e^{ik'\cdot x_1}, \quad \varepsilon_\alpha(\mathbf{k})e^{-ik\cdot x_1} \rightarrow \varepsilon_\beta(\mathbf{k})e^{-ik\cdot x_2}$$

と置き換えれば良い. すると今度は, 座標  $x_1, x_2$  に関する積分はデルタ関数

$$\begin{aligned} & (2\pi)^4\delta^{(4)}(q - k' + p)(2\pi)^4\delta^{(4)}(q + p' - k) \\ & = (2\pi)^4\delta^{(4)}(q - k' + p)(2\pi)^4\delta^{(4)}(k' - p + p' - k) \end{aligned}$$

を与える. よって陽電子の Compton 散乱に関する行列要素  $\langle f|S_b|i\rangle$  は, 電子の場合と比べて Feynman 振幅 (7.38b) が

$$\mathcal{M}'_b = e^2\bar{v}(\mathbf{p})\not{\varepsilon}(\mathbf{k}')iS_F(q = k' - p)\not{\varepsilon}(\mathbf{k})v(\mathbf{p}') \quad (173)$$

に置き換わることになる.

最後に以上の結果が, 7.3 節の Feynman 規則から導かれることを確かめておこう. 上式の  $S_a, S_b$  はそれぞれ, 図 24(教科書の図 7.13(p.134)) に示す運動量空間の Feynman ダイアグラムで表される. ただし図 24 では Feynman 規則 1,3,4(c)(d)(e)(f) に基づき, Feynman グラフに結節点・外線・内線因子を付記してある. 規則 5 に従ってフェルミオン因子を並べると

$$\begin{aligned} \mathcal{M}'_a & \sim \varepsilon_\alpha(\mathbf{k})\varepsilon_\beta(\mathbf{k}') \times [\bar{v}(\mathbf{p})ie\gamma^\alpha iS_F(q)ie\gamma^\beta v(\mathbf{p}')], \\ \mathcal{M}'_b & \sim \varepsilon_\beta(\mathbf{k})\varepsilon_\alpha(\mathbf{k}') \times [\bar{v}(\mathbf{p})ie\gamma^\alpha iS_F(q)ie\gamma^\beta v(\mathbf{p}')] \end{aligned}$$

となる (式がまだ完全には確定していないことを「 $\sim$ 」で表しておいた). 各偏極ベクトル  $\varepsilon(\mathbf{k})$  を  $\gamma$  行列の隣に移動し, 次いで規則 7 に従って保存則

$$\begin{cases} p + k = -q & (\mathcal{M}_a \text{ に対して}) \\ p = k' + (-q) & (\mathcal{M}_b \text{ に対して}) \end{cases}$$

を要求する. さらに規則 8 を適用して (正規順序化に由来する) 因子  $(-1)$  を  $\mathcal{M}'_a, \mathcal{M}'_b$  それぞれに掛けると, 再び Feynman 振幅 (7.39), (173) が得られる.

### 7.2.3 電子-電子散乱

電子-電子散乱 (Møller 散乱)

$$|i\rangle = c_s^\dagger(\mathbf{p}_2)c_r^\dagger(\mathbf{p}_1)|0\rangle \rightarrow |f\rangle = c_{s'}^\dagger(\mathbf{p}'_2)c_{r'}^\dagger(\mathbf{p}'_1)|0\rangle$$

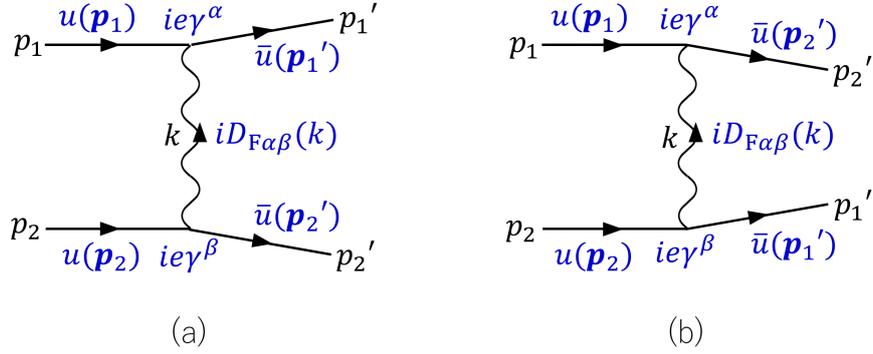


図 25 電子-電子散乱 (Møller 散乱). スピン状態の添字を省き, 7.3 節の Feynman 規則に基づく因子を付してある.

の確率振幅には, 図 20 で見た座標空間の Feynman グラフに対応して, 図 25 に示す 2 つの運動量空間のグラフが寄与する. それぞれのグラフに関する Feynman 振幅を  $\mathcal{M}_a, \mathcal{M}_b$  とすると, 対応する S 行列要素は

$$\langle f | S^{(2)}(2e^- \rightarrow 2e^-) | i \rangle = \left[ (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' + k' - p - k) \right. \\ \left. \times \left( \frac{m}{VE_1} \right)^{1/2} \left( \frac{m}{VE_2} \right)^{1/2} \left( \frac{m}{VE'_1} \right)^{1/2} \left( \frac{m}{VE'_2} \right)^{1/2} \right] (\mathcal{M}_a + \mathcal{M}_b), \quad (174)$$

$$\mathcal{M}_a = -e^2 \bar{u}_{r'}(\mathbf{p}'_1) \gamma^\alpha u_r(\mathbf{p}_1) iD_{F\alpha\beta}(k = p_2 - p'_2) \bar{u}_{s'}(\mathbf{p}'_2) \gamma^\beta u_s(\mathbf{p}_2), \quad (175)$$

$$\mathcal{M}_b = +e^2 \bar{u}_{s'}(\mathbf{p}'_2) \gamma^\alpha u_r(\mathbf{p}_1) iD_{F\alpha\beta}(k = p_2 - p'_1) \bar{u}_{r'}(\mathbf{p}'_1) \gamma^\beta u_s(\mathbf{p}_2) \quad (176)$$

となる ( $E'_1 \equiv E_{p'_1}$ , etc.) [導出は「7.2.3 について」の節]. 2 つの振幅  $\mathcal{M}_a, \mathcal{M}_b$  の相対的な符号の違いはそのまま, 式 (169) で見た直接散乱と交換散乱の符号の違いに由来している.

上式における光子の運動量  $k = p_2 - p'_2, p_2 - p'_1$  は, 図 25 のように光子の内線の運動量  $k$  を上向きに定義した場合と整合している.

$$D_{F\alpha\beta}(k) = \frac{-g_{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon} = D_{F\alpha\beta}(-k)$$

なので, 行列要素を計算する際に波数  $k$  の代わりに  $-k$  を用いて伝播関数の Fourier 展開を行えば, 単純に上式で  $k \rightarrow -k$  と置き換えた式が得られる. この場合には Feynman 振幅は図 25 の代わりに, 内線の運動量  $k$  を下向きに定義したグラフと整合することになる. 結局  $k$  の向きを任意に決めておき, それに応じて保存則を適切に表せば, Feynman 振幅が正しく得られることになる.

### 7.2.3 について

■ Møller 散乱の S 行列要素 (174)–(176) の導出 導出は読者に委ねられている (p.135 脚注).

既に導いた S 行列要素の式 (169) から出発すれば良い. 電子状態を

$$1 = (r, \mathbf{p}_1), \quad 2 = (s, \mathbf{p}_2), \quad 1' = (r', \mathbf{p}'_1), \quad 2' = (s', \mathbf{p}'_2)$$

と表記・設定したことを念頭に置いて詳しく書くと,

$$\begin{aligned}\langle f|S_a|i\rangle &= -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \left[ \left( \frac{m}{VE'_1} \right)^{1/2} \bar{u}_{r'}(\mathbf{p}'_1) e^{ip'_1 \cdot x_1} \right] \gamma^\alpha \left[ \left( \frac{m}{VE_1} \right)^{1/2} u_r(\mathbf{p}_1) e^{-ip_1 \cdot x_1} \right] \\ &\quad \times \left[ \left( \frac{m}{VE'_2} \right)^{1/2} \bar{u}_{s'}(\mathbf{p}'_2) e^{ip'_2 \cdot x_2} \right] \gamma^\beta \left[ \left( \frac{m}{VE_2} \right)^{1/2} u_s(\mathbf{p}_2) e^{-ip_2 \cdot x_2} \right] iD_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2), \\ \langle f|S_b|i\rangle &= -\langle f|S_a|i\rangle|_{1' \leftrightarrow 2'}\end{aligned}$$

である. これらを完全に運動量空間に移すために, 伝播関数を

$$iD_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} iD_{F\alpha\beta}(k) e^{-ik \cdot (x_1 - x_2)}$$

と Fourier 展開して計算を続けると,

$$\begin{aligned}\langle f|S_a|i\rangle &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int d^4x_1 e^{i(p'_1 - p_1 - k) \cdot x_1} \int d^4x_2 e^{i(p'_2 - p_2 + k) \cdot x_2} \left( \frac{m}{VE_1} \right)^{1/2} \left( \frac{m}{VE_2} \right)^{1/2} \left( \frac{m}{VE'_1} \right)^{1/2} \left( \frac{m}{VE'_2} \right)^{1/2} \\ &\quad \times (-e^2) [\bar{u}_{r'}(\mathbf{p}'_1) \gamma^\alpha u_r(\mathbf{p}_1) \bar{u}_{s'}(\mathbf{p}'_2) \gamma^\beta u_s(\mathbf{p}_2)] iD_{F\alpha\beta}(k)\end{aligned}$$

となる. 座標  $x_1, x_2$  に関する積分はデルタ関数

$$\begin{aligned}(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p'_1 - p_1 - k) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p'_2 - p_2 + k) \\ = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p'_1 + p'_2 - p_1 - p_2) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p'_2 - p_2 + k)\end{aligned}$$

になることに注意して 4 元運動量  $k$  に関する積分を実行すると,

$$\begin{aligned}\langle f|S_a|i\rangle &= \left[ (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' + k' - p - k) \right. \\ &\quad \left. \times \left( \frac{m}{VE_1} \right)^{1/2} \left( \frac{m}{VE_2} \right)^{1/2} \left( \frac{m}{VE'_1} \right)^{1/2} \left( \frac{m}{VE'_2} \right)^{1/2} \right] \mathcal{M}_a, \\ \mathcal{M}_a &= -e^2 \bar{u}_{r'}(\mathbf{p}'_1) \gamma^\alpha u_r(\mathbf{p}_1) iD_{F\alpha\beta}(k = p_2 - p'_2) \bar{u}_{s'}(\mathbf{p}'_2) \gamma^\beta u_s(\mathbf{p}_2) : (175)\end{aligned}$$

を得る. ここから

$$\begin{aligned}\langle f|S_b|i\rangle &= -\langle f|S_a|i\rangle|_{1' \leftrightarrow 2'} \\ &= \left[ (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' + k' - p - k) \right. \\ &\quad \left. \times \left( \frac{m}{VE_1} \right)^{1/2} \left( \frac{m}{VE_2} \right)^{1/2} \left( \frac{m}{VE'_1} \right)^{1/2} \left( \frac{m}{VE'_2} \right)^{1/2} \right] \mathcal{M}_b, \\ \mathcal{M}_b &= -(\mathcal{M}_a)|_{1' \leftrightarrow 2'} \\ &= +e^2 \bar{u}_{s'}(\mathbf{p}'_2) \gamma^\alpha u_r(\mathbf{p}_1) iD_{F\alpha\beta}(k = p_2 - p'_1) \bar{u}_{r'}(\mathbf{p}'_1) \gamma^\beta u_s(\mathbf{p}_2) : (176), \\ \langle f|S^{(2)}(2e^- \rightarrow 2e^-)|i\rangle &= \langle f|S_a|i\rangle + \langle f|S_b|i\rangle : (174)\end{aligned}$$

が導かれる.

■Feynman 規則から改めて  $\mathcal{M}_{a,b}$  の式 (175), (176) を導くこと 7.3 節の Feynman 規則 1,2,4(a)(b) に基づき図 25 のように, Feynman グラフに結節点・外線・内線因子を充てることのできる (スピン添字は省略). 規則 5 に従ってフェルミオン因子を並べると

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_a &\sim [\bar{u}(\mathbf{p}'_1)ie\gamma^\alpha u(\mathbf{p}_1)]iD_{F\alpha\beta}(k)[\bar{u}(\mathbf{p}'_2)ie\gamma^\beta u(\mathbf{p}_2)], \\ \mathcal{M}_b &\sim [\bar{u}(\mathbf{p}'_2)ie\gamma^\alpha u(\mathbf{p}_1)]iD_{F\alpha\beta}(k)[\bar{u}(\mathbf{p}'_1)ie\gamma^\beta u(\mathbf{p}_2)]\end{aligned}$$

となる (式がまだ完全には確定していることを「 $\sim$ 」で表しておいた). ここで  $[\dots]$  内の因子は一続きのフェルミオン線に由来しており, その内部で順番を入れ替えることはできないけれど,  $[\dots]$  全体を式のどこに書くかは任意と考えられる. 次いで規則 7 に従って保存則

$$\begin{cases} k = p_2 - p'_2 & (\mathcal{M}_a \text{ に対して}) \\ k = p_2 - p'_1 & (\mathcal{M}_b \text{ に対して}) \end{cases}$$

を成立させ, さらに規則 8 を考慮して  $\mathcal{M}_b$  に符号因子  $(-1)$  を掛けると, Feynman 振幅 (175), (176) が得られる.

#### 7.2.4 閉じたループ

内線がループを形成している Feynman ダイアグラムでは, エネルギー-運動量保存則の下でなお 4 元運動量が外線から固定されない内線が生じる. 例えば図 26 に示す電子の自己エネルギーダイアグラムでは, 保存則を考慮すると, 与えられた外線の運動量  $p, p' (= p)$  に対して光子と電子の内線の運動量は  $k, q = p - k$  とおくことができる. このとき運動量  $k$  の値は (したがって  $q$  の値は) 固定されない. 第 1 原理により遷移

$$|i\rangle = c^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle \rightarrow |f\rangle = c^\dagger(\mathbf{p}')|0\rangle$$

(スピン状態の添字を省略) に関する, 図 26 に対応する S 行列要素は

$$\langle f|S^{(2)}|i\rangle = \left[ (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' - p) \left( \frac{m}{VE_p} \right)^{1/2} \left( \frac{m}{VE_{p'}} \right)^{1/2} \right] \mathcal{M}, \quad (7.44a)$$

$$\mathcal{M} = -e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} iD_{F\alpha\beta}(k) \bar{u}(\mathbf{p})\gamma^\alpha iS_F(p-k)\gamma^\beta u(\mathbf{p}) \quad (7.44b)$$

と計算される [導出は「7.2.4 について」の節]. [これは保存則  $p = p'$  を含意しており,] 独立に選べる運動量  $k$  の可能なすべての値からの寄与が,  $k$  に関する積分として自然に導入されている. このような内部運動量に関する積分は, 閉じたループに一般的な特徴である. もう 1 つの例として, 光子の自己エネルギーを問題 7.2 で取り上げる.

#### 7.2.4 について

■電子の自己エネルギーダイアグラムに関する S 行列要素 (7.44) の導出 導出は読者に委ねられている (p.137, 1.1). 電子の自己エネルギーダイアグラム (図 26) に寄与するのは, 7.1 節の  $S_D^{(2)}$  における

$$S^{(2)}(e^- \rightarrow e^-) = -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \bar{\psi}^-(x_1)\gamma^\alpha iS_F(x_1-x_2)\gamma^\beta \psi^+(x_2) iD_{F\alpha\beta}(x_1-x_2) \quad (7.20)$$

の部分である. よって遷移

$$|i\rangle = c^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle \rightarrow |f\rangle = c^\dagger(\mathbf{p}')|0\rangle$$

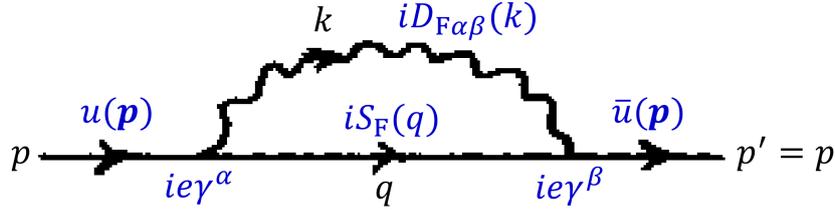


図 26 電子の自己エネルギー。スピン状態の添字を省き、7.3 節の Feynman 規則に基づく因子を付してある。

に関する，図 26 に対応する S 行列要素は

$$\begin{aligned} & \langle f | S^{(2)}(e^- \rightarrow e^-) | i \rangle \\ &= -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \left[ \left( \frac{m}{VE_{p'}} \right)^{1/2} \bar{u}(p') e^{ip' \cdot x_1} \right] \gamma^\alpha \left[ \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} iS_F(q) e^{-iq \cdot (x_1 - x_2)} \right] \gamma^\beta \\ & \quad \times \left[ \left( \frac{m}{VE_p} \right)^{1/2} u(p) e^{-ip \cdot x_2} \right] \left[ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} iD_{F\alpha\beta}(k) e^{-ik \cdot (x_1 - x_2)} \right] \end{aligned}$$

と計算される。座標  $x_1, x_2$  に関する積分はデルタ関数

$$\begin{aligned} & (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q - (p' - k)) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q - (p - k)) \\ &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' - p) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q - (p - k)) \end{aligned}$$

を与えることに注意し，運動量  $q$  に関する積分を実行すると，S 行列要素の式 (7.44) が得られる。

■ Feynman 規則から改めて Feynman 振幅 (7.44b) を導くこと 7.3 節の Feynman 規則 1,2,3,4(a)(b) に基づき図 26 のように，Feynman グラフに結節点・外線・内線因子を充てることができる (スピン添字は省略)。規則 5 に従ってフェルミオン因子を並べると

$$\mathcal{M} \sim iD_{F\alpha\beta}(k) \bar{u}(p) i\gamma^\beta iS_F(q) i\gamma^\alpha u(p)$$

となる (式がまだ完全には確定していないことを「 $\sim$ 」で表しておいた)。次に規則 7 に従って  $q = p - k$  と書き，積分  $\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}$  を施すと，Feynman 振幅 (7.44b) が得られる。

### 7.3 QED の Feynman 規則

我々はいくつかの具体例を通して，Feynman ダイアグラムを Feynman 振幅の式に翻訳する，QED の Feynman 規則の起源を一通り見たことになる。ここで得られた Feynman 規則をまとめておこう。ただし 7.2 節の段階ではまだ議論されていないことであるが，電子 (と陽電子)  $e^\mp$  に対する Feynman 規則は，荷電レプトン  $l^\mp = \mu^\mp, \tau^\mp$  (7.4 節) や中性レプトン  $\nu_l, \bar{\nu}_l$  (ゼロでない質量  $m_{\nu_l}$  を持つ Dirac 粒子と仮定) にも適用できることに注意し (下巻の付録 B)，以下では中性レプトンも対象に含める。また以下の静的な外場  $A_{e\alpha}(x)$  との相互作用に関する規則は，8.7 節において導出されることになる。

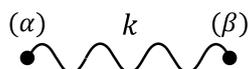
遷移  $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$  に関する S 行列要素は

$$S_{fi} = \delta_{fi} + (2\pi)^4 \delta \left( \sum p'_f - \sum p_i \right) \prod_i \left( \frac{1}{2VE_i} \right)^{1/2} \prod_f \left( \frac{1}{2VE'_f} \right)^{1/2} \prod_l (2m)^{1/2} \mathcal{M} \quad (177)$$

という形をとる. ここに  $p_i = (E_i, \mathbf{p}_i)$  は始状態における各粒子の 4 元運動量,  $p'_f = (E'_f, \mathbf{p}'_f)$  は終状態における各粒子の 4 元運動量である. 添字  $l$  は全ての外線レプトン (荷電レプトン  $l^\mp$  および中性レプトン  $\nu_l, \bar{\nu}_l$ ) を指し,  $m$  は外線レプトン  $l$  の質量 ( $m_l$  および  $m_{\nu_l}$ ) を表す. この式で遷移  $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$  に関する Feynman 振幅  $\mathcal{M}$  が定義される.

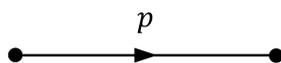
以下の Feynman 規則に従って, QED の過程に関するグラフから対応する Feynman 振幅を得ることができる.

1. 各結節点に因子  $ie\gamma^\alpha$  を充てる.
2. 運動量  $k$  の付随する光子の内線



に因子  $iD_{F\alpha\beta}(k) = i\frac{-g_{\alpha\beta}}{k^2 + i\epsilon}$  を充てる.

3. 運動量  $p$  の付随するレプトンの内線



に因子  $iS_F(p) = i\frac{1}{\not{p} - m + i\epsilon}$  を充てる.

$m$  は対象とするレプトンの質量  $m_l$  や  $m_{\nu_l}$  を表す ( $l = e, \mu, \tau$ ).

4. (a) 始状態のレプトン  $l^-, \nu_l$  の外線



に因子  $u_r(\mathbf{p})$  を充てる.

- (b) 終状態のレプトン  $l^-, \nu_l$  の外線



に因子  $\bar{u}_r(\mathbf{p})$  を充てる.

- (c) 始状態のレプトン  $l^+, \bar{\nu}_l$  の外線



に因子  $\bar{v}_r(\mathbf{p})$  を充てる.

- (d) 終状態のレプトン  $l^+, \bar{\nu}_l$  の外線



- に因子  $v_r(\mathbf{p})$  を充てる.  
 (e) 始状態の光子の外線



- に因子  $\varepsilon_{r\alpha}(\mathbf{k})$  を充てる.  
 (f) 終状態の光子の外線



に因子  $\varepsilon_{r\alpha}(\mathbf{k})$  を充てる<sup>\*32</sup>.

ここに  $\mathbf{p}$  と  $\mathbf{k}$  は外線粒子の 3 次元運動量を表し,  $r(= 1, 2)$  はスピン状態もしくは偏極状態を表す.

5. 各フェルミオン線と,

それらを接続する各結節点に付随するスピノル因子 (4 元スピノル,  $S_F$  関数,  $\gamma$  行列) を, 相互に接続している一連のフェルミオン線を矢印の向きに辿る順序で右から左に並べる.

6. 閉じたフェルミオン線それぞれに関して対角和をとり, 因子  $(-1)$  を掛ける.

7. 結節点においてエネルギー・運動量の保存を成立させる.

エネルギー・運動量保存の要請の下でも固定されないパラメーターとして残る

内部 4 元運動量  $q$  それぞれに関して積分  $\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4}$  を施す.

このような内部運動量変数  $q$  に関する積分は, 閉じたループそれぞれにおいて生じる.

- ★ このように積分に因子  $(2\pi)^{-4}$  を含めておけば, 次の規則 8 による位相因子を除き, 必要な数値因子が全て出揃う (下記).

8. 位相因子  $\delta_P$  として  $+1$  または  $-1$  を掛ける.

これは外線フェルミオン因子 (演算子) の順序を外線指数 (引数) の順序が適正になるように並べ直すときに, フェルミオン因子同士の置換が必要な回数が偶数回ならば  $+1$ , 奇数回ならば  $-1$  とする.

- ★ 位相因子が重要となるのは, 複数の Feynman グラフからの寄与を足し合わせる必要のある場合に限られ, その場合にも相対的な符号の違いのみが関心の対象となる.

“外部の静的な電磁場”  $A_{e\alpha}(\mathbf{x})$  との相互作用を扱う際には, Feynman 振幅と S 行列要素を関係付ける式 (177) において

$$(2\pi)^4 \delta \left( \sum p'_f - \sum p_i \right) \rightarrow (2\pi) \delta \left( \sum E'_f - \sum E_i \right)$$

と置き換えた上で, 次の Feynman 規則を追加する.

<sup>\*32</sup> これは 5.1 節で選んだ線形偏極 (偏光) 状態  $\varepsilon_{r\alpha}(\mathbf{k})$  が実数であることによる. 一般に  $\varepsilon_{r\alpha}(\mathbf{k})$  は複素数であり (例えば円偏光を考えよ), その場合には終状態の  $\varepsilon_{r\alpha}(\mathbf{k})$  を  $\varepsilon_{r\alpha}(\mathbf{k})^*$  に置き換えなければならない.

9. 荷電粒子と外部の静的電磁場  $A_{e\alpha}(\mathbf{x})$  との相互作用



それぞれに対して，因子

$$A_{e\alpha}(\mathbf{q}) = \int d^3x e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} A_{e\alpha}(\mathbf{x})$$

を充てる． $\mathbf{q}$  は場の源 ( $\times$ ) から粒子へ移行する運動量である．

■数値因子  $(2\pi)^4$  について 一見するとここまでの Feynman 規則では数値因子として，

- 各結節点  $x$  の積分から生じるデルタ関数に付随する  $(2\pi)^4$
- 各内線に対応する伝播関数の Fourier 展開に付随する  $(2\pi)^{-4}$

を考慮していない．よって  $n$  個の結節点と  $f_i$  本のフェルミオン内線， $b_i$  本のボゾン内線を持つ Feynman ダイアグラムに対して，Feynman 振幅には

$$[(2\pi)^4]^{n-f_i-b_i-1}$$

を補う必要があるように見える (指数末尾の  $-1$  は，S 行列要素 (177) において Feynman 振幅から分離した  $(2\pi)^4$  に対応する)．しかしながら具体的なループダイアグラムを通して見たように，これは規則 7 のループ積分  $\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}$  に含めておいた  $(2\pi)^4$  因子に他ならない\*33．よって数値因子は既に出尽くしており，改めて因子  $(2\pi)^4$  を考慮するには及ばない．

## 7.4 レプトン

本稿では電子に限らず，荷電レプトン  $e^\mp, \mu^\mp, \tau^\mp$  を対象に含めた QED の定式化について，既にノートの第 6 章の箇所にて導入してある．ここではその相互作用

$$\mathcal{H}_I(x) = -e \sum_l N[\bar{\psi}_l(x) A(x) \psi_l(x)]$$

に関する特徴について補足説明を行う．

- $\mathcal{H}_I$  は同一時空点  $x$  の場のみを含む  $\rightarrow$  相互作用は局所的
  - 実験的にもレプトンは点粒子的であり，これは適正な取り扱いと言える．  
(強粒子 (ハドロン) は対照的に，有限の寸法を持つ．)
- 同じ結節点に接続する 2 本のフェルミオン線は，必ず同種のレプトンでなければならない．
  - 以下で見るレプトン対の生成過程  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  では  
Bhabha 散乱  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$  とは対照的に，散乱ダイアグラム (図 21 参照) が寄与しない．
  - レプトン数を

$$N(l) = N(l^-) - N(l^+)$$

\*33 すなわちダイアグラムの含むループの個数を  $l$  とすると， $n - f_i - b_i - 1 = -l$  が成り立つ．[特にループの個数が  $l = 0$  のとき，デルタ関数と伝播関数からの寄与  $[(2\pi)^4]^{n-f_i-b_i-1}$  は自動的に相殺して 1 になる.]

表3 レプトン数  $N(l)$  の保存.  $-eN[\bar{\psi}_l(x)A(x)\psi_l(x)]$  の含む全ての生成・消滅演算子の組合せを左の欄に書いた.

演算子	$N(l^-)$ の変化	$N(l^+)$ の変化	$N(l)$ の変化
$c_l^\dagger c_l$	$-1 + 1$	$0$	$0$
$d_l^\dagger s_l$	$0$	$+1 - 1$	$0$
$c_l d_l$	$-1$	$-1$	$0$
$c_l^\dagger d_l^\dagger$	$+1$	$+1$	$0$

で定義すると, これは ( $\mathcal{H}_I$  の行列要素がゼロにならない任意の状態間において) 保存する [表3 参照].

次に 7.4 節における, 2 次の摂動論による反応  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  の Feynman 振幅 (7.61) の計算について, 7.1-7.3 節で見た Feynman 規則の導出の内容も含める方でまとめる. はじめに要点を述べ, 後から節を改めて式の導出などの補足を行う.

#### 反応 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ の確率振幅と Feynman 規則

ここでは具体的な素粒子の反応として  $e^+e^-$  衝突によるレプトン対  $\mu^+\mu^-$  の生成過程

$$e^+(\mathbf{p}_1, r_1) + e^-(\mathbf{p}_2, r_2) \rightarrow \mu^+(\mathbf{p}_1', s_1) + \mu^-(\mathbf{p}_2', s_2) \quad (178)$$

を取り上げ, この反応が起こる確率振幅を考える (pp.137-140, pp.143-145). 上式 (178) の引数は順番に粒子の運動量とスピンを表している. また粒子の 4 元運動量を

$$e^+ : p_1 = (E_{\mathbf{p}_1}, \mathbf{p}_1), \quad e^- : p_2 = (E_{\mathbf{p}_2}, \mathbf{p}_2), \quad \mu^+ : p_1' = (E_{\mathbf{p}_1'}, \mathbf{p}_1'), \quad \mu^- : p_2' = (E_{\mathbf{p}_2'}, \mathbf{p}_2')$$

と書く. この反応 (178) は始状態  $|i\rangle = |e^-\mathbf{p}_2 r_2; e^+\mathbf{p}_1 r_1\rangle$  から終状態  $|f\rangle = |\mu^-\mathbf{p}_2' s_2; \mu^+\mathbf{p}_1' s_1\rangle$  への遷移

$$|i\rangle = |e^-\mathbf{p}_2 r_2; e^+\mathbf{p}_1 r_1\rangle \rightarrow |f\rangle = |\mu^-\mathbf{p}_2' s_2; \mu^+\mathbf{p}_1' s_1\rangle \quad (179)$$

に対応する.

6.3 節の議論を踏まえると, 遷移 (179) の起きる確率振幅は 2 次の摂動論で

$$S_{fi} = \left\langle f \left| (-e^2) \int d^4x_1 d^4x_2 N[(\bar{\psi}_\mu A \psi_\mu)_{x_1} (\bar{\psi}_e A \psi_e)_{x_2}] \right| i \right\rangle \quad (180)$$

となることが分かる. さらにこれを運動量空間に移すと

$$S_{fi} = \left[ (2\pi)^4 \delta^4(p_1' + p_2' - p_1 - p_2) \left( \frac{m_e}{VE_{\mathbf{p}_1}} \right)^{1/2} \left( \frac{m_e}{VE_{\mathbf{p}_2}} \right)^{1/2} \left( \frac{m_\mu}{VE_{\mathbf{p}_1'}} \right)^{1/2} \left( \frac{m_\mu}{VE_{\mathbf{p}_2'}} \right)^{1/2} \right] \mathcal{M}, \quad (181)$$

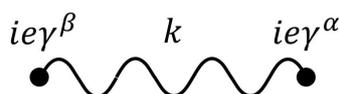
$$\mathcal{M} = [\bar{u}_{(\mu)s_2}(\mathbf{p}_2')(ie\gamma_\alpha)v_{(e)s_1}(\mathbf{p}_1')] iD_F^{\alpha\beta}(p_1 + p_2) [\bar{v}_{(e)r_1}(\mathbf{p}_1)(ie\gamma_\beta)u_{(\mu)r_2}(\mathbf{p}_2)]: \text{Feynman 振幅} \quad (182)$$

となる (ただし例えば  $u_{(l)r}(\mathbf{p})$  は, レプトン  $l$  を表す Dirac 場に対して導入したスピノル  $u_r(\mathbf{p})$  であり, ここではレプトンの種類  $l$  を添字として明示している). 反応 (178) がエネルギー・運動量保存則を破る場合を想定すると  $p_1 + p_2 \neq p_1' + p_2'$  である.  $S_{fi}$  の式 (181) の  $\delta^4(p_1' + p_2' - p_1 - p_2)$  はそのような遷移の確率をゼロにする.

ここで Feynman 振幅 (182) は, 反応  $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$  を表す図 27 のグラフに対応していることを説明する. 図 27 は Feynman ダイアグラムと呼ばれ, 左側に外部からダイアグラムに入る線を 2 本, 右側にダイアグラムから外部に出る線を 2 本持つ. これらは外線と呼ばれ, それぞれ始状態に存在する粒子  $e^\pm$  と終状態に存在する粒子  $\mu^\pm$  を表している. 外線については時間はグラフの左から右に流れるものと見なし, 外線の矢印は粒子  $l^-$  に対しては時間と同じ方向を向き (左から右を向き), 反粒子  $l^+$  に対しては時間と反対の方向を向く (右から左を向く) ように描く (p.81). ダイアグラム中央の線は内線と呼ばれる. 図 27 の場合, 内線は光子を表す波線である.

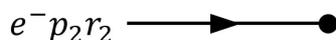
このダイアグラムの各要素に対して以下の操作を施すと Feynman 振幅の表式 (182) が得られる. これらは QED で扱われる素粒子の反応に対して, Feynman ダイアグラムを描き, そこから確率振幅を書き下すための Feynman 規則の一部を成す.

1. 各結節点に因子  $ie\gamma^\alpha$  を充てる.
2. 運動量  $k$  の付随する光子の内線



に因子  $iD_{F\beta\alpha}(k) = iD_{F\alpha\beta}(k)$  を充てる.

3. (a) 始状態の  $e^-$  の外線



に因子  $u_{(e)r_2}(\mathbf{p}_2)$  を充てる.

- (b) 終状態の  $\mu^-$  の外線



に因子  $\bar{u}_{(\mu)s_2}(\mathbf{p}_2')$  を充てる.

- (c) 始状態の  $e^+$  の外線



に因子  $\bar{v}_{(e)r_1}(\mathbf{p}_1)$  を充てる.

- (d) 終状態の  $\mu^+$  の外線

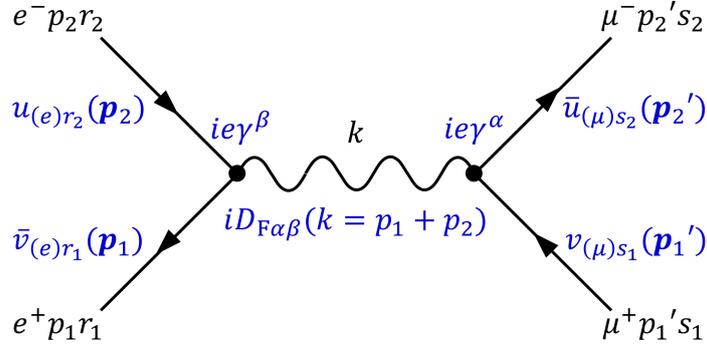
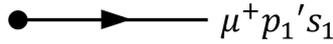


図 27 反応  $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$  を表す Feynman ダイアグラム



に因子  $v_{(\mu)s_1}(\mathbf{p}_1')$  を充てる.

4. フェルミオン線を矢印の向きにたどって出会う因子を順に右から並べて,  
 $[\bar{u}_{(\mu)s_2}(\mathbf{p}_2')(ie\gamma_\alpha)v_{(\mu)s_1}(\mathbf{p}_1')]$  と  $[\bar{v}_{(e)r_1}(\mathbf{p}_1)(ie\gamma_\beta)u_{(e)r_2}(\mathbf{p}_2)]$  を得る.  
 これらと  $iD_F^{\alpha\beta}(k)$  の合わせて 3 つの因子を並べて

$$\mathcal{M} = [\bar{u}_{(\mu)s_2}(\mathbf{p}_2')(ie\gamma_\alpha)v_{(\mu)s_1}(\mathbf{p}_1')] iD_F^{\alpha\beta}(k) [\bar{v}_{(e)r_1}(\mathbf{p}_1)(ie\gamma_\beta)u_{(e)r_2}(\mathbf{p}_2)]$$

とする (この 3 つの因子は交換するので, どのような順に並べても良いと考えられる).

5. 結節点でのエネルギー・運動量保存則を要求し  $k = p_1 + p_2$  とする.

$S_{fi}$  の式 (181) には  $\delta^4(p_1' + p_2' - p_1 - p_2)$  が含まれているため,  
 このときもう一方の結節点における保存則  $k = p_1' + p_2'$  も保証される.

反応  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  の確率振幅と Feynman 規則 (補足)

反応 (179):

$$|i\rangle = |e^- \mathbf{p}_2 r_2; e^+ \mathbf{p}_1 r_1\rangle \rightarrow |f\rangle = |\mu^- \mathbf{p}_2' s_2; \mu^+ \mathbf{p}_1' s_1\rangle$$

の確率振幅  $\langle f|S|i\rangle \equiv S_{fi}$  が 2 次の摂動論で式 (180) で与えられることを確かめる. 準備として次のことに注意する (p.129). 場  $\psi_l, \bar{\psi}_l$  の Fourier 展開 (94), (95) により, レプトンの種類  $l$  を明示すると, 消滅演算子を含む部分  $\psi_l^+, \bar{\psi}_l^+$  に対して

$$\psi_l^+(x) |l^- \mathbf{p} r\rangle = \sum_{\mathbf{q}, s} \left( \frac{m_l}{VE_{\mathbf{q}}} \right)^{1/2} c_{(l)s}(\mathbf{q}) u_{(l)s}(\mathbf{q}) e^{-iq \cdot x} |l^- \mathbf{p} r\rangle = |0\rangle \left( \frac{m_l}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} u_{(l)r}(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x}, \quad (183)$$

$$\bar{\psi}_l^+(x) |l^+ \mathbf{p} r\rangle = \sum_{\mathbf{q}, s} \left( \frac{m_l}{VE_{\mathbf{q}}} \right)^{1/2} d_{(l)s}(\mathbf{q}) \bar{v}_{(l)s}(\mathbf{q}) e^{-iq \cdot x} |l^+ \mathbf{p} r\rangle = |0\rangle \left( \frac{m_l}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} \bar{v}_{(l)r}(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} \quad (184)$$

が成り立つ。ここで例えば式 (183) では、状態  $|l^+ \mathbf{p} r\rangle$  において運動量、スピン  $(\mathbf{q}, s) (\neq (\mathbf{p}, r))$  を持つ粒子  $l^-$  は存在しないため、 $c_{(l)s}(\mathbf{q})$  が  $|l^+ \mathbf{p} r\rangle$  作用すると状態が消失する。これらの両辺の Hermite 共役をとり、右から  $\gamma^0$  をかけると

$$\langle l^- \mathbf{p} r | \bar{\psi}_l^-(x) = \langle 0 | \left( \frac{m_l}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} \bar{u}_{(l)r}(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x}, \quad (185)$$

$$\langle l^+ \mathbf{p} r | \bar{\psi}_l^-(x) = \langle 0 | \left( \frac{m_l}{VE_{\mathbf{p}}} \right)^{1/2} v_{(l)r}(\mathbf{p}) e^{ip \cdot x} \quad (186)$$

となる。

さて、確率振幅  $S_{fi}$  を 2 次の摂動論で求めるには S 演算子の Dyson 展開 (154):

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} S^{(n)}, \quad S^{(n)} \equiv \frac{(ie)^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \sum_{l_1, \dots, l_n} \text{T}\{N(\bar{\psi}_{l_1} \mathcal{A} \psi_{l_1})_{x_1} \cdots N(\bar{\psi}_{l_n} \mathcal{A} \psi_{l_n})_{x_n}\}$$

の 2 次までの項  $S^{(0)}, S^{(1)}, S^{(2)}$  の寄与を考えれば良い。確率振幅  $S_{fi}$  に寄与するのは  $e^\pm$  の消滅演算子と  $\mu^\pm$  の生成演算子を含む項だから (6.3 節)

$$S^{(0)} = 1, \quad S^{(1)} = ie \int d^4x \sum_l N[(\bar{\psi}_l \mathcal{A} \psi_l)_x]$$

からの寄与はなく、

$$S^{(2)} = \frac{-e^2}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 \sum_{l_1, l_2} \text{T}\{N(\bar{\psi}_{l_1} \mathcal{A} \psi_{l_1})_{x_1} N(\bar{\psi}_{l_2} \mathcal{A} \psi_{l_2})_{x_2}\}$$

の寄与は

$$\begin{aligned} S_{\mu e}^{(2)} &= \frac{-e^2}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 \text{T}\{N(\bar{\psi}_\mu \mathcal{A} \psi_\mu)_{x_1} N(\bar{\psi}_e \mathcal{A} \psi_e)_{x_2}\} \Leftarrow (l_1, l_2) = (\mu, e) \text{ の項} \\ &+ \frac{-e^2}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 \text{T}\{N(\bar{\psi}_e \mathcal{A} \psi_e)_{x_1} N(\bar{\psi}_\mu \mathcal{A} \psi_\mu)_{x_2}\} \Leftarrow (l_1, l_2) = (e, \mu) \text{ の項} \\ &= -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \text{T}\{N(\bar{\psi}_\mu \mathcal{A} \psi_\mu)_{x_1} N(\bar{\psi}_e \mathcal{A} \psi_e)_{x_2}\} \end{aligned}$$

から来る。これに Wick の定理 (6.3 節) を適用すると、時刻  $x_1^0$  を引数に持つ場  $\bar{\psi}_\mu, \mathcal{A}, \psi_\mu$  と時刻  $x_2^0$  を引数に持つ場  $\bar{\psi}_e, \mathcal{A}, \psi_e$  の非同時刻縮約が現れる。縮約の定義式 (158):

$$\underline{A(x_1)B(x_2)} \equiv \langle 0 | \text{T}\{A(x_1)B(x_2)\} | 0 \rangle$$

より、これがゼロとならないためには縮約される 2 つの場は同一粒子の生成演算子と消滅演算子を含んでいなければならない。よってゼロでない縮約は  $\underline{A(x_1)A(x_2)}$  のみであることを注意すると

$$\begin{aligned} S_{\mu e}^{(2)} &= S_A + S_B, \\ S_A &\equiv -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 N[(\bar{\psi}_\mu \mathcal{A} \psi_\mu)_{x_1} (\bar{\psi}_e \mathcal{A} \psi_e)_{x_2}], \\ S_B &\equiv -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 N[(\bar{\psi}_\mu \mathcal{A} \psi_\mu)_{x_1} \underline{(\bar{\psi}_e \mathcal{A} \psi_e)_{x_2}}] \end{aligned}$$

を得る (p.143).

$S_A$  の確率振幅  $S_{fi}$  への寄与はゼロとなる (pp.116–118, p.131). 実際, 式 (183), 式 (184), 式 (185), 式 (186) を用いると

$$\begin{aligned}
& \langle f|S_A|i \rangle \\
&= -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \langle \mu^- \mathbf{p}_2' s_2; \mu^+ \mathbf{p}_1' s_1 | N[(\bar{\psi}_\mu A \psi_\mu)_{x_1} (\bar{\psi}_e A \psi_e)_{x_2}] | e^- \mathbf{p}_2 r_2; e^+ \mathbf{p}_1 r_1 \rangle \\
&= -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \langle \mu^- \mathbf{p}_2' s_2; \mu^+ \mathbf{p}_1' s_1 | \bar{\psi}_\mu^-(x_1) \gamma^\alpha \psi_\mu^-(x_1) N[A_\alpha(x_1) A_\beta(x_2)] \bar{\psi}_e^+(x_2) \gamma^\beta \psi_e^+(x_2) | e^- \mathbf{p}_2 r_2; e^+ \mathbf{p}_1 r_1 \rangle \\
&= -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \left[ \left( \frac{m_\mu}{VE_{\mathbf{p}_2'}} \right)^{1/2} \bar{u}_{(\mu)s_2}(\mathbf{p}_2') e^{ip_2' \cdot x_1} \right] \gamma^\alpha \left[ \left( \frac{m_\mu}{VE_{\mathbf{p}_1'}} \right)^{1/2} v_{(\mu)s_1}(\mathbf{p}_1') e^{ip_1' \cdot x_1} \right] \\
&\times \langle 0 | A_\beta^-(x_2) A_\alpha^+(x_1) + A_\alpha^-(x_1) A_\beta^+(x_2) | 0 \rangle \\
&\times \left[ \left( \frac{m_e}{VE_{\mathbf{p}_1}} \right)^{1/2} \bar{v}_{(e)r_1}(\mathbf{p}_1) e^{-ip_1 \cdot x_2} \right] \gamma^\beta \left[ \left( \frac{m_e}{VE_{\mathbf{p}_2}} \right)^{1/2} u_{(e)r_2}(\mathbf{p}_2) e^{-ip_2 \cdot x_2} \right]
\end{aligned}$$

を得る. 最右辺 2 行目の真空期待値は消滅演算子を含む項  $A_\alpha^+, A_\beta^+$  が  $|0\rangle$  に作用して消える. このように Wick の定理を適用すると S 行列要素は正規積の和だけに限定されるから, 各項は中間状態として仮想粒子の生成-再消滅を起こすことはない (p.110, 1.2–6).

以上より 2 次の摂動論で確率振幅は式 (180):

$$\begin{aligned}
S_{fi} &= \langle f|S_B|i \rangle \\
&= \left\langle f \left| -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 N[(\bar{\psi}_\mu A \psi_\mu)_{x_1} (\bar{\psi}_e A \psi_e)_{x_2}] \right| i \right\rangle \\
&= \left\langle f \left| -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \bar{\psi}_\mu^-(x_1) \gamma_\alpha \psi_\mu^-(x_1) iD_F^{\alpha\beta}(x_1 - x_2) \bar{\psi}_e^+(x_2) \gamma_\beta \psi_e^+(x_2) \right| i \right\rangle \\
&\quad \left( \because \text{式 (5.26)} : \underline{A^\alpha(x_2) A^\beta(x_2)} = iD_F^{\alpha\beta}(x_1 - x_2) \right)
\end{aligned}$$

で与えられる.

最後にこれが式 (181) に書き換えられることを確かめる (計算の手法は pp.129–133 の箇所を参考にした). 式 (183), 式 (184), 式 (185), 式 (186), および  $D_F^{\alpha\beta}(x)$  の Fourier 展開 (5.38) を用いると

$$\begin{aligned}
S_{fi} &= -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \left[ \left( \frac{m_\mu}{VE_{\mathbf{p}_2'}} \right)^{1/2} \bar{u}_{(\mu)s_2}(\mathbf{p}_2') e^{ip_2' \cdot x_1} \right] \gamma_\alpha \left[ \left( \frac{m_\mu}{VE_{\mathbf{p}_1'}} \right)^{1/2} v_{(\mu)s_1}(\mathbf{p}_1') e^{ip_1' \cdot x_1} \right] \\
&\quad \times \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} iD_F^{\alpha\beta}(k) e^{-ik \cdot (x_1 - x_2)} \left[ \left( \frac{m_e}{VE_{\mathbf{p}_1}} \right)^{1/2} \bar{v}_{(e)r_1}(\mathbf{p}_1) e^{-ip_1 \cdot x_2} \right] \gamma_\beta \left[ \left( \frac{m_e}{VE_{\mathbf{p}_2}} \right)^{1/2} u_{(e)r_2}(\mathbf{p}_2) e^{-ip_2 \cdot x_2} \right]
\end{aligned}$$

となる. ここで  $x_1, x_2$  に関する積分は

$$\int d^4x_1 e^{i(p_2' + p_1' - k) \cdot x_1} \int d^4x_2 e^{i(k - p_1 - p_2) \cdot x_2} = (2\pi)^4 \delta^4(p_1' + p_2' - k) (2\pi)^4 \delta^4(k - p_1 - p_2)$$

であり, これを用いると  $k$  に関する積分を

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} iD_F^{\alpha\beta}(k) \times (2\pi)^4 \delta^4(p_1' + p_2' - k) (2\pi)^4 \delta^4(k - p_1 - p_2) = (2\pi)^4 iD_F^{\alpha\beta}(p_1 + p_2) \delta^4(p_1' + p_2' - p_1 - p_2)$$

と実行できるから,

$$\text{式 (181)} : S_{fi} = \left[ (2\pi)^4 \delta^4(p_1' + p_2' - p_1 - p_2) \left( \frac{m_e}{VE_{\mathbf{p}_1}} \right)^{1/2} \left( \frac{m_e}{VE_{\mathbf{p}_2}} \right)^{1/2} \left( \frac{m_\mu}{VE_{\mathbf{p}_1'}} \right)^{1/2} \left( \frac{m_\mu}{VE_{\mathbf{p}_2'}} \right)^{1/2} \right] \mathcal{M},$$

$$\text{式 (182)} : \mathcal{M} = -e^2 [\bar{u}_{(\mu)s_2}(\mathbf{p}_2') \gamma_\alpha v_{(\mu)s_1}(\mathbf{p}_1')] iD_F^{\alpha\beta}(p_1 + p_2) [\bar{v}_{(e)r_1}(\mathbf{p}_1) \gamma_\beta u_{(e)r_2}(\mathbf{p}_2)]$$

を得る.

## 練習問題 (第 7 章)

### 7.2 光子の自己エネルギー

S 演算子において電子の自己エネルギーダイアグラム (図 28) に寄与するのは, 7.1 節の式 (165):

$$S^{(2)}(\gamma \rightarrow \gamma) = -e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 \text{N}[\underbrace{(\bar{\psi} A^- \psi)_{x_1} (\bar{\psi} A^+ \psi)_{x_2}}]$$

の部分である. そして正規積の部分はトレース (166):

$$\text{N}[\underbrace{(\bar{\psi} A^- \psi)_{x_1} (\bar{\psi} A^+ \psi)_{x_2}}] = (-1) \text{Tr}[iS_F(x_2 - x_1) A^-(x_1) iS_F(x_1 - x_2) A^+(x_2)]$$

で与えられたことを思い出そう. よって図 28 の遷移  $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$  に対応する S 行列要素は

$$\begin{aligned} \langle f | S^{(2)}(\gamma \rightarrow \gamma) | i \rangle &= (-1)(-e^2) \int d^4x_1 d^4x_2 \text{Tr} \left[ \left\{ \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} iS_F(q) e^{-iq \cdot (x_2 - x_1)} \right\} \gamma^\alpha \left\{ \left( \frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}'}} \right)^{1/2} \varepsilon_\alpha(\mathbf{k}') e^{ik' \cdot x_2} \right\} \right. \\ &\quad \times \left. \left\{ \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} iS_F(p) e^{-ip \cdot (x_1 - x_2)} \right\} \gamma^\beta \left\{ \left( \frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} \varepsilon_\beta(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot x_1} \right\} \right] \end{aligned}$$

と計算される. 座標  $x_1, x_2$  に関する積分はデルタ関数

$$\begin{aligned} &(2\pi)^4 \delta^{(4)}(q - p - k) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(-q + k' + p) \\ &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q - p - k) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k' - k) \end{aligned}$$

を与えることに注意し, 運動量  $q$  に関する積分を実行すると, S 行列要素

$$\begin{aligned} \langle f | S^{(2)}(\gamma \rightarrow \gamma) | i \rangle &= \left[ (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k' - k) \left( \frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} \left( \frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}'}} \right)^{1/2} \right] \mathcal{M}, \\ \mathcal{M} &= \text{Tr} \left[ e^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} iS_F(p+k) \not{\epsilon}(\mathbf{k}' = \mathbf{k}) iS_F(p) \not{\epsilon}(\mathbf{k}) \right] \\ &= -e^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr} [\not{\epsilon}(\mathbf{k}) iS_F(p+k) \not{\epsilon}(\mathbf{k}' = \mathbf{k}) iS_F(p)] \end{aligned}$$

を得る. (この Feynman 振幅  $\mathcal{M}$  は問題文で与えられた通りである.)

上式の Feynman 振幅  $\mathcal{M}$  が, 7.3 節の Feynman 規則から導かれることを確かめておこう. 7.3 節の Feynman 規則 1,3,4(e)(f) に基づき図 28 のように, Feynman グラフに結節点・外線・内線因子を充てることのできる. 規則 5 に従ってこれらの因子を並べると

$$\mathcal{M} \sim \varepsilon_\alpha(\mathbf{k}) \varepsilon_\beta(\mathbf{k}' = \mathbf{k}) iS_F(p) i e \gamma^\beta iS_F(q) i e \gamma^\alpha$$

となる (式がまだ完全には確定していないことを「 $\sim$ 」で表しておいた). 次に規則 6 に従ってフェルミオン線に関してトレースをとり,  $(-1)$  を掛ける. さらに規則 7 を適用して  $q = p + k$  と書き, 積分  $\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}$  を施すと, 再び Feynman 振幅  $\mathcal{M}$  が得られる.

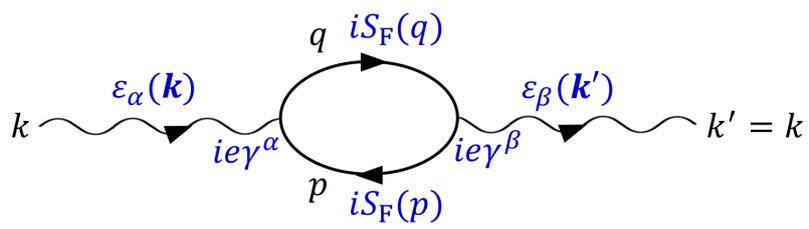


図 28 光子の自己エネルギー．偏極状態の添字を省き，7.3 節の Feynman 規則に基づく因子を付してある．

## 第 8 章 最低次の QED 過程

本章では行列要素  $S_{fi}$  から断面積を導出する.

- 8.2 節, 8.3 節: 非偏極の断面積  
[8.2 節: フェルミオンのスピン状態の和, 8.3 節: 光子の偏極状態の和]
  - 慣例に従って“偏極”という術語を光子に対してだけでなく, フェルミオンのスピン状態を指すのにも用いる.
- 8.4–8.6 節: QED の具体的な過程について, 最低次の摂動項による断面積を導出
- (古典的な) 外部電磁場が存在する場合 (原子核 Coulomb 場による弾性散乱)
  - 8.7 節: 弾性散乱
  - 8.8 節: 非弾性散乱 (光子の放出を伴う制動放射)
- 8.9 節: 弾性散乱と非弾性散乱の区別による赤外発散の困難

### 8.1 断面積

ある素粒子の反応が起きる確率振幅に関係して, 実験的に得られる量は断面積である. ここでは断面積を定義し, S 行列要素から断面積を計算するための一般的な手続きを確立する.

素粒子 1,2 の反応

$$1 + 2 \longrightarrow 3 + \cdots + i + \cdots + n \quad (187)$$

において, 検出器に単位時間に入る終状態の粒子  $i$  の個数  $dN$  を

$$dN = V \rho_1 \rho_2 v_{\text{rel}} d\sigma \quad (188)$$

と書き, この式で微断面積  $d\sigma$  を定義する. ここに

- $V$ : 空間の体積
- $\rho_1, \rho_2$ : 粒子 1,2 の数密度
- 粒子 1,2 の“相対速度”

$$v_{\text{rel}} \equiv \frac{\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2)^2}}{E_1 E_2} \quad (189)$$

- 粒子 1,2 の 4 元運動量をそれぞれ  $p_1 \equiv (E_1, \mathbf{p}_1), p_2 \equiv (E_2, \mathbf{p}_2)$ , 質量をそれぞれ  $m_1, m_2$  とした.  $p_1 \cdot p_2$  は 4 元内積である.
- これは 2 粒子の速度が平行 (反平行や一方の速度がゼロとなる場合を含む) となる場合には, その相対速度

$$v_{12} \equiv \frac{\mathbf{p}_1}{E_1} - \frac{\mathbf{p}_2}{E_2}$$

の大きさを与える.

2 粒子の重心系や一方の粒子の静止系 (実験室系) ではこの条件が満たされている.

- この“相対速度”の定義は, 上式で定義される微断面積  $d\sigma$  が不変量, すなわちスカラーであることを保証する.

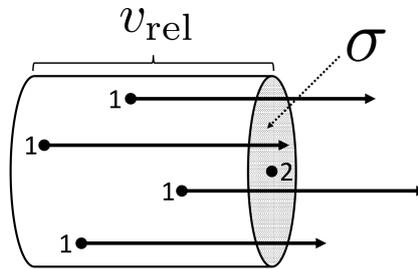


図 29 標的粒子 2 の断面積  $\sigma$  に粒子 1 がぶつかる度に素粒子の反応 (187) が起こると考える。

- 相対速度を粒子 2 の静止系における粒子 1 の速度と定義する流儀もあり、このとき相対速度はその定義によって不変量となる [4, p.39]. この流儀については後述する。

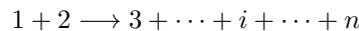
である。単位時間に散乱される粒子  $i$  の個数は、検出器の方向に散乱される粒子数 (188) の全方向についての和として

$$N = V \rho_1 \rho_2 v_{\text{rel}} \sigma \quad (190)$$

と表される。ここで  $\sigma = \int d\sigma$  は微分断面積  $d\sigma$  の全方向についての和であり、これを全断面積 (または単に断面積) と呼ぶ。全断面積を  $\sigma_{\text{tot}}$  と書くこともある [10, pp.129–130].

ここで粒子 2 を標的粒子と見なしてその静止系をとると、入射粒子 1 どうし、あるいは散乱体 2 どうしの相互作用は無視できるから、断面積  $\sigma$  は入射粒子数の流束  $\rho_1 v_{\text{rel}}$  や散乱体の個数  $\rho_2 V$  には依らない [14]. このため断面積  $\sigma$  は散乱される粒子数  $N$  に比例した、素粒子の反応に固有の量であり、それゆえ実験の詳細に依らずに素粒子の反応の性質そのものを特徴付ける量であると言える。

$\sigma$  が断面積と呼ばれるのは以下の事情による。粒子 2 の静止系をとると、粒子 2 に対し相対速度  $v_{12} = v_{\text{rel}}$  で粒子 1 が入射してくる。ここで図 29 のように標的粒子 2 が断面積  $\sigma$  の広がりを持ち、ここに粒子 1 がぶつかりさえすればその度ごとに素粒子の反応 (187):



が起こると考える。このとき単位時間に断面積  $\sigma$  に達する粒子 1 は図 29 の体積  $v_{\text{rel}} \sigma$  の円筒に含まれる  $\rho_1 v_{\text{rel}} \sigma$  個であり、体積  $V$  の中に含まれる粒子 2 は  $\rho_2 V$  個あるから、単位時間に散乱される粒子  $i$  の個数は式 (190):  $N = \rho_2 V \times \rho_1 v_{\text{rel}} \sigma$  となる [10, p.130].

ここで

$w$ : 終状態の粒子の運動量とスピン・偏極を指定した素粒子の反応 (187) が単位時間に起きる確率、すなわち遷移率、

$dW$ : 終状態の各粒子  $f$  が指定したスピン・偏極を持ち、各粒子  $f$  の運動量  $\mathbf{p}_f$  が運動量の範囲  $d^3 p_f'$  に含まれるようなミクロな状態の数

とすると、1 組の粒子対 1,2 について終状態の各粒子を運動量の範囲  $d^3 p_f'$  に得る確率は単位時間あたり  $w dW$  である。体積  $V$  の中に粒子 1,2 はそれぞれ  $\rho_1 V, \rho_2 V$  個あるから、体積  $V$  の中で起きるこのような反応の総

数は  $(\rho_1 V)(\rho_2 V)wdW$  である。終状態が 2 個の粒子から成る反応を考え、終状態の粒子を改めて 1,2 と呼ぶことにする。粒子 1 の運動量の範囲  $d^3p_1'$  が占める立体角  $d\Omega_1'$  を散乱中心から見た検出器の立体角  $d\Omega$  にとると、

$$dN = \int_{\mathbf{p}_2', |\mathbf{p}_1'|} (\rho_1 V)(\rho_2 V)wdW \quad (191)$$

となる。これを粒子数の式 (188) と等置すると、微分断面積  $d\sigma$  は

$$d\sigma = \frac{1}{v_{\text{rel}}/V} \int_{\mathbf{p}_2', |\mathbf{p}_1'|} wdW = \int_{\mathbf{p}_2', |\mathbf{p}_1'|} d\sigma'$$

で与えられる。ここに

$$d\sigma' \equiv \frac{wdW}{v_{\text{rel}}/V}$$

は終状態の粒子 1,2 のスピン・偏極と運動量の範囲  $d^3p_1', d^3p_2'$  を指定した反応の断面積である。

なお教科書には「我々が採用する状態ベクトルの規格化条件の下では、体積  $V$  の中に散乱中心がひとつ含まれ」(p.149) とある。なるほど、1 粒子状態

$$|\gamma \mathbf{k} r\rangle = a_r^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle, \quad |e^- \mathbf{p} r\rangle = c_r^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle, \quad |e^+ \mathbf{p} r\rangle = d_r^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle$$

は規格化条件

$$\begin{aligned} \langle \gamma \mathbf{k} r | \gamma \mathbf{k} r \rangle &= \langle 0 | a_r(\mathbf{k}) a_r^\dagger(\mathbf{k}) | 0 \rangle = \langle 0 | [a_r^\dagger(\mathbf{k}) a_r(\mathbf{k}) + 1] | 0 \rangle = 1, \\ \langle e^- \mathbf{p} r | e^- \mathbf{p} r \rangle &= \langle 0 | c_r^\dagger(\mathbf{p}) c_r(\mathbf{p}) | 0 \rangle = \langle 0 | [-c_r(\mathbf{p}) c_r^\dagger(\mathbf{p}) + 1] | 0 \rangle = 1, \\ \langle e^+ \mathbf{p} r | e^+ \mathbf{p} r \rangle &= \langle 0 | d_r^\dagger(\mathbf{p}) d_r(\mathbf{p}) | 0 \rangle = \langle 0 | [-d_r(\mathbf{p}) d_r^\dagger(\mathbf{p}) + 1] | 0 \rangle = 1 \end{aligned}$$

を満たす ( $r = 1, 2$ )。これは [1 粒子状態  $|\dots\rangle$  の波動関数  $\varphi(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x} | \dots \rangle$  を用いて記述される 1 粒子系の理論では、 $|\varphi(\mathbf{x})|^2$  を粒子数密度とする解釈の下で] 規格化体積  $V$  に粒子が 1 個存在することを意味する [ $\int d^3x |\varphi(\mathbf{x})|^2 = 1$ ] [10, p.130]。そこで教科書にならって、空間の体積  $V$  の中に 1 個の散乱中心が含まれることを考慮すると、 $\rho_1 v_{\text{rel}} = v_{\text{rel}}/V, \rho_2 V = 1$  となるので、式 (188) は

$$dN = d\sigma \frac{v_{\text{rel}}}{V}$$

と書ける。一方、体積  $V$  に含まれる散乱中心が 1 個だから、単位時間に検出器に入る粒子 1 の個数  $dN$  は粒子 1 が検出器の方向に散乱される確率に他ならない。これに注意すると、式 (191) は

$$dN = \int_{\mathbf{p}_2', |\mathbf{p}_1'|} wdW$$

と簡略化される。これらを等置して、再び上式

$$d\sigma = \int_{\mathbf{p}_2', |\mathbf{p}_1'|} d\sigma', \quad d\sigma' \equiv \frac{wdW}{v_{\text{rel}}/V}$$

を得る。

与えられた素粒子の反応 (終状態の粒子数は任意) に関する S 行列要素は

$$S_{fi} = \delta_{fi} + (2\pi)^4 \delta^4(\Delta p) \prod_i \left( \frac{1}{2VE_i} \right)^{1/2} \prod_f \left( \frac{1}{2VE_f'} \right)^{1/2} \prod_l (2m_l)^{1/2} \mathcal{M}$$

という形に求まる ( $\mathcal{M}$  は Feynman 振幅)。ここで  $p_i = (E_i, \mathbf{p}_i)$  ( $i = 1, 2$ ) は始状態の粒子の 4 元運動量、 $p_f' = (E_f', \mathbf{p}_f')$  は終状態の粒子の 4 元運動量、 $l$  は外線レプトンを表す。また  $\Delta p \equiv \sum p_f' - \sum p_i$  は反応前後のエネルギー・運動量の変化である。 $\Delta p \neq 0$  となる反応 (したがって  $\delta_{fi} = 0$  となる反応) を考えると、式

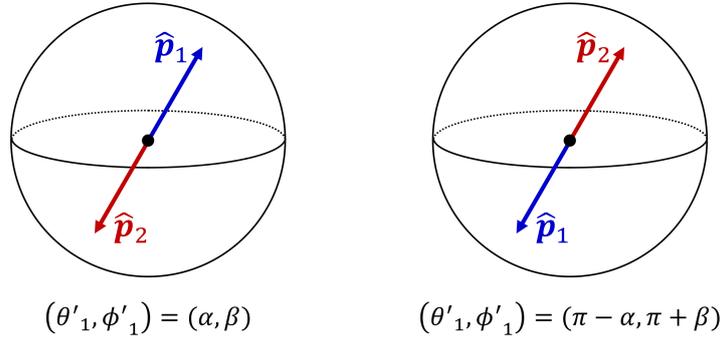


図 30 終状態の 2 粒子  $1', 2'$  が同種粒子であるとき, 区別されない 2 つの散乱 (ハットは方向単位ベクトルを表す)

に現れる  $\delta^4(\Delta p)$  により S 行列要素がゼロになるため, このデルタ関数はエネルギー・運動量保存則を表している. S 行列要素から遷移率  $w$  が求まり,

$$d\sigma' = (2\pi)^4 \delta^4(\Delta p) \frac{1}{4E_{\mathbf{p}_1} E_{\mathbf{p}_2} v_{\text{rel}}} \left( \prod_l (2m_l) \right) \left( \prod_f \frac{d^3 p_{f'}}{(2\pi)^3 2E_{f'}} \right) |\mathcal{M}|^2$$

が導かれる (始状態の粒子のエネルギーは実際の値  $E_{\mathbf{p}} \equiv \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$  に設定).

ここから終状態が 2 個の粒子から成る反応について, 重心系での微分断面積の表式

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{CoM}} = \frac{1}{64\pi^2 (E_{\mathbf{p}_1} + E_{\mathbf{p}_2})^2} \frac{|\mathbf{p}_1'|}{|\mathbf{p}_1|} \left( \prod_l (2m_l) \right) |\mathcal{M}|^2 \quad (192)$$

が導かれる.

**注意** 例えば終状態が 2 つの同種粒子を含む場合には, 重心系における散乱角  $(\theta'_1, \phi'_1) = (\alpha, \beta), (\pi - \alpha, \pi - \beta)$  は同じ過程を記述するから (図 30 参照), 全断面積を得るには積分範囲を全立体角の半分  $0 \leq \theta'_1 \leq \pi/2$  に限定する必要がある.

## 8.1 について

教科書の説明を補足しつつ, 式の導出などを行う.

■ S 行列要素の式 (8.1) への書き換えについて 光子に対して  $E = \omega$  なので,

$$\begin{aligned} \prod_{\text{ext}} \left( \frac{m}{VE} \right)^{1/2} \prod_{\text{ext}} \left( \frac{1}{2V\omega} \right)^{1/2} &= \prod_{\text{ext}} (2m)^{1/2} \prod_{\text{ext}} \left( \frac{1}{2VE} \right)^{1/2} \prod_{\text{ext}} \left( \frac{1}{2V\omega} \right)^{1/2} \\ &= \prod_l (2m_l)^{1/2} \prod_{\text{ext}} \left( \frac{1}{2VE} \right)^{1/2} \prod_{\text{ext}} \left( \frac{1}{2V\omega} \right)^{1/2} \\ &= \prod_l (2m_l)^{1/2} \prod_i \left( \frac{1}{2VE_i} \right)^{1/2} \prod_f \left( \frac{1}{2VE_{f'}} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

とできる.

■ “相対速度”  $v_{\text{rel}}$  の定義式 (189) 粒子 1,2 の質量を  $m_1, m_2$ , 4 元運動量を  $p_1 = (E_1, \mathbf{p}_1), p_2 = (E_2, \mathbf{p}_2)$ , その 4 元内積を  $p_1 \cdot p_2$  として式 (189):

$$E_1 E_2 v_{\text{rel}} = \sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2)^2}$$

で “相対速度”  $v_{\text{rel}}$  を定義すると, これは粒子 1,2 の速度が平行となる場合には実際の相対速度の大きさを与えることを確かめる. 粒子の質量を  $m$ , 座標を  $x^\mu = (t, \mathbf{x})$ , 固有時間を  $\tau$ , 4 元速度を  $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ , 座標時間  $t$  で測った速度を  $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$  とすると, 粒子の 4 元運動量  $p^\mu = (E, \mathbf{p})$  は

$$p^\mu \equiv m u^\mu = m \frac{dx^\mu}{d\tau} = \left( \frac{m}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}} \right)$$

で定義されるので,

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{E}, \quad \therefore \mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{p}_1}{E_1}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{p}_2}{E_2}$$

と表される. これに注意すると実際の相対速度は

$$\mathbf{v}_{12} \equiv \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{p}_1}{E_1} - \frac{\mathbf{p}_2}{E_2} = \frac{E_2 \mathbf{p}_1 - E_1 \mathbf{p}_2}{E_1 E_2}$$

と書けるので

$$(E_1 E_2 v_{12})^2 = E_2^2 |\mathbf{p}_1|^2 \mp 2 E_1 E_2 |\mathbf{p}_1| |\mathbf{p}_2| + E_1^2 |\mathbf{p}_2|^2$$

を得る. ところで, 2 粒子の速度が平行となる場合には  $\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = \pm |\mathbf{p}_1| |\mathbf{p}_2|$  だから

$$(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2)^2 = (E_1 E_2 \mp |\mathbf{p}_1| |\mathbf{p}_2|)^2 - (m_1 m_2)^2$$

であり, 辺々引くと

$$\begin{aligned} (E_1 E_2 v_{12})^2 - \{(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2)^2\} &= - (E_1^2 - |\mathbf{p}_1|^2)(E_2^2 - |\mathbf{p}_2|^2) + (m_1 m_2)^2 \\ &= - (m_1 m_2)^2 + (m_1 m_2)^2 = 0, \\ \therefore v_{12} &= \frac{\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2)^2}}{E_1 E_2} = v_{\text{rel}} \end{aligned}$$

となるので示された.

■ 断面積の不変性 “相対速度”  $v_{\text{rel}}$  の定義式 (189) が式 (190) で定義される断面積  $\sigma$  の不変性を保証していることを確かめる. 単位時間に散乱される粒子数が式 (190):

$$N = V \rho_1 \rho_2 v_{\text{rel}} \sigma$$

で与えられることは, 時間  $T$  の内に散乱される粒子数が

$$\nu = VT \rho_1 \rho_2 v_{\text{rel}} \sigma \tag{193}$$

であることを意味する. まず上式 (193) 右辺における  $\rho_1 \rho_2 v_{\text{rel}}$  の変換則を考えよう. そこで式 (189) を

$$E_1 E_2 v_{\text{rel}} = \sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2)^2}$$

と書き換えると, この右辺は, 従って左辺はスカラーである. ここで  $E_1, E_2$  および  $\rho_1, \rho_2$  はそれぞれ 4 元運動量, 4 元粒子数流速の時間成分を成すため, これらはいずれも反変ベクトル成分として変換する. よって  $\nu$

の式 (193) における  $\rho_1\rho_2v_{\text{rel}}$  もスカラーとなる。さらに時空の与えられた領域の体積  $VT$  は Lorentz 不変量であり\*<sup>34</sup>，その中で起こる散乱の回数  $\nu$  もまた座標系に依らないから断面積  $\sigma$  はスカラー，すなわち相対論的不変量でなければならない [10, pp.129–130] [4, pp.38–40]。

もし相対速度を粒子 2 の静止系における粒子 1 の速度  $v_r$  として定義するならば， $v_r$  は定義によって不変量となる。この  $v_r$  を用いる場合，任意の座標系で散乱される粒子数を

$$\nu = VT\rho_1\rho_2v_r\sigma\frac{p_1\cdot p_2}{E_1E_2}$$

と書いてこの式で断面積  $\sigma$  を定義すれば， $\sigma$  は不変量であることが保証される [4, pp.38–40]。

■断面積の表式 重心系での断面積の表式 (192) は次のように確かめられる (pp.148–151)。与えられた素粒子の反応に関する S 行列要素

$$S_{fi} = \delta_{fi} + (2\pi)^4\delta^4(\Delta p)\prod_i\left(\frac{1}{2VE_i}\right)^{1/2}\prod_f\left(\frac{1}{2VE_f'}\right)^{1/2}\prod_l(2m_l)^{1/2}\mathcal{M}$$

に対する遷移率  $w = |S_{fi}|^2/T$  (ただし  $T(\rightarrow\infty)$  は反応時間) を考えよう。デルタ関数の 2 乗については，反応時間  $T$  と空間の体積  $V$  を十分大きい有限の値にとると

$$\begin{aligned}(2\pi)^4\delta^4(\Delta p) &= \int d^4xe^{ix\cdot\Delta p} \simeq \int_{-T/2}^{T/2} dt \int_V d^3xe^{ix\cdot\Delta p} \equiv \delta_{TV}(\Delta p), \\ [\delta_{TV}(\Delta p)]^2 &\simeq \left(\int_{-T/2}^{T/2} dt \int_V d^3xe^{ix\cdot\Delta p}\right) \times \{(2\pi)^4\delta^4(\Delta p)\} = TV(2\pi)^4\delta^4(\Delta p) \\ &\quad (\text{最後の等号では}\delta^4(\Delta p)\text{があるから } e^{ix\cdot\Delta p}\text{を}\Delta p=0\text{として評価した})\end{aligned}$$

とできるから (1.3 節のノートも参照)，単位時間あたりの遷移確率すなわち遷移率は

$$w = \frac{|S_{fi}|^2}{T} \simeq V(2\pi)^4\delta^4(\Delta p)\left(\prod_i\frac{1}{2VE_i}\right)\left(\prod_f\frac{1}{2VE_f'}\right)\left(\prod_l(2m_l)\right)|\mathcal{M}|^2$$

と書ける ( $T\rightarrow\infty$  のとき， $S_{fi}$  における  $\delta_{fi}$  の項からの寄与はゼロになる)。

ここで終状態が 2 個の粒子から成る反応を考え，終状態の粒子を改めて 1,2 と呼ぶことにする。1 つの粒子に関するミクロな状態 1 つが位相空間に占める体積は  $h^3 = (2\pi\hbar)^3 = (2\pi)^3$  だから (自然単位系で  $\hbar=1$ ) [2, pp.137–139]，終状態に粒子 1,2 が (空間の体積  $V$  の中に) 運動量  $d^3p_1', d^3p_2'$  の範囲内に見いだされるようなミクロな状態の数は

$$dW = \frac{Vd^3p_1'}{(2\pi)^3} \cdot \frac{Vd^3p_2'}{(2\pi)^3}$$

\*<sup>34</sup> 体積の変換に関わる Jacobian は，異なる Lorentz 系の間では  $\sqrt{-g}=1$  である。

である。よって

$$\begin{aligned} d\sigma' &\equiv \frac{wdW}{v_{\text{rel}}/V} \\ &= \frac{V}{v_{\text{rel}}} \times V(2\pi)^4 \delta^4(\Delta p) \left( \prod_i \frac{1}{2VE_i} \right) \left( \prod_f \frac{1}{2VE_f'} \right) \left( \prod_l (2m_l) \right) |\mathcal{M}|^2 \times \frac{V d^3 p_1'}{(2\pi)^3} \frac{V d^3 p_2'}{(2\pi)^3} \\ &= (2\pi)^4 \delta^4(\Delta p) \frac{1}{4E_{\mathbf{p}_1} E_{\mathbf{p}_2} v_{\text{rel}}} \left( \prod_l (2m_l) \right) \left( \prod_f \frac{d^3 p_f'}{(2\pi)^3 2E_f'} \right) |\mathcal{M}|^2 \times 4 \times \frac{1}{2^4} \times 2^2 \end{aligned}$$

を得る。ここに

$$\prod_f \frac{d^3 p_f'}{(2\pi)^3 2E_f'} \equiv \frac{d^3 p_1'}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}_1'}} \cdot \frac{d^3 p_2'}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}_2'}}$$

である。

この  $d\sigma'$  の表式が Lorentz 不変量であることを確かめておこう。まず  $\delta(\Delta p)$  がゼロにならない条件  $\Delta p = 0$  はベクトルの関係式なので Lorentz 変換に対して共変的である。次に 4 元ベクトル  $p = (p^0, \mathbf{p})$  に対して

$$p^2 - m^2 = (p^0)^2 - (\mathbf{p}^2 + m^2) = (p^0 - E_{\mathbf{p}})(p^0 + E_{\mathbf{p}}), \quad E_{\mathbf{p}} \equiv \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$$

に注意すると、 $\prod_f \frac{d^3 p_f'}{(2\pi)^3 2E_f'}$  について、

$$\int d^4 p \delta(p^2 - m^2) \theta(p^0) = \frac{d^3 p}{2E_{\mathbf{p}}}$$

となる ( $p^0$  についての積分だけ実行した)。左辺は  $\delta(p^2 - m^2)$  がゼロにならない条件  $p^2 - m^2 = 0$  がスカラーの関係式なので、 $p^0$  の符号を変えない変換を考えるとこれは不変量である<sup>\*35</sup>。さらに上記のように  $E_{\mathbf{p}_1} E_{\mathbf{p}_2} v_{\text{rel}}$  は不変量である。以上より  $d\sigma'$  の表式は Lorentz スカラー、すなわち相対論的不変である。

さて、微分断面積  $d\sigma = \int_{\mathbf{p}_2', |\mathbf{p}_1'|} d\sigma'$  を求めよう。上で得た  $d\sigma'$  を

$$\begin{aligned} d\sigma' &= f(p_1', p_2') \delta^4(\Delta p) d^3 p_1' d^3 p_2' = f(p_1', p_2') \delta(\Delta \mathbf{p}) \delta(\Delta E) d^3 p_1' d^3 p_2', \\ f(p_1', p_2') &\equiv \frac{1}{64\pi^2 v_{\text{rel}} E_{\mathbf{p}_1} E_{\mathbf{p}_2} E_{\mathbf{p}_1'} E_{\mathbf{p}_2'}} \left( \prod_l (2m_l) \right) |\mathcal{M}|^2, \\ \Delta \mathbf{p} &\equiv \mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2' - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2, \\ \Delta E &\equiv E_{\mathbf{p}_1'} + E_{\mathbf{p}_2'} - E_{\mathbf{p}_1} - E_{\mathbf{p}_2} \end{aligned}$$

と書いておき、まずこれを  $\mathbf{p}_2'$  について積分すると

$$f(p_1', p_2')|_{\mathbf{p}_2' = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1'} \delta(\Delta E) d^3 p_1'$$

となる。さらに  $\mathbf{p}_1'$  を極座標で表し、運動量空間の体積要素  $d^3 p_1'$  を各極座標が無窮小変化して得られる領域

<sup>\*35</sup> これは  $d^3 p/E_{\mathbf{p}}$  が不変量であることの手堅い証明である。より直観的な説明はランダウ＝リフシッツ『場の古典論』§ 10 に見られる [4, p.33]。

の体積  $|\mathbf{p}_1'|^2 d|\mathbf{p}_1'| d\Omega_1'$  にとり, これを  $|\mathbf{p}_1'|$  について積分すると

$$\begin{aligned} d\sigma &= d\Omega_1' \int_0^\infty f(p_1', p_2')|_{\mathbf{p}_2'=\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_1'} |\mathbf{p}_1'|^2 \delta(\Delta E) d|\mathbf{p}_1'| \\ &= d\Omega_1' \int_0^\infty f(p_1', p_2')|_{\mathbf{p}_2'=\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_1'} |\mathbf{p}_1'|^2 \delta(\Delta E) \left( \frac{\partial |\mathbf{p}_1'|}{\partial(\Delta E)} \right)_{|\mathbf{p}_2'|} d(\Delta E) \\ &= d\Omega_1' \left[ f(p_1', p_2')|_{\mathbf{p}_2'=\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_1'} |\mathbf{p}_1'|^2 \left\{ \left( \frac{\partial(\Delta E)}{\partial |\mathbf{p}_1'|} \right)_{|\mathbf{p}_2'|} \right\}^{-1} \right] \Big|_{\Delta E=0} \end{aligned}$$

を得る. ここで始状態の粒子の運動量  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$  は与えられており,  $\Delta E$  は  $|\mathbf{p}_1'|$  と  $|\mathbf{p}_2'|$  の関数であることに注意した.

以下, 重心系 (CoM) を用いると  $\mathbf{p}_1' = -\mathbf{p}_2'$  より

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial(\Delta E)}{\partial |\mathbf{p}_1'|} \right)_{|\mathbf{p}_2'|} &= \left( \frac{\partial}{\partial |\mathbf{p}_1'|} (E_{\mathbf{p}_1'} + E_{\mathbf{p}_2'}) \right)_{|\mathbf{p}_2'|} = \frac{\partial}{\partial |\mathbf{p}_1'|} \left( \sqrt{m_1'^2 + |\mathbf{p}_1'|^2} + \sqrt{m_2'^2 + |\mathbf{p}_2'|^2} \right) \\ &= \frac{|\mathbf{p}_1'|}{E_{\mathbf{p}_1'}} + \frac{|\mathbf{p}_2'|}{E_{\mathbf{p}_2'}} = |\mathbf{p}_1'| \frac{E_{\mathbf{p}_1'} + E_{\mathbf{p}_2'}}{E_{\mathbf{p}_1'} E_{\mathbf{p}_2'}} \end{aligned}$$

となるので,

$$\begin{aligned} d\sigma &= d\Omega_1' f(p_1', p_2')|_{\mathbf{p}_2'=\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_1'} |\mathbf{p}_1'|^2 \frac{E_{\mathbf{p}_1'} E_{\mathbf{p}_2'}}{|\mathbf{p}_1'| (E_{\mathbf{p}_1'} + E_{\mathbf{p}_2'})} \\ &= d\Omega_1' \frac{1}{64\pi^2 v_{\text{rel}} E_{\mathbf{p}_1} E_{\mathbf{p}_2} \overline{E_{\mathbf{p}_1'} E_{\mathbf{p}_2'}}} \left( \prod_l (2m_l) \right) |\mathcal{M}|^2 |\mathbf{p}_1'| \frac{E_{\mathbf{p}_1'} E_{\mathbf{p}_2'}}{E_{\mathbf{p}_1} + E_{\mathbf{p}_2}} \\ &= d\Omega_1' \frac{1}{64\pi^2 |\mathbf{p}_1| (E_{\mathbf{p}_1} + E_{\mathbf{p}_2}) \overline{E_{\mathbf{p}_1'} E_{\mathbf{p}_2'}}} \left( \prod_l (2m_l) \right) |\mathcal{M}|^2 \frac{|\mathbf{p}_1'|}{E_{\mathbf{p}_1} + E_{\mathbf{p}_2}} \\ &\quad \left( \text{“相対速度” } v_{\text{rel}} \text{ は重心系で } v_{\text{rel}} = |\mathbf{v}_1| + |\mathbf{v}_2| = \frac{|\mathbf{p}_1|}{E_{\mathbf{p}_1}} + \frac{|\mathbf{p}_2|}{E_{\mathbf{p}_2}} = |\mathbf{p}_1| \left( \frac{1}{E_{\mathbf{p}_1}} + \frac{1}{E_{\mathbf{p}_2}} \right) = |\mathbf{p}_1| \frac{E_{\mathbf{p}_1} + E_{\mathbf{p}_2}}{E_{\mathbf{p}_1} E_{\mathbf{p}_2}} \right) \\ &= d\Omega_1' \frac{1}{64\pi^2 (E_{\mathbf{p}_1} + E_{\mathbf{p}_2})^2} \frac{|\mathbf{p}_1'|}{|\mathbf{p}_1|} \left( \prod_l (2m_l) \right) |\mathcal{M}|^2 \quad (\text{CoM}) \end{aligned}$$

を得る. ここで  $d\Omega_1'$  を散乱中心から見た検出器の立体角  $d\Omega$  に選んだものが断面積の表式 (192) に他ならない.

## 8.2 スピン状態の和

はじめに第 1 段落を引用する.

前節では, 始状態と終状態における各粒子の状態が, レプトンや光子の偏極状態までを含めて完全に指定されている反応を扱った. しかし多くの実験において, 衝突させる粒子は非偏極であり, 終状態における各粒子の偏極は測定されない. 式 (8.8)  $[d\sigma \sim |\mathcal{M}|^2]$  から, このような実験の結果に対応する断面積を得るためには,  $|\mathcal{M}|^2$  について, 始状態の各偏極状態に関する“平均”を取り, 終状態のあらゆる偏極状態に関して“和”を取らなければならない. 本節では始状態のスピン平均と終状態のスピン和を計算する方法を示す. 非偏極の断面積は, 常に  $\gamma$  行列を含む行列積の対角和 (トレース) によって表現されることになる.

簡単な例でこのことを示してみる。始・終状態の電子のスピン状態  $r, s$  を指定した反応の Feynman 振幅は

$$\mathcal{M} = \bar{u}_s(\mathbf{p}')\Gamma u_r(\mathbf{p})$$

という形をとり ( $\Gamma$  は  $4 \times 4$  の行列), 断面積は  $|\mathcal{M}|^2$  に比例する [比例係数は  $r, s$  によらない]. 非偏極ビームの断面積は,

- 始状態スピン  $r = 1, 2$  についての平均 ( $\frac{1}{2} \sum_r$ ) と,
- 終状態スピンについての和 ( $\sum_s$ )

を施す, すなわち

$$|\mathcal{M}|^2 \rightarrow X \equiv \frac{1}{2} \sum_r \sum_s |\mathcal{M}|^2$$

と置き換えて得られる. この  $X$  は  $\gamma$  行列を含む行列積の対角和の形

$$X = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ \frac{\not{p}' + m}{2m} \Gamma \frac{\not{p} + m}{2m} \tilde{\Gamma} \right] \quad (194)$$

に書き換えることができる ( $\tilde{\Gamma} \equiv \gamma^0 \Gamma^\dagger \gamma^0$ , 導出は下記). このような対角和を計算するための公式は, 教科書の付録 A.2, A.3 にまとまっている.

始・終状態における各粒子のスピン状態を特定して  $|\mathcal{M}|^2$  を評価するには, ヘリシティ射影演算子  $\Pi^\pm(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}(1 \pm \sigma_{\mathbf{p}})$  を導入する方法によるのが便利である. 例えば入射電子が正のヘリシティを持ち, 出射電子が負のヘリシティを持つヘリシティ反転過程の断面積は,

$$X = |\bar{u}_2(\mathbf{p}')\Gamma u_1(\mathbf{p})|^2 = (\bar{u}_2(\mathbf{p}')\Gamma u_1(\mathbf{p}))(\bar{u}_1(\mathbf{p})\tilde{\Gamma}u_2(\mathbf{p}')) \quad (8.28)$$

という量に比例する. これはヘリシティ射影演算子を用いて

$$\begin{aligned} X &= (\bar{u}_2(\mathbf{p}')\Gamma\Pi^+(\mathbf{p})u_1(\mathbf{p}))(\bar{u}_1(\mathbf{p})\tilde{\Gamma}\Pi^-(\mathbf{p}')u_2(\mathbf{p}')) \\ &= \sum_r \sum_s (\bar{u}_s(\mathbf{p}')\Gamma\Pi^+(\mathbf{p})u_r(\mathbf{p}))(\bar{u}_r(\mathbf{p})\tilde{\Gamma}\Pi^-(\mathbf{p}')u_s(\mathbf{p}')) \\ &= \text{Tr}[\Lambda^+(\mathbf{p}')\Gamma\Pi^+(\mathbf{p})\Lambda^+(\mathbf{p})\tilde{\Gamma}\Pi^-(\mathbf{p}')] \end{aligned} \quad (8.29)$$

と書き換えられる [本稿次節で補足]. これは再び対角和の計算となっており, 非偏極の量 (194) と比べて  $\Gamma \rightarrow \Gamma\Pi^+(\mathbf{p})$ ,  $\tilde{\Gamma} \rightarrow \tilde{\Gamma}\Pi^-(\mathbf{p}')$  と置き換わっている.

## 8.2 節, 式の導出など

### ■ $X$ の式 (194) の導出

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2} \sum_r \sum_s (\bar{u}_s(\mathbf{p}')\Gamma u_r(\mathbf{p}))(\bar{u}_r(\mathbf{p})\tilde{\Gamma}u_s(\mathbf{p}')) \quad (195) \\ &= \frac{1}{2} \sum_r \sum_s (\bar{u}_{s\alpha}(\mathbf{p}')\Gamma_{\alpha\beta}u_{r\beta}(\mathbf{p}))(\bar{u}_{r\gamma}(\mathbf{p})\tilde{\Gamma}_{\gamma\delta}u_{s\delta}(\mathbf{p}')) \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_s u_{s\delta}(\mathbf{p}')\bar{u}_{s\alpha}(\mathbf{p}') \right) \Gamma_{\alpha\beta} \left( \sum_r u_{r\beta}(\mathbf{p})\bar{u}_{r\gamma}(\mathbf{p}) \right) \tilde{\Gamma}_{\gamma\delta} \end{aligned}$$

であり [式 (195) については本稿次節で補足], 最右辺における正エネルギー状態に関する和はエネルギー射影演算子

$$\Lambda_{\alpha\beta}^+(\mathbf{p}) = \left( \frac{\not{p} + m}{2m} \right)_{\alpha\beta} = \sum_{r=1}^2 u_{r\alpha}(\mathbf{p}) \bar{u}_{r\beta}(\mathbf{p})$$

に置き換えて評価することができる (教科書の付録 A.5). すると

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2} \Lambda_{\delta\alpha}^+(\mathbf{p}') \Gamma_{\alpha\beta} \Lambda_{\beta\gamma}^+(\mathbf{p}) \tilde{\Gamma}_{\gamma\delta} \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr}[\Lambda^+(\mathbf{p}') \Gamma \Lambda^+(\mathbf{p}) \tilde{\Gamma}] \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ \frac{\not{p}' + m}{2m} \Gamma \frac{\not{p} + m}{2m} \tilde{\Gamma} \right] : (194) \end{aligned}$$

が得られる.

## 8.2 について

■式 (195) における  $\mathcal{M}^*$  の表式について  $\mathcal{M} = \bar{u}_s \Gamma u_r$  は  $1 \times 1$  構造を持つので, その複素共役をとることは行列として Hermite 共役をとることと変わらない. よって

$$\mathcal{M}^* = (\bar{u}_s \Gamma u_r)^\dagger = (u_s^\dagger \gamma^0 \Gamma u_r)^\dagger = u_r^\dagger \Gamma^\dagger \gamma^0 u_s = u_r^\dagger (\gamma^0 \gamma^0) \Gamma^\dagger \gamma^0 u_s = \bar{u}_r \tilde{\Gamma} u_s, \quad \tilde{\Gamma} \equiv \gamma^0 \Gamma^\dagger \gamma^0$$

とできる. 後の式 (8.40) についても同様である.

■「正エネルギー状態に関する和」(式 (8.24a)1 行下) について 式 (8.24a) の最右辺を指している.  $u_r(\mathbf{p})$  は正エネルギー状態に対応する (p.70 下から 4-2 行目, p.253 下から 6 行目).

■式 (8.27) の確認

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2} \sum_{r,s} (\bar{u}_{s\alpha} \Gamma_{\alpha\beta} v_{r\beta}) (\bar{v}_{r\gamma} \tilde{\Gamma}_{\gamma\delta} u_{s\delta}) \quad (\text{式 (8.23) で } u_r, \bar{u}_r \rightarrow v_r, \bar{v}_r \text{ と置き換えたもの}) \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_s u_{s\delta} \bar{u}_{s\alpha} \right) \Gamma_{\alpha\beta} \left( \sum_r v_{r\beta} \bar{v}_{r\gamma} \right) \tilde{\Gamma}_{\gamma\delta} \\ &= \frac{1}{2} \Lambda_{\delta\alpha}^+(\mathbf{p}') \Gamma_{\alpha\beta} (-\Lambda_{\beta\gamma}^-(\mathbf{p})) \tilde{\Gamma}_{\gamma\delta}. \end{aligned}$$

■式 (8.29) について 式 (8.29)1 行目は式 (8.28) 最右辺に  $u_1 = \Pi^+ u_1, u_2 = \Pi^- u_2$  ( $\cdot$ : 式 (A.40)) を代入したものである. 式 (8.29)2 行目において,  $r = 2$  の項は  $\Pi^+ u_r = 0$  ( $\cdot$ : 式 (A.40)) により,  $r = 1$  の項は  $\Pi^- u_s = 0$  ( $\cdot$ : 式 (A.40)) により消え,  $r = 1, s = 2$  の項が残るので 1 行目に戻ることができる.

## 8.3 光子の偏極状態の和

以下は第 1 段落からの抜粋である.

我々は 1.4.4 項で Thomson 散乱について, まず光子の偏極状態が完全に指定された断面積 (1.69) を求め, それから具体的に終状態の偏極に関する和と始状態に関する偏極の平均の計算を施して結果 (1.71) を得ている. この方法の代わりに, 非偏極断面積を直接に得るための共変な方法もある. この形式は理論のゲージ不変性に依存しているが, これを詳しく見てみることにしよう.

行列要素 (あるいは Feynman 振幅) に対する個別の Feynman ダイアグラムからの寄与は一般にゲージ不変ではないけれど, それらの和はゲージ不変でなければならない. 光子の外線を含む過程の Feynman 振幅は

$$\mathcal{M} = \varepsilon_{r_1}^\alpha(\mathbf{k}_1)\varepsilon_{r_2}^\beta(\mathbf{k}_2)\cdots\mathcal{M}_{\alpha\beta\cdots}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \cdots) \quad (196)$$

という形をとる. そこでこれが Lorenz ゲージの中でのゲージ変換に対して不変となることを要求すると,

$$k_1^\alpha\mathcal{M}_{\alpha\beta\cdots}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \cdots) = k_2^\beta\mathcal{M}_{\alpha\beta\cdots}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \cdots) = \cdots = 0 \quad (197)$$

という条件が導かれる (導出は下記). これを用いて光子偏極状態の和を計算することができる.

簡単な例として, 光子の外線が 1 本だけ含まれる過程の Feynman 振幅

$$\mathcal{M}_r(\mathbf{k}) = \varepsilon_r^\alpha(\mathbf{k})\mathcal{M}_\alpha(\mathbf{k})$$

を考える. 上式 (197) はこの場合  $k^\alpha\mathcal{M}_\alpha(\mathbf{k}) = 0$  を意味し, ここから偏極についての和を

$$\sum_{r=1}^2 |\mathcal{M}_r(\mathbf{k})|^2 = -\mathcal{M}^\alpha(\mathbf{k})\mathcal{M}_\alpha^*(\mathbf{k}) \quad (198)$$

と計算できることが導かれる (導出は下記).

### 8.3 節, 式の導出など

■式 (197) の導出 自由な光子を表す平面波  $A^\mu(x) = C\varepsilon_r^\mu(\mathbf{k})e^{\pm ik\cdot x}$  ( $C$  は定数) に対して, Lorenz ゲージ間のゲージ変換

$$A^\mu(x) \rightarrow A^\mu(x) + \partial^\mu f(x), \quad f(x) = \tilde{f}(k)e^{\pm ik\cdot x}$$

は偏極ベクトルの変換

$$\varepsilon_r^\mu(\mathbf{k}) \rightarrow \varepsilon_r^\mu(\mathbf{k}) \pm \frac{1}{C}ik^\mu\tilde{f}(k) \quad (199)$$

を意味する. [上式 (199) では教科書の式 (8.31) に  $1/C$  の因子を補って訂正した. この点を含め, 本稿次節の補足を併せて参照.] これに対して Feynman 振幅 (196) が不変に留まることを要求して, 式 (197) の条件を得る.

■式 (198) の導出 Feynman 振幅  $\mathcal{M}_r(\mathbf{k}) = \varepsilon_r^\alpha(\mathbf{k})\mathcal{M}_\alpha(\mathbf{k})$  を持つ過程の非偏極断面積は

$$\sum_{r=1}^2 |\mathcal{M}_r(\mathbf{k})|^2 = \mathcal{M}_\alpha(\mathbf{k})\mathcal{M}_\beta^*(\mathbf{k}) \sum_{r=1}^2 \varepsilon_r^\alpha(\mathbf{k})\varepsilon_r^\beta(\mathbf{k})$$

に比例する. ここで実光子 ( $k^2 = 0$ ) [外線光子はこの条件を満たす] に対しては, 式 (5.21),(5.39),(5.40) より

$$\sum_{r=1}^2 \varepsilon_r^\alpha(\mathbf{k})\varepsilon_r^\beta(\mathbf{k}) = -g^{\alpha\beta} - \frac{1}{(k\cdot n)^2}[k^\alpha k^\beta - (k\cdot n)(k^\alpha n^\beta + k^\beta n^\alpha)] \quad (200)$$

となる [本稿次節で補足]. これを上式に代入しゲージ不変性の条件  $k^\alpha\mathcal{M}_\alpha(\mathbf{k}) = 0$  を用いると, 式 (198):

$$\sum_{r=1}^2 |\mathcal{M}_r(\mathbf{k})|^2 = -\mathcal{M}^\alpha(\mathbf{k})\mathcal{M}_\alpha^*(\mathbf{k})$$

を得る.

### 8.3 について

■p.155, 1.9 のゲージ関数  $f(x) = \tilde{f}(k)e^{\pm ik \cdot x}$  について ゲージ変換後の場  $A^\mu$  もまた Lorenz 条件を満たすには、ゲージ関数  $f(x)$  は式 (5.15):  $\square f = 0$  を満たさなければならない。  $f(x) = \tilde{f}(k)e^{\pm ik \cdot x}$  はそのような関数の Fourier 成分となっている。

$$k^2 = 0, \quad \therefore \square f = (\pm ik)^2 f = 0.$$

■偏極ベクトルの変換 (199) について ゲージ関数  $f(x) = \tilde{f}(k)e^{\pm ik \cdot x}$  に対して  $\partial^\mu f = \pm ik^\mu \tilde{f}(k)e^{\pm ik \cdot x}$  なの  
で、平面波  $A^\mu(x) = C\varepsilon_r^\mu(\mathbf{k})e^{\pm ik \cdot x}$  のゲージ変換  $A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu f(x)$  は

$$A'^\mu = C \left[ \varepsilon_r^\mu(\mathbf{k}) \pm \frac{1}{C} ik^\mu \tilde{f}(k) \right] e^{\pm ik \cdot x} \equiv C \varepsilon_r'^\mu(\mathbf{k}) e^{\pm ik \cdot x},$$

$$\varepsilon_r'^\mu(\mathbf{k}) = \varepsilon_r^\mu(\mathbf{k}) \pm \frac{1}{C} ik^\mu \tilde{f}(k)$$

となると考えられる。(最後の  $1/C$  の因子の有無は結果 (197) に影響を与えず、また  $1/C$  をゲージ関数  $f$  に吸収させて  $f$  を再定義すれば、教科書の式 (8.31) のように  $1/C$  はあらわには現れない。)

■式 (200) について 「(式 (5.39))=(式 (5.40))」 から両辺の共通因子  $1/(k^2 + i\varepsilon)$  を省き、  $k^2 = 0$  を代入すると

$$-g^{\mu\nu} = \sum_{r=1}^2 \varepsilon_r^\mu(\mathbf{k}) \varepsilon_r^\nu(\mathbf{k}) + \frac{[k^\mu - (k \cdot n)n^\mu][k^\nu - (k \cdot n)n^\nu]}{(k \cdot n)^2} - n^\mu n^\nu$$

となることによる。

■「これを複数の外線光子のある過程へと拡張することも容易である」 (p.156, 1.4.5) について 光子の外線が  $N$  本あり、そのうち  $n$  本が始状態に属すならば、  $|\mathcal{M}|^2$  を始状態の偏極について平均し、終状態の偏極について和をとった値は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2^n} \sum_{r_1, \dots, r_N} |\varepsilon_{r_1}^{\alpha_1} \cdots \varepsilon_{r_N}^{\alpha_N} \mathcal{M}_{\alpha_1 \cdots \alpha_N}|^2 \\ &= \frac{1}{2^n} \mathcal{M}_{\alpha_1 \cdots \alpha_N} \mathcal{M}_{\beta_1 \cdots \beta_N}^* \left( \sum_{r_1} \varepsilon_{r_1}^{\alpha_1} \varepsilon_{r_1}^{\beta_1} \right) \cdots \left( \sum_{r_N} \varepsilon_{r_N}^{\alpha_N} \varepsilon_{r_N}^{\beta_N} \right) \\ &= \frac{1}{2^n} \mathcal{M}_{\alpha_1 \cdots \alpha_N} \mathcal{M}_{\beta_1 \cdots \beta_N}^* (-g^{\alpha_1 \beta_1}) \cdots (-g^{\alpha_N \beta_N}) \quad (\because \text{式 (8.32), 式 (8.35)}) \\ &= \frac{(-1)^N}{2^n} \mathcal{M}^{\alpha_1 \cdots \alpha_N} \mathcal{M}_{\alpha_1 \cdots \alpha_N}^* \end{aligned}$$

となると考えられる。教科書で省略した因子  $1/2^n$  を除けば、これは  $N = 1$  のとき期待されるように式 (198) に一致する。

### 8.4 $e^+e^-$ 衝突によるレプトン対の生成

断面積の表式 (192) の中で始・終状態の粒子のスピンに依存するのは Feynman 振幅 (182):

$$\mathcal{M} = -ie^2 \bar{u}_{(\mu)s_2}(\mathbf{p}_2') \gamma^\alpha v_{(\mu)s_1}(\mathbf{p}_1') D_{F\alpha\beta}(p_1 + p_2) \bar{v}_{(e)r_1}(\mathbf{p}_1) \gamma^\beta u_{(e)r_2}(\mathbf{p}_2)$$

である。ここでレプトンのスピンと光子の偏極をまとめて偏極と呼ぶと、一般に実験では始状態の粒子は非偏極であり、また終状態の粒子の偏極は測定されない。よって実験に対応する(微分)断面積を得るには、偏極を指定した(微分)断面積において

- 始状態の粒子の偏極  $r_1, r_2$  について平均をとり ( $\frac{1}{2} \sum_{r_1} \frac{1}{2} \sum_{r_2}$  を作用させ),
- 終状態の粒子の偏極  $s_1, s_2$  について和をとった ( $\sum_{s_1} \sum_{s_2}$  を作用させた),

非偏極の(微分)断面積を計算する必要がある。

重心系での粒子のエネルギー・運動量は図 31 のように表記できる。

図 31 の記号を用い、始状態の粒子のエネルギー  $E$  が十分大きく終状態の粒子  $\mu^\pm$  を生成できる条件  $E \geq m_\mu \gg m_e$  を用いると、2次の摂動論での非偏極の微分断面積の表式

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{CoM}} = \frac{\alpha^2}{16E^4} \left(\frac{p'}{E}\right) (E^2 + m_\mu^2 + p'^2 \cos^2 \theta) \quad (201)$$

を得る。ここで  $p'$  は  $|\mathbf{p}'|$  の意味であり、4元運動量ではない。2次の摂動論での確率振幅  $S_{fi}$  の式(181)は  $e$  の2次の量であり、その絶対値の2乗が確率を与えることに対応して、これは微細構造定数  $\alpha \equiv e^2/4\pi$  の2次の量である。ここから全断面積  $\sigma_{\text{tot}}$  は

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{\pi\alpha^2}{4E^4} \left(\frac{p'}{E}\right) (E^2 + m_\mu^2 + \frac{1}{3}p'^2), \quad \therefore E^2\sigma_{\text{tot}} = \frac{\pi\alpha^2}{6} \frac{\sqrt{E^2 - m_\mu^2}}{E^3} (2E^2 + m_\mu^2) \quad (202)$$

となる。これは  $E \gg m_\mu$  の相対論的極限で

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{\pi\alpha^2}{3E^2} \quad (203)$$

となる(pp.156-160)。

全断面積  $\sigma_{\text{tot}}$  と重心系での全エネルギー  $2E$  の関係を図示しよう。断面積とエネルギーをそれぞれ

$$\sigma'_{\text{tot}} \equiv \frac{m_\mu^2 \sigma_{\text{tot}}}{\pi\alpha^2/6}, \quad \varepsilon \equiv \frac{E}{m_\mu}$$

と無次元化すると、全断面積  $\sigma_{\text{tot}}$  の式(202)は

$$\varepsilon^2 \sigma'_{\text{tot}} = \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{\varepsilon^3} (2\varepsilon^2 + 1)$$

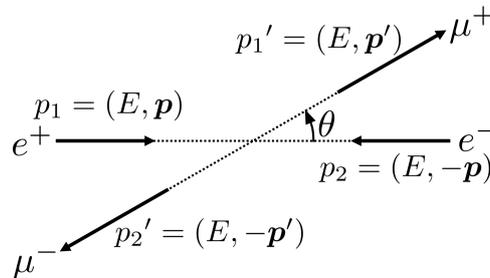


図 31 重心系で見た反応  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  における粒子の4元運動量

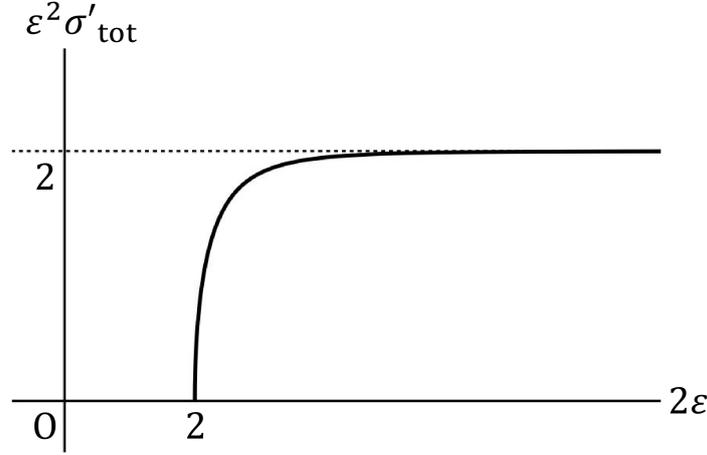


図 32 重心系における反応  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  の全断面積  $\sigma_{\text{tot}}$  と全エネルギー  $2E$  の関係

となる。これをグラフに描くと図 32 のようになる。

#### 8.4 節, 式の導出

反応  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  における断面積の式 (201),(202),(203) は次のように導かれる (pp.156-160)。

$$D_F^{\alpha\beta}(p_1 + p_2) = \frac{-g^{\alpha\beta}}{(p_1 + p_2)^2 + i\varepsilon} : (5.39)$$

の分母について, 衝突のためには  $\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 \leq 0$  が必要であり, このとき

$$(p_1 + p_2)^2 = 2m_e^2 + 2p_1 \cdot p_2 = 2m_e^2 + 2(E_1E_2 - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2) \geq 2m_e^2 + 2E_1E_2 \geq 4m_e^2$$

なので  $(p_1 + p_2)^2$  はゼロにならない。そこで  $i\varepsilon$  を省いて

$$D_F^{\alpha\beta}(p_1 + p_2) = \frac{-g^{\alpha\beta}}{(p_1 + p_2)^2}$$

とすると

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= -ie^2 \bar{u}_{(\mu)s_2}(\mathbf{p}_2') \gamma^\alpha v_{(\mu)s_1}(\mathbf{p}_1') D_{F\alpha\beta}(p_1 + p_2) \bar{v}_{(e)r_1}(\mathbf{p}_1) \gamma^\beta u_{(e)r_2}(\mathbf{p}_2) \\ &= ie^2 [\bar{u}_{s_2}(\mathbf{p}_2') \gamma_\alpha v_{s_1}(\mathbf{p}_1')]_{(\mu)} \frac{1}{(p_1 + p_2)^2} [\bar{v}_{r_1}(\mathbf{p}_1) \gamma^\alpha u_{r_2}(\mathbf{p}_2)]_{(e)} \end{aligned}$$

と書き換えられる。

非偏極断面積の計算に必要な量  $X \equiv \frac{1}{4} \sum_{r_1, r_2, s_1, s_2} |\mathcal{M}|^2$  を考える。これを求めるには Feynman 振幅  $\mathcal{M}$  の複素共役  $\mathcal{M}^*$  を計算する必要がある。  $\mathcal{M}$  の複素共役をとるにあたり, まず上記の Feynman 振幅  $\mathcal{M}$  の式においてダミー添字を  $\alpha \rightarrow \beta$  と置き換える。次いで Feynman 振幅  $\mathcal{M}$  の式において, 例えば  $[\bar{u}_{s_2}(\mathbf{p}_2') \gamma_\beta v_{s_1}(\mathbf{p}_1')]_{(\mu)}$  に注目する。そしてスピノルの引数とレプトンの指標 ( $\mu$ ) を省いてこれを  $\bar{u}_{s_2} \gamma_\beta v_{s_1}$  と書き, その複素共役をとると

$$(\bar{u}_{s_2} \gamma_\beta v_{s_1})^* = (\bar{u}_{s_2} \gamma_\beta v_{s_1})^\dagger = v_{s_1}^\dagger \gamma_\beta^\dagger (\gamma^0 u_{s_2}) = \bar{v}_{s_1} \gamma_\beta u_{s_2}$$

となること等に注意する．ここで第1の等号では  $\bar{u}_{s_2} \gamma_\beta v_{s_1}$  が  $1 \times 1$  の行列なのでその複素共役は共役転置行列と等しいことを，第2，第3の等号では式(83):  $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$  を用いた．すると

$$\mathcal{M}^* = -ie^2 [\bar{v}_{s_1}(\mathbf{p}_1') \gamma_\beta u_{s_2}(\mathbf{p}_2')]_{(\mu)} \frac{1}{(p_1 + p_2)^2} [\bar{u}_{r_2}(\mathbf{p}_2) \gamma^\beta v_{r_1}(\mathbf{p}_1)]_{(e)}$$

を得る．ここから得られる  $X$  を，エネルギー射影演算子

$$\Lambda^\pm_{(l)}(\mathbf{p}) \equiv \frac{\pm \not{p} + m_l}{2m_l}$$

を用いて書き換える．エネルギー射影演算子は

$$\Lambda^+_{(l)\alpha\beta}(\mathbf{p}) = \sum_r u_{(l)r\alpha}(\mathbf{p}) \bar{u}_{(l)r\beta}(\mathbf{p}), \quad \Lambda^-_{(l)\alpha\beta}(\mathbf{p}) = - \sum_r v_{(l)r\alpha}(\mathbf{p}) \bar{v}_{(l)r\beta}(\mathbf{p})$$

と表される(教科書の付録A.5とそのノートを参照)．よってスピノル添字  $\mu, \nu, \rho, \sigma, \dots, \tilde{\mu}, \tilde{\nu}, \tilde{\rho}, \tilde{\sigma}, \dots$  を明記すると

$$\begin{aligned} X &= \frac{e^4}{4[(p_1 + p_2)^2]^2} A_{(\mu)\alpha\beta} B_{(e)}^{\alpha\beta}, \\ A_{(\mu)\alpha\beta} &\equiv \sum_{s_1, s_2} [(\bar{u}_{s_2})_{\tilde{\mu}}(\gamma_\alpha)_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}(v_{s_1})_{\tilde{\nu}}]_{(\mu)} [(\bar{v}_{s_1})_\mu(\gamma_\beta)_{\mu\nu}(u_{s_2})_\nu]_{(\mu)} \\ &= \left[ \left( \sum_{s_2} (u_{s_2})_\nu (\bar{u}_{s_2})_{\tilde{\mu}} \right) (\gamma_\alpha)_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} \left( \sum_{s_1} (v_{s_1})_{\tilde{\nu}} (\bar{v}_{s_1})_\mu \right) (\gamma_\beta)_{\mu\nu} \right]_{(\mu)} \\ &= \left[ \Lambda^+_{\nu\tilde{\mu}}(\mathbf{p}_2') (\gamma_\alpha)_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} \{ -\Lambda^-_{\tilde{\nu}\mu}(\mathbf{p}_1') \} (\gamma_\beta)_{\mu\nu} \right]_{(\mu)} \\ &= \text{tr} \left[ \frac{\not{p}_2' + m_\mu}{2m_\mu} \gamma_\alpha \frac{\not{p}_1' - m_\mu}{2m_\mu} \gamma_\beta \right], \\ B_{(e)}^{\alpha\beta} &\equiv \sum_{r_1, r_2} [(\bar{v}_{r_1})_{\tilde{\rho}}(\gamma^\alpha)_{\tilde{\rho}\tilde{\sigma}}(u_{r_2})_{\tilde{\sigma}}]_{(e)} [(\bar{u}_{r_2})_\rho(\gamma^\beta)_{\rho\sigma}(v_{r_1})_\sigma]_{(e)} \\ &= \left[ \left( \sum_{r_1} (v_{r_1})_\sigma (\bar{v}_{r_1})_{\tilde{\rho}} \right) (\gamma^\alpha)_{\tilde{\rho}\tilde{\sigma}} \left( \sum_{r_2} (u_{r_2})_{\tilde{\sigma}} (\bar{u}_{r_2})_\rho \right) (\gamma^\beta)_{\rho\sigma} \right]_{(e)} \\ &= \left[ \{ -\Lambda^-_{\sigma\tilde{\rho}}(\mathbf{p}_1) \} (\gamma^\alpha)_{\tilde{\rho}\tilde{\sigma}} \Lambda^+_{\tilde{\sigma}\rho}(\mathbf{p}_2) (\gamma^\beta)_{\rho\sigma} \right]_{(e)} \\ &= \text{tr} \left[ \frac{\not{p}_1 - m_e}{2m_e} \gamma^\alpha \frac{\not{p}_2 + m_e}{2m_e} \gamma^\beta \right] \end{aligned}$$

であり，これらの  $\gamma$  行列の積のトレースを計算すると

$$\begin{aligned} A_{(\mu)\alpha\beta} &= \frac{1}{4m_\mu^2} [\text{tr}(\not{p}_2' \gamma_\alpha \not{p}_1' \gamma_\beta) - m_\mu^2 \text{tr}(\gamma_\alpha \gamma_\beta)] \\ &(\because \text{式(323), すなわち奇数個の}\gamma\text{行列の積のトレースは消えること}) \\ &= \frac{1}{4m_\mu^2} [p_2'^\gamma p_1'^\delta \times 4(g_{\gamma\alpha} g_{\delta\beta} - g_{\gamma\delta} g_{\alpha\beta} + g_{\gamma\beta} g_{\alpha\delta}) - m_\mu^2 \times 4g_{\alpha\beta}] \quad (\because \text{式(324), 式(325)}) \\ &= \frac{1}{m_\mu^2} [p_1'_\alpha p_2'_\beta + p_2'_\alpha p_1'_\beta - (m_\mu^2 + p_1' \cdot p_2') g_{\alpha\beta}] \end{aligned}$$

および同様に

$$B_{(e)}^{\alpha\beta} = \frac{1}{m_e^2} [p_1^\alpha p_2^\beta + p_2^\alpha p_1^\beta - (m_e^2 + p_1 \cdot p_2) g^{\alpha\beta}]$$

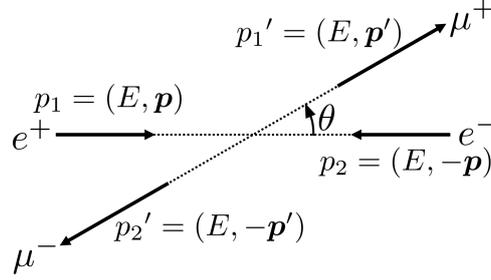


図 33 重心系で見た反応  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  における粒子の 4 元運動量 (図 31 の再掲)

となる。これらを  $X$  の式に代入し

$$\begin{aligned} a_{\alpha\beta} &\equiv p_1'^\alpha p_2'^\beta + p_1'^\beta p_2'^\alpha, \\ b_{\alpha\beta} &\equiv -(p_1' \cdot p_2' + m_\mu^2) g_{\alpha\beta}, \\ c^{\alpha\beta} &\equiv p_1^\alpha p_2^\beta + p_1^\beta p_2^\alpha, \\ d^{\alpha\beta} &\equiv -(p_1 \cdot p_2 + m_e^2) g^{\alpha\beta} \end{aligned}$$

とおくと,

$$\begin{aligned} X &= \frac{e^4}{4[(p_1 + p_2)^2]^2 m_e^2 m_\mu^2} (a_{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta})(c^{\alpha\beta} + d^{\alpha\beta}) \\ &= \frac{e^4}{4m_e^2 m_\mu^2 [(p_1 + p_2)^2]^2} \\ &\quad \times 2\{(p_1 \cdot p_1')(p_2 \cdot p_2') + (p_1 \cdot p_2')(p_2 \cdot p_1') - (p_1' \cdot p_2')(p_1 \cdot p_2) - (p_1' \cdot p_2')m_e^2 \quad \Leftarrow \quad a_{\alpha\beta}c^{\alpha\beta} \\ &\quad - (p_1 \cdot p_2)(p_1' \cdot p_2') - (p_1 \cdot p_2)m_\mu^2 \quad \Leftarrow \quad a_{\alpha\beta}d^{\alpha\beta} \\ &\quad + 2(p_1 \cdot p_2)(p_1' \cdot p_2') + 2(p_1' \cdot p_2')m_e^2 \quad \Leftarrow \quad b_{\alpha\beta}c^{\alpha\beta} \\ &\quad + 2(p_1 \cdot p_2)m_\mu^2 + 2m_e^2 m_\mu^2\} \quad \Leftarrow \quad b_{\alpha\beta}d^{\alpha\beta} \\ &= \frac{e^4}{2m_e^2 m_\mu^2 [(p_1 + p_2)^2]^2} \{(p_1 \cdot p_1')(p_2 \cdot p_2') + (p_1 \cdot p_2')(p_2 \cdot p_1') + (p_1' \cdot p_2')m_e^2 + (p_1 \cdot p_2)m_\mu^2 + 2m_e^2 m_\mu^2\} \end{aligned}$$

となる。

さて、重心系を採用して図 33 に示したように

$$p_1 \equiv (E, \mathbf{p}), \quad p_2 \equiv (E, -\mathbf{p}), \quad p_1' \equiv (E, \mathbf{p}'), \quad p_2' \equiv (E, -\mathbf{p}')$$

とおき、 $\mathbf{p}$  と  $\mathbf{p}'$  の成す角を  $\theta$  とする。また、 $p \equiv |\mathbf{p}|, p' \equiv |\mathbf{p}'|$  と書く。今、 $\mu^\pm$  を生成するのに十分大きなエネルギー  $E \geq m_\mu \gg m_e$  が与えられているため  $p \simeq E$  であることに注意すると、

$$\begin{aligned} (p_1 + p_2)^2 &= 2m_e^2 + 2p_1 \cdot p_2 \simeq 2p_1 \cdot p_2 = 2(E^2 + p^2) \simeq 4E, \\ p_1 \cdot p_1' &= p_2 \cdot p_2' = E^2 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' = E^2 - pp' \cos \theta \simeq E(E - p' \cos \theta), \\ p_1 \cdot p_2' &= p_2 \cdot p_1' = E^2 + \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' = E^2 + pp' \cos \theta \simeq E(E + p' \cos \theta), \\ p_1 \cdot p_2 &= E^2 + p^2 \simeq 2E^2 \end{aligned}$$

となる。  $X$  の式に中括弧  $\{ \}$  内の  $m_e^2$  に比例する相対的に小さな項を無視した上でこれらを代入すると

$$X = \frac{e^4}{2m_e^2 m_\mu^2 (4E^2)^2} \{ E^2 (E - p' \cos \theta)^2 + E^2 (E + p' \cos \theta)^2 + 2E^2 m_\mu^2 \} = \frac{e^4}{16m_e^2 m_\mu^2 E^2} (E^2 + m_\mu^2 + p'^2 \cos^2 \theta)$$

を得る。

始・終状態の偏極を指定した微分断面積の表式 (192):

$$\begin{aligned} \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{CoM}} &= \frac{1}{64\pi^2 (E_{\mathbf{p}_1} + E_{\mathbf{p}_2})^2} \frac{|\mathbf{p}_1'|}{|\mathbf{p}_1|} (2m_e)^2 (2m_\mu)^2 |\mathcal{M}|^2 \\ &\simeq \frac{m_e^2 m_\mu^2}{16\pi^2 E^2} \left( \frac{p'}{E} \right) |\mathcal{M}|^2 \\ &(\because E_{\mathbf{p}_1} + E_{\mathbf{p}_2} = 2E, |\mathbf{p}_1| = p \simeq E) \end{aligned}$$

から得られる非偏極断面積の式

$$\frac{1}{4} \sum_{r_1, r_2, s_1, s_2} \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{CoM}} = \frac{m_e^2 m_\mu^2}{16\pi^2 E^2} \left( \frac{p'}{E} \right) X$$

を  $\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{CoM}}$  と書き  $X$  の式を代入すると式 (201):

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{CoM}} = \frac{1}{16\pi^2 E^2} \frac{e^4}{16E^2} \left( \frac{p'}{E} \right) (E^2 + m_\mu^2 + p'^2 \cos^2 \theta) = \frac{\alpha^2}{16E^4} \left( \frac{p'}{E} \right) (E^2 + m_\mu^2 + p'^2 \cos^2 \theta)$$

を得る。2次の摂動論での確率振幅  $S_{fi}$  の式 (181) は  $e$  の2次の量であり、その絶対値の2乗が確率を与えるため、これは微細構造定数  $\alpha \equiv e^2/4\pi$  の2乗に比例している。さらに  $E \gg m_\mu$  の相対論的極限では

$$\frac{p'}{E} \simeq 1, \quad (E^2 + m_\mu^2 + p'^2 \cos^2 \theta) \simeq E^2 (1 + \cos^2 \theta)$$

なので

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{CoM}} = \frac{\alpha^2}{16E^2} (1 + \cos^2 \theta) \quad (E \gg m_\mu)$$

となる。これを全立体角で積分し、全断面積  $\sigma_{\text{tot}}$  を求めよう。

$$\int_0^\pi \sin \theta d\theta = 2, \quad \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \int_{-1}^1 \cos^2 \theta d(\cos \theta) = \frac{2}{3}$$

より

$$\int_0^\pi (E^2 + m_\mu^2 + p'^2 \cos^2 \theta) \times (2\pi \sin \theta d\theta) = 4\pi (E^2 + m_\mu^2) + 2\pi \cdot \frac{2}{3} p'^2 = 4\pi \left( E^2 + m_\mu^2 + \frac{1}{3} p'^2 \right)$$

なので式 (202):

$$\sigma_{\text{tot}} = \int d\sigma = \int \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{CoM}} d\Omega = \frac{\pi \alpha^2}{4E^4} \left( \frac{p'}{E} \right) \left( E^2 + m_\mu^2 + \frac{1}{3} p'^2 \right)$$

を得る。これについても  $E \gg m_\mu$  の相対論的極限での表式を求めると、

$$\frac{p'}{E} \simeq 1, \quad \left( E^2 + m_\mu^2 + \frac{1}{3} p'^2 \right) \simeq \frac{4}{3} E^2$$

なので式 (203):

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{\pi \alpha^2}{3E^2} \quad (E \gg m_\mu)$$

となる。

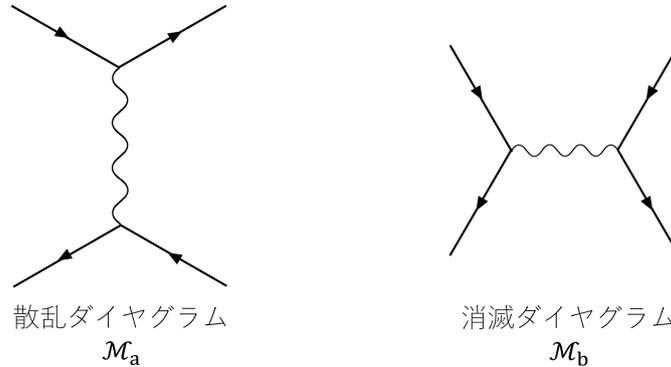


図 34 電子-陽電子散乱 (Bhabha 散乱) を表すダイアグラム (座標空間のグラフは図 21)

#### 8.4 について

■「後者の実験では極めて短距離の相互作用が調べられている」(p.159 下から 3,2 行目) について すぐ後に  
あるように、相互作用の距離は仮想光子の伝播する距離尺度として理解できる。

#### 8.5 Bhabha 散乱

レプトン対  $l^\pm = \mu^\pm, \tau^\pm$  の生成過程  $e^+e^- \rightarrow l^+l^-$  と違い, Bhabha 散乱  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$  には図 34 のように消滅ダイアグラム ( $e^+e^-$  が対消滅する, 対応する振幅  $\mathcal{M}_b$ ) だけでなく散乱 (光子交換) ダイアグラム (対応する振幅  $\mathcal{M}_a$ ) も寄与を持つ。

高エネルギーの [超] 相対論的な極限を想定すると, 重心系 (全エネルギー  $2E$ ) において  $e^+$  (または  $e^-$ ) が, 散乱角<sup>\*36</sup> $\theta$  方向の立体角  $d\Omega$  に散乱される微分断面積  $d\sigma$  は,

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{CoM}} = \frac{m^4}{16\pi^2 E^2} \left[ \underbrace{\frac{1}{4} \sum |\mathcal{M}_a|^2}_{\text{交換}} + \underbrace{\frac{1}{4} \sum |\mathcal{M}_b|^2}_{\text{消滅}} + \underbrace{\frac{1}{4} \sum \mathcal{M}_a \mathcal{M}_b^* + \frac{1}{4} \sum \mathcal{M}_a^* \mathcal{M}_b}_{\text{干渉}} \right] \quad (8.49)$$

$$= \frac{\alpha^2}{8E^2} \left[ \underbrace{\frac{1 + \cos^4(\theta/2)}{\sin^4(\theta/2)}}_{\text{交換}} + \underbrace{\frac{1 + \cos^2\theta}{2}}_{\text{消滅}} - \underbrace{\frac{2 \cos^4(\theta/2)}{\sin^2(\theta/2)}}_{\text{干渉}} \right] \quad (8.54)$$

で与えられる [導出は下記]. 期待されるように, 消滅ダイアグラムに相当する部分は, 前節のレプトン対生成の断面積 (8.46):  $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{CoM}} = \frac{\alpha^2}{16E^2} (1 + \cos^2\theta)$  と同じ表式になっている. 前方散乱  $\theta \rightarrow 0$  に対しては交換項が支配的になって微分断面積が発散する. (したがって全断面積も無限大である.) これは  $\theta \rightarrow 0$  のとき交換される光子の 4 元運動量  $k = p_1 - p'_1$  が無限大になり, 振幅  $\mathcal{M}_a$  における光子伝播関数  $1/(k^2 + i\epsilon)$  が発散することに起因している.

<sup>\*36</sup> 散乱前の  $e^+$  (または  $e^-$ ) の進行方向から測った角度.

### 8.5 節, 式の導出など

断面積 (8.45) を導出する [本稿次節の補足を併せて参照]. Bhabha 散乱

$$e^+(\mathbf{p}_1, r_1) + e^-(\mathbf{p}_2, r_2) \rightarrow e^+(\mathbf{p}'_1, s_1) + e^-(\mathbf{p}'_2, s_2)$$

について, 散乱ダイアグラムと消滅ダイアグラム (図 34) に対応する Feynman 振幅は Feynman 規則に基づき

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_a &= -ie^2 [\bar{u}(\mathbf{p}'_2) \gamma_\alpha u(\mathbf{p}_2)] \frac{1}{(p_1 - p'_1)^2} [\bar{v}(\mathbf{p}_1) \gamma^\alpha v(\mathbf{p}'_1)], \\ \mathcal{M}_b &= ie^2 [\bar{u}(\mathbf{p}'_2) \gamma_\alpha v(\mathbf{p}'_1)] \frac{1}{(p_1 + p'_1)^2} [\bar{v}(\mathbf{p}_1) \gamma^\alpha u(\mathbf{p}_2)] \end{aligned}$$

と書き下せる (スピン添字を省略した).  $\mathcal{M}_a$  と  $\mathcal{M}_b$  の相対的な符号の違いは Feynman 規則 8(7.3 節) による.

重心系を採用してエネルギー・運動量を図 31(8.4 節) と同様に表記し, 相対論的な高エネルギー極限  $p' = p, E \gg m (\equiv m_e)$  を想定する. 断面積は 8.1 節の一般式に基づき

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{CoM}} = \frac{m^4}{16\pi^2 E^2} (X_{aa} + X_{bb} + X_{ab} + X_{ab}^*), \quad (8.49)$$

$$X_{aa} \equiv \frac{1}{4} \sum |\mathcal{M}_a|^2, \quad X_{bb} \equiv \frac{1}{4} \sum |\mathcal{M}_b|^2, \quad X_{ab} \equiv \frac{1}{4} \sum \mathcal{M}_a \mathcal{M}_b^* \quad (8.50)$$

と書ける. 消滅ダイアグラムの項  $X_{bb}$  は 8.4 節の  $X$  において  $m_l = m, E \gg m$  と置いた式

$$X_{bb} = \frac{e^4}{16m^4} \left[ 1 + \cos^2 \theta + O\left(\frac{m^2}{E^2}\right) \right] \quad (8.51)$$

で与えられる. 同様の計算で

$$\begin{aligned} X_{aa} &= \frac{e^4}{2m^4 [(p_1 - p'_1)]^2} \{ (p_1 \cdot p_2)(p'_1 \cdot p'_2) + (p_1 \cdot p'_2)(p_2 \cdot p'_1) + O(E^2 m^2) \} \\ &= \frac{e^4}{8m^4 \sin^4(\theta/2)} \left[ 1 + \cos^4 \frac{\theta}{2} + O\left(\frac{m^2}{E^2}\right) \right] \end{aligned} \quad (8.52)$$

が得られる.  $X_{ab}$  の計算は次のようにすれば良い. まず定義式 (8.50) により

$$\begin{aligned} X_{ab} &= \frac{-e^4}{4(p_1 - p'_1)^2 (p_1 + p_2)^2} \sum_{\text{spins}} \{ [\bar{u}(\mathbf{p}'_2) \gamma_\alpha u(\mathbf{p}_2)] [\bar{u}(\mathbf{p}_2) \gamma_\beta u(\mathbf{p}_1)] [\bar{v}(\mathbf{p}_1) \gamma^\alpha v(\mathbf{p}'_1)] [\bar{v}(\mathbf{p}'_1) \gamma^\beta v(\mathbf{p}'_2)] \} \\ &= \frac{-e^4}{4(p_1 - p'_1)^2 (p_1 + p_2)^2} \text{Tr} \left\{ \frac{\not{p}'_2 + m}{2m} \gamma_\alpha \frac{\not{p}_2 + m}{2m} \gamma_\beta \frac{\not{p}_1 - m}{2m} \gamma^\alpha \frac{\not{p}'_1 - m}{2m} \gamma^\beta \right\} \\ &= \frac{-e^4}{64m^4 (p_1 - p'_1)^2 (p_1 + p_2)^2} [\text{Tr}(\not{p}'_2 \gamma_\alpha \not{p}_2 \gamma_\beta \not{p}_1 \gamma^\alpha \not{p}'_1 \gamma^\beta) + O(E^2 m^2)] \end{aligned}$$

である. 付録 A.2 の縮約公式

$$\gamma_\lambda \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\gamma \gamma^\lambda = -2\gamma_\gamma \gamma_\beta \gamma_\alpha, \quad \gamma_\lambda \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma^\lambda = 4g_{\alpha\beta}$$

を用いて対角部分を簡単にしてから評価すると

$$-2\text{Tr}(\not{p}'_2 \not{p}_1 \gamma_\beta \not{p}_2 \not{p}'_1 \gamma^\beta) = -8(p_2 \cdot p'_1) \text{Tr}(\not{p}'_2 \not{p}_1) = -32(p_2 \cdot p'_1)(p'_2 \cdot p_1)$$

となるので,

$$\begin{aligned} X_{ab} &= \frac{e^4}{2m^4(p_1 - p'_1)^2(p_1 + p_2)^2} [(p_2 \cdot p'_1)(p'_2 \cdot p_1) + O(E^2 m^2)] \\ &= \frac{-e^4}{8m^4 \sin^2(\theta/2)} \left[ \cos^4 \frac{\theta}{2} + O\left(\frac{m^2}{E^2}\right) \right] \end{aligned} \quad (8.53)$$

が得られる (これは実数であることが見て取れる).  $X_{aa}, X_{bb}, X_{ab}$  の式 (8.51–53) を式 (8.49) に代入すると, 断面積の式 (8.45) に到達する.

## 8.5 について

■ 「 $p' = p$ 」 (p.161, 1.9) について  $p' \simeq E$  かつ  $p \simeq E$  である.

■  $X_{aa}$  の式 (8.52) の確認

$$\begin{aligned} X_{aa} &= \frac{e^4}{4[(p_1 - p'_1)^2]^2} \sum [(\bar{u}_{s_2})_\mu (\gamma^\alpha)_{\mu\nu} (u_{r_2})_\nu][(\bar{v}_{r_1})_\rho (\gamma_\alpha)_{\rho\sigma} (v_{s_1})_\sigma][(\bar{u}_{r_2})_{\bar{\mu}} (\gamma_\beta)_{\bar{\mu}\bar{\nu}} (u_{s_2})_{\bar{\nu}}][(\bar{v}_{r_1})_{\bar{\rho}} (\gamma^\beta)_{\bar{\rho}\bar{\sigma}} (v_{r_1})_{\bar{\sigma}}] \\ &= \frac{e^4}{4[(p_1 - p'_1)^2]^2} \left( \sum_{r_2} (u_{r_2})_\nu (\bar{u}_{r_2})_{\bar{\mu}} \right) (\gamma_\beta)_{\bar{\mu}\bar{\nu}} \left( \sum_{s_2} (u_{s_2})_{\bar{\nu}} (\bar{u}_{s_2})_\mu \right) (\gamma^\alpha)_{\mu\nu} \\ &\quad \times \left( \sum_{r_1} (v_{r_1})_{\bar{\sigma}} (\bar{v}_{r_1})_\rho \right) (\gamma_\alpha)_{\rho\sigma} \left( \sum_{s_1} (v_{s_1})_\sigma (\bar{v}_{s_1})_{\bar{\rho}} \right) (\gamma^\beta)_{\bar{\rho}\bar{\sigma}} \\ &= \frac{e^4}{4[(p_1 - p'_1)^2]^2} \text{Tr} \left[ \frac{\not{p}_2 + m}{2m} \gamma_\beta \frac{\not{p}'_2 + m}{2m} \gamma^\alpha \right] \text{Tr} \left[ \frac{\not{p}_1 - m}{2m} \gamma_\alpha \frac{\not{p}'_1 - m}{2m} \gamma_\beta \right] \\ &= \frac{e^4}{4[(p_1 - p'_1)^2]^2} \frac{1}{m^2} (a^{\alpha\beta} + b^{\alpha\beta}) \frac{1}{m^2} (c_{\alpha\beta} + d_{\alpha\beta}) \quad (\text{公式 (A.16), (A.17)}) \end{aligned}$$

$$a^{\alpha\beta} \equiv p_2^\alpha p_2^\beta + p_2^\beta p_2^\alpha, \quad b^{\alpha\beta} \equiv -g^{\alpha\beta} (p_2 \cdot p'_2 - m^2), \quad c_{\alpha\beta} \equiv p_{1\alpha} p'_{1\beta} + p_{1\beta} p'_{1\alpha}, \quad d_{\alpha\beta} \equiv -g_{\alpha\beta} (p_1 \cdot p'_1 - m^2)$$

であり, 最右辺を展開すると

$$\begin{aligned} \frac{e^4}{4[(p_1 - p'_1)^2]^2} \{ & 2(p_1 \cdot p_2)(p'_1 \cdot p'_2) + 2(p_1 \cdot p'_2)(p'_1 \cdot p_2) \Leftarrow a^{\alpha\beta} c_{\alpha\beta} \\ & \frac{-2(p_1 \cdot p'_1)(p_2 \cdot p'_2)}{\phantom{4[(p_1 - p'_1)^2]^2}} \Leftarrow a^{\alpha\beta} d_{\alpha\beta} \\ & \frac{-2(p_1 \cdot p'_1)(p_2 \cdot p'_2)}{\phantom{4[(p_1 - p'_1)^2]^2}} \Leftarrow b^{\alpha\beta} c_{\alpha\beta} \\ & \frac{+4(p_1 \cdot p'_1)(p_2 \cdot p'_2)}{\phantom{4[(p_1 - p'_1)^2]^2}} \Leftarrow b^{\alpha\beta} d_{\alpha\beta} \\ & \left. + O(m^2 E^2) \right\} \end{aligned}$$

となる. ここに

$$\begin{aligned} [(p_1 - p'_1)^2] &= [2E^2(\cos\theta - 1)]^2 = 16E^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}, \\ \{\dots\} &= E^4 \left( 4 + (1 + \cos\theta)^2 + O\left(\frac{m^2}{E^2}\right) \right) \\ &= 4E^4 \left( 1 + \cos^4 \frac{\theta}{2} + O\left(\frac{m^2}{E^2}\right) \right) \end{aligned}$$

を代入して、式 (8.52):

$$X_{aa} = \frac{e^4}{8m^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left[ 1 + \cos^4 \frac{\theta}{2} + O\left(\frac{m^2}{E^2}\right) \right]$$

を得る.

■  $X_{ab}$  の式 (p.162, 1.3~) における第 3 の等号について 今考えている相対論的極限で、各因子  $\not{p} \pm m$  を近似的に  $\not{p}$  で置き換えられることによる.

■  $X_{ab}$  の式 (8.53) について 1 行目における負号は不要である (本稿では修正済み). ここに

$$(p_1 - p'_1)^2 \simeq 2E^2(\cos\theta - 1) = -4E^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad (p_1 + p_2)^2 = 4E^2, \quad p_1 \cdot p'_2 = p_2 \cdot p'_1 \simeq E^2(1 + \cos\theta) = 2E^2 \cos \frac{\theta}{2}$$

を代入して得られる 2 行目の表式は正しい.

■ 断面積の発散は「電磁力の到達範囲が無限大であること、等価的には電磁力を媒介する光子質量がゼロであることによる」(p.163, 1.2.3) ことについて Coulomb 相互作用 ( $\sim 1/r$ ) は、例えば Lennard-Jones ポテンシャル ( $r \rightarrow \infty$  で  $1/r^6$ ) や指数型  $e^{-r/r_0}$  の力に比べてゆっくりと減少する. 実際、古典論においても Coulomb 相互作用による断面積は無限大となる. これは Coulomb 力の到達距離が長いため、場の中心の無限遠方を通る粒子も力を感じて、散乱されることを表していると解釈できる [15, p.145].

## 8.6 Compton 散乱

Compton 散乱

$$e^-(\mathbf{p}, r) + \gamma(\mathbf{k}, s) \rightarrow e^-(\mathbf{p}', r') + \gamma(\mathbf{k}', s')$$

を考え,

$$\begin{aligned} u &\equiv u_r(\mathbf{p}), & \varepsilon &\equiv \varepsilon_s(\mathbf{k}), & u' &\equiv u_{r'}(\mathbf{p}'), & \varepsilon' &\equiv \varepsilon_{s'}(\mathbf{k}'), \\ p &= (E, \mathbf{p}), & k &= (\omega, \mathbf{k}), & p' &= (E', \mathbf{p}'), & k' &= (\omega', \mathbf{k}') \end{aligned}$$

とおく. エネルギー・運動量保存則は  $p + k = p' + k'$  と表される.

標的電子の静止した実験室系において、光子のエネルギー変化  $\omega \rightarrow \omega'$  を与える式

$$\omega' = \frac{m\omega}{m + \omega(1 - \cos\theta)} \quad (8.61)$$

が成立する ( $\theta$  は光子の散乱角) [本稿次節で補足]. また実験室系で光子の散乱方向  $d\Omega$  に関する断面積は

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Lab}} = \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 |\mathcal{M}|^2 \quad (8.63)$$

で与えられる (導出は下記). ここに Feynman 振幅は、7.2.2 節で見た 2 種類のダイアグラムからの寄与

$$\mathcal{M}_a = -ie^2 \frac{\bar{u}' \not{\epsilon}' (\not{f}_1 + m) \not{\epsilon} u}{2(p \cdot k)}, \quad \mathcal{M}_b = ie^2 \frac{\bar{u}' \not{\epsilon}' (\not{f}_2 + m) \not{\epsilon} u}{2(p \cdot k')} \quad (8.59)$$

(ただし  $f_1 \equiv p + k$ ,  $f_2 \equiv p - k'$ ) [本稿次節で補足] の和  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_a + \mathcal{M}_b$  である. これに対して

- 始状態の電子スピン, 光子偏極に関する平均化

- 終状態の電子スピン, 光子偏極に関する和

の操作

$$|\mathcal{M}|^2 \rightarrow \frac{1}{4} \sum_{\text{spin,pol}} |\mathcal{M}|^2$$

を施すと, 非偏極断面積

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Lab}} = \frac{\alpha^2}{2m^2} \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - \sin^2\theta\right) \quad (8.74)$$

が得られる (導出は下記). [上式 (8.61) より] 低エネルギー極限  $\omega \ll m$  では  $\omega' \simeq \omega$  なので, これは Thomson 散乱の断面積 (1.69a):  $\sigma(\theta) = \frac{1}{2}r_0^2(1 + \cos^2\theta)$  を再現する.

他方, 断面積 (8.63) の電子スピンについてのみ始状態の平均化と終状態の和をとると, 始・終状態の光子の偏極だけが指定された断面積として

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Lab}} = \frac{\alpha^2}{4m^2} \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 \left\{ \frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} + 4(\varepsilon \cdot \varepsilon')^2 - 2 \right\} : \text{Klein-Nishina(仁科) の公式} \quad (8.82)$$

が導かれる (導出は下記). さらに 1.4.4 節で示した手法で光子の偏極についても和と平均化を施せば, 上式 (8.74) が再現される (詳細は下記).

## 8.6 節, 式の導出など

本稿次節における補足を併せて参照されたい.

■実験室系の断面積 (8.63) の導出 任意の座標系における微分断面積は, 8.1 節の一般公式により

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{m^2\omega'}{16\pi^2 EE'\omega v_{\text{rel}}} \left[ \left( \frac{\partial(E' + \omega')}{\partial\omega'} \right)_{\theta\phi} \right]^{-1} |\mathcal{M}|^2 \quad (8.55)$$

で与えられる. ただし  $(\theta, \phi)$  は光子の散乱方向  $\mathbf{k}'$  の極座標であり,  $\mathbf{k}$  をその基準軸に選ぶと  $\theta$  は光子の散乱角に他ならず,  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' = \omega\omega' \cos\theta$  である.

さて, 実験室系 ( $\mathbf{p} = 0$ ) では

$$\mathbf{p}' = \mathbf{k} - \mathbf{k}', \quad \therefore E' = [m^2 + (\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2]^{1/2} = [m^2 + \omega^2 + \omega'^2 - 2\omega\omega' \cos\theta]^{1/2}$$

であり, ここから

$$\left( \frac{\partial(E' + \omega')}{\partial\omega'} \right)_{\theta\phi} = \frac{m\omega}{E'\omega'} \quad (8.62)$$

が得られる. よって上式 (8.55) は実験室系では式 (8.63) に帰す.

■非偏極断面積 (8.74) の導出 非偏極の断面積を求めるために, 8.3 節の公式

$$\mathcal{M} \equiv \varepsilon_\alpha \varepsilon'_\beta \mathcal{M}^{\alpha\beta}, \quad (8.64)$$

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{pol}} \sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{4} \sum_{\text{spin}} \mathcal{M}^{\alpha\beta} \mathcal{M}_{\alpha\beta}^* \quad (8.65)$$

を利用して

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{\text{pol}} \sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{1}{4} \sum_{\text{pol}} \sum_{\text{spin}} \{ |\mathcal{M}_a|^2 + |\mathcal{M}_b|^2 + \mathcal{M}_a \mathcal{M}_b^* + \mathcal{M}_b \mathcal{M}_a^* \} \\ &= \frac{e^4}{64m^2} \left\{ \frac{X_{aa}}{(p \cdot k)^2} + \frac{X_{bb}}{(p \cdot k')^2} - \frac{X_{ab} + X_{ba}}{(p \cdot k)(p \cdot k')} \right\}, \end{aligned} \quad (8.66)$$

$$X_{aa} = \text{Tr}\{\gamma^\beta(\not{f}_1 + m)\gamma^\alpha(\not{p} + m)\gamma_\alpha(\not{f}_1 + m)\gamma_\beta(\not{p}' + m)\}, \quad (8.67a)$$

$$X_{bb} = \text{Tr}\{\gamma^\alpha(\not{f}_2 + m)\gamma^\beta(\not{p} + m)\gamma_\beta(\not{f}_2 + m)\gamma_\alpha(\not{p}' + m)\}, \quad (8.67b)$$

$$X_{ab} = \text{Tr}\{\gamma^\beta(\not{f}_1 + m)\gamma^\alpha(\not{p} + m)\gamma_\beta(\not{f}_2 + m)\gamma_\alpha(\not{p}' + m)\}, \quad (8.67c)$$

$$X_{ba} = \text{Tr}\{\gamma^\alpha(\not{f}_2 + m)\gamma^\beta(\not{p} + m)\gamma_\alpha(\not{f}_1 + m)\gamma_\beta(\not{p}' + m)\} \quad (8.67b)$$

とする。ここで

$$k \leftrightarrow -k', \quad \varepsilon \leftrightarrow \varepsilon' \quad (8.68a)$$

と置き換えると

$$\begin{cases} f_1 \leftrightarrow f_2 \\ \mathcal{M}_a \leftrightarrow \mathcal{M}_b \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} X_{aa} \leftrightarrow X_{bb} \\ X_{ab} \leftrightarrow X_{ba} \end{cases} \quad (8.68b,c)$$

となることに注意すると,  $X_{aa}$  と  $X_{ab}$  だけを計算すれば充分である.

式 (8.66) は実数なので  $X_{ba} = X_{ab}^*$  であり, さらに式 (8.67c) と式 (8.67d) および  $\gamma$  行列に関する一般的性質 (A.20a) を考え合わせると  $X_{ab} = X_{ba}$  となる. すなわち  $X_{ab}$  は実数であり, 式 (8.68a) の変換の下で対称でなければならない. これらの制約条件は, 計算結果の当否の確認方法として有用である. (p.166 より)

付録 A.2 の縮約公式を用いると, 例えば式 (8.67a) の  $X_{aa}$  における行列の積は

$$\begin{aligned} Y &\equiv \gamma^\beta(\not{f}_1 + m)\gamma^\alpha(\not{p} + m)\gamma_\alpha(\not{f}_1 + m)\gamma_\beta \\ &= \gamma^\beta(\not{f}_1 + m)(-2\not{p} + 4m)(\not{f}_1 + m)\gamma_\beta \\ &= 4\not{f}_1\not{p}\not{f}_1 + m[-16(p \cdot f_1) + 16f_1^2]m^2(4\not{p} - 16\not{f}_1) + 16m^3 \end{aligned}$$

と簡略化される. その上でトレース公式 (付録 A.3) を適用すると

$$\begin{aligned} X_{aa} &= \text{Tr}\{Y(\not{p}' + m)\} \\ &= 16\{2(f_1 \cdot p)(f_1 \cdot p') - f_1^2(p \cdot p') + m^2(-4p \cdot f_1 + 4f_1^2) + m^2(p \cdot p' - 4f_1 \cdot p') + 4m^4\} \end{aligned} \quad (8.69)$$

となる. 3 つのスカラー

$$p^2 = p'^2 = m^2, \quad p \cdot k = p' \cdot k', \quad p \cdot k' = p' \cdot k \quad (8.70)$$

だけを用いて結果を表すと

$$X_{aa} = 32\{m^4 + m^2p \cdot k + (p \cdot k)(p \cdot k')\}. \quad (8.71a)$$

式 (8.68) とより

$$X_{bb} = 32\{m^4 - m^2p \cdot k' + (p \cdot k)(p \cdot k')\}. \quad (8.71b)$$

同様の計算により

$$X_{ab} = 16m^2(2m^2 + p \cdot k - p \cdot k'). \quad (8.71c)$$

これは確かに実数であり，置き換え (8.68a) の下での対称性

$$X_{ba} = X_{ab} \quad (8.71d)$$

を有している．以上の式 (8.71a-d) を上式 (8.66) に代入すると

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{pol}} \sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{2m^2} \left\{ \left( \frac{p \cdot k}{p \cdot k'} + \frac{p \cdot k'}{p \cdot k} \right) + 2m^2 \left( \frac{1}{p \cdot k} - \frac{1}{p \cdot k'} \right) + m^4 \left( \frac{1}{p \cdot k} - \frac{1}{p \cdot k'} \right)^2 \right\} \quad (8.72)$$

であり，特に実験室系 ( $p = (m, 0, 0, 0)$ ) では  $p \cdot k = m\omega$ ,  $p \cdot k' = m\omega'$  および

$$\omega' = \frac{m\omega}{m + \omega(1 - \cos\theta)} : (8.61), \quad \therefore \frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega'} = \frac{1}{m}(\cos\theta - 1)$$

が成り立つので

$$\left[ \frac{1}{4} \sum_{\text{pol}} \sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}|^2 \right]_{\text{Lab}} = \frac{e^4}{2m^2} \left( \frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - \sin^2\theta \right)$$

と評価できる．よって断面積 (8.63) は，スピン・偏極状態について和と平均をとると，式 (8.74) になる．

#### ■ Klein-Nishina の公式 (8.82) の導出

- 自由な光子が横波光子だけから成る Lorenz ゲージ (5.2 節) をとる： $\varepsilon = (0, \boldsymbol{\varepsilon})$ ,  $\varepsilon' = (0, \boldsymbol{\varepsilon}')$ .

$$\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{k} = -\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{k} = 0, \quad \boldsymbol{\varepsilon}' \cdot \boldsymbol{k}' = -\boldsymbol{\varepsilon}' \cdot \boldsymbol{k}' = 0. \quad (8.75a)$$

- 実験室系を選ぶ： $p = (m, 0, 0, 0)$ .

$$p \cdot \varepsilon = p \cdot \varepsilon' = 0. \quad (8.75b)$$

反交換関係  $\{\gamma^\alpha, \gamma^\beta\} = 2g^{\alpha\beta}$  と Dirac 方程式  $(\not{p} - m)u(p) = 0$  より

$$\not{p}\not{\varepsilon}u = -m\not{\varepsilon}u, \quad \not{p}'\not{\varepsilon}'u = -m\not{\varepsilon}'u$$

なので，Feynman 振幅 (8.59) は

$$\mathcal{M}_a = -ie^2 \frac{\bar{u}'\not{\varepsilon}'\not{k}\not{\varepsilon}u}{2p \cdot k}, \quad \mathcal{M}_b = -ie^2 \frac{\bar{u}'\not{\varepsilon}\not{k}'\not{\varepsilon}'u}{2p \cdot k'} \quad (8.76)$$

と簡単になる．

電子スピンについての和と平均は

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{32m^2} \left\{ \frac{Y_{aa}}{(p \cdot k)^2} + \frac{Y_{bb}}{(p \cdot k')^2} + \frac{Y_{ab} + Y_{ba}}{(p \cdot k)(p \cdot k')} \right\}, \quad (8.77)$$

$$Y_{aa} = \text{Tr}\{\not{\varepsilon}'\not{k}\not{\varepsilon}(\not{p} + m)\not{\varepsilon}\not{k}'(\not{p}' + m)\}, \quad (8.78a)$$

$$Y_{bb} = \text{Tr}\{\not{\varepsilon}\not{k}'\not{\varepsilon}'(\not{p} + m)\not{\varepsilon}'\not{k}(\not{p}' + m)\}, \quad (8.78b)$$

$$Y_{ab} = \text{Tr}\{\not{\varepsilon}'\not{k}\not{\varepsilon}(\not{p} + m)\not{\varepsilon}'\not{k}'(\not{p}' + m)\}, \quad (8.78c)$$

$$Y_{ba} = \text{Tr}\{\not{\varepsilon}\not{k}'\not{\varepsilon}'(\not{p} + m)\not{\varepsilon}\not{k}(\not{p}' + m)\} \quad (8.78d)$$

と計算される．再び置き換え (8.68a) を行うと  $\mathcal{M}_a \leftrightarrow \mathcal{M}_b$ ,

$$Y_{aa} \leftrightarrow Y_{bb}, \quad Y_{ab} \leftrightarrow Y_{ba} \quad (8.79)$$

であり, また  $Y_{ab} = Y_{ba} = Y_{ab}^*$  である.

対角和 (8.78) における行列積を簡略化するのに, [付録 A.3 の] 公式

$$AB = -BA + 2A \cdot B, \quad \therefore \begin{cases} AA = A^2 \\ AB = -BA \end{cases} \quad (A \cdot B = 0 \text{ のとき})$$

特に今の場合,  $\not{p}\not{p} = m^2, \quad \not{k}\not{k} = 0, \quad \not{\epsilon}\not{\epsilon} = \not{\epsilon}'\not{\epsilon}' = -1$  (8.80)

が有用となる. すると

$$\begin{aligned} Y_{aa} &= \text{Tr}\{\not{\epsilon}'\not{k}\not{p}\not{\epsilon}\not{k}\not{\epsilon}'\not{p}'\} = \text{Tr}\{\not{\epsilon}'\not{k}\not{p}\not{\epsilon}\not{k}\not{\epsilon}'\not{p}'\} \\ &\quad (\because \not{k}\not{\epsilon}\not{\epsilon}\not{k} = -\not{k}\not{k} = 0, \not{\epsilon}\not{p}\not{\epsilon} = -\not{p}\not{p} = \not{p}) \\ &= 2(p \cdot k) \text{Tr}\{\not{\epsilon}'\not{k}\not{\epsilon}'\not{p}'\} = 8(p \cdot k)[2(\epsilon' \cdot k)(\epsilon' \cdot p') + (k \cdot p')] \\ &\quad (\text{公式 (8.80) を用いて } \not{p} \text{ と } \not{k} \text{ を入れ替え, } \not{k}\not{k} = 0 \text{ を用いる}) \\ &= 8(p \cdot k)[2(\epsilon' \cdot k)^2 + (p \cdot k')], \end{aligned} \quad (8.81a)$$

$$Y_{bb} = -8(p \cdot k')[2(\epsilon \cdot k')^2 - (p \cdot k)], \quad (8.81b)$$

(上式 (8.81a) に式 (8.79) を適用する)

$$Y_{ab} = 8(p \cdot k)(p \cdot k')[2(\epsilon \cdot \epsilon')^2 - 1] - 8(k \cdot \epsilon')^2(p \cdot k') + 8(k' \cdot \epsilon)^2(p \cdot k). \quad (8.81c)$$

この  $Y_{ab}$  は実数であり, 対称性  $Y_{ab} = Y_{ba}$  を持つ. 式 (8.81) を式 (8.77) に代入すると, 断面積 (8.63) のスピン状態に関する和と平均が Klein-Nishina の公式 (8.82) で与えられることが見出される.

■式 (8.82) → 式 (8.74)  $\epsilon \cdot \epsilon' = -\epsilon \cdot \epsilon'$  なので, 式 (1.71):

$$\frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} (\epsilon_\alpha \cdot \epsilon'_\beta)^2 = \frac{1}{2} (2 - \sin^2 \theta) = \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta)$$

は  $\frac{1}{2} \sum_{\text{pol}} (\epsilon \cdot \epsilon')^2$  に一致することを用いれば良い. 必要な部分だけを改めて書けば,

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{pol}} (\epsilon \cdot \epsilon')^2 = \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta). \quad (8.83)$$

## 8.6 について

■微分断面積 (8.55) における  $d\Omega$  について 光子の散乱方向の立体角を表しており, これに対応して  $|\mathbf{p}'| = \omega'$  である.

■Feynman 振幅 (8.59) について

$$\bar{u}' \equiv \bar{u}(\mathbf{p}'), \quad \not{\epsilon}' \equiv \not{\epsilon}(\mathbf{k}'), \quad \not{\epsilon} \equiv \not{\epsilon}(\mathbf{k}), \quad u \equiv u(\mathbf{p})$$

であり, 伝播関数 (7.24) は

$$S_F(f_1) = \frac{\not{f}_1 + m}{(p + k)^2 - m^2 + i\epsilon} = \frac{\not{f}_1 + m}{2p \cdot k + i\epsilon} \quad (\because p^2 = m^2, k^2 = 0)$$

と書き換えられる.  $p \cdot k = m\omega > 0$  より分母の  $i\epsilon$  は省ける.

■保存則 (8.56):  $p + k = p' + k'$  から導かれる p.165, 1.8 の式, 式 (8.61) について

$$\begin{aligned} k \cdot (\text{式 (8.56)}) &\rightarrow p \cdot k = k \cdot (p' + k'), \\ k' \cdot (\text{式 (8.56)}) &\rightarrow p' \cdot k' = k' \cdot (p + k), \\ (\text{式 (8.56)})^2 &\rightarrow p \cdot k = p' \cdot k' \end{aligned}$$

なので,

$$p \cdot k = k \cdot (p' + k') = k' \cdot (p + k).$$

そこで式 (8.61) は

$$p \cdot k = m\omega, \quad k' \cdot (p + k) = \omega'(m + \omega) - \omega\omega' \cos \theta$$

を等置して得られる.

波長のずれに対する初等的な公式 なお式 (8.61):

$$m\omega = \omega'(m + \omega) - \omega\omega' \cos \theta$$

( $\theta$  は  $\mathbf{k}$  と  $\mathbf{k}'$  の成す角, すなわち光子の散乱角) の両辺を  $m\omega\omega'$  で割ると

$$\frac{1}{\omega'} - \frac{1}{\omega} = \frac{1}{m}(1 - \cos \theta)$$

を得る. これが散乱光子のエネルギー変化  $\omega \rightarrow \omega'$  を定める.

これを  $c = 1, \hbar = 1$  と置く前の式に直すには, もとの単位系で次元の正しい式となるように上式に  $c$  と  $\hbar$  を補えば良い. 今の場合, 各項がエネルギーの逆数の次元を持つように

$$\frac{1}{\hbar\omega'} - \frac{1}{\hbar\omega} = \frac{1}{mc^2}(1 - \cos \theta)$$

とすれば良い. あるいは角振動数  $\omega, \omega'$  の代わりに振動数  $\nu, \nu'$  を用いれば

$$\frac{1}{h\nu'} - \frac{1}{h\nu} = \frac{1}{mc^2}(1 - \cos \theta)$$

であり, 両辺を  $hc$  倍すると, 波長のずれを与える初等的に良く知られた式

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos \theta)$$

が得られる.

■断面積の予備計算 (8.62) について

$$\left( \frac{\partial(E' + \omega')}{\partial\omega'} \right)_{\theta, \phi} = \frac{\omega' - \omega \cos \theta}{E'} + 1 = \frac{\omega'(\omega' - \omega \cos \theta) + E'\omega'}{E'\omega'}$$

の最右辺分子が  $m\omega$  に一致することが次のように分かる.

$$m\omega = p \cdot k = p' \cdot k' = E'\omega' - \mathbf{p}' \cdot \mathbf{k}' = E'\omega' - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{k}' = E'\omega' - (\omega\omega' \cos \theta - \omega'^2).$$

■微分断面積 (8.63) について  $v_{\text{rel}} = c = 1$  を考慮する.

■「式 (8.65) は, ……暗に含意されている」(p.166, 1.2,3) について 8.3 節のノートを参照.

■式 (8.67) について 例えば  $X_{aa}$  の式 (8.67a) は次のように確認できる。スピン・偏極状態の指標の代わりに運動量の引数を省くと、

$$\mathcal{M}_a = \frac{-ie^2}{2p \cdot k} \varepsilon_{s'}^\alpha \varepsilon_s^\beta \bar{u}_{r'} \Gamma_{(a)\beta\alpha} u_r, \quad \Gamma_{(a)\alpha\beta} \equiv \gamma_\alpha (\not{f}_1 + m) \gamma_\beta$$

と書けるので、

$$\frac{1}{4} \sum_{r,r'} \sum_{s,s'} |\mathcal{M}_a|^2 = \frac{1}{4} \frac{e^4}{4(p \cdot k)^2} \sum_{r,r'} \left[ \bar{u}_{r'} \Gamma_{(a)\beta\alpha} u_r \right] \left[ \bar{u}_r \Gamma_{(a)\alpha\beta} u_{r'} \right]^*$$

となる。ここでスピン状態  $r, r'$  についての和の部分は、8.2 節における式 (8.23) の式 (8.25) への書き換えと同様に処理すると

$$\text{Tr} \left[ \frac{\not{p}' + m}{2m} \Gamma_{(a)\beta\alpha} \frac{\not{p} + m}{2m} \tilde{\Gamma}_{(a)\alpha\beta} \right]$$

になる。ここで公式 (A.6) より

$$\tilde{\Gamma}_{(a)\beta\alpha} \equiv \gamma^0 \Gamma_{(a)\beta\alpha}^\dagger \gamma^0 = (\gamma^0 \gamma_\alpha^\dagger \gamma^0) (\gamma^0 (\not{f}_1 + m)^\dagger \gamma^0) (\gamma^0 \gamma_\beta^\dagger \gamma^0) = \gamma_\alpha (\not{f}_1 + m) \gamma_\beta$$

なので、

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{\text{spin, pol}} |\mathcal{M}_a|^2 &= \frac{e^4}{64m^2(p \cdot k)^2} \text{Tr} \{ (\not{p}' + m) \gamma^\beta (\not{f}_1 + m) \gamma^\alpha (\not{p} + m) \gamma_\alpha (\not{f}_1 + m) \gamma_\beta \} \\ &= \frac{e^4}{64m^2(p \cdot k)^2} \text{Tr} \{ \gamma^\beta (\not{f}_1 + m) \gamma^\alpha (\not{p} + m) \gamma_\alpha (\not{f}_1 + m) \gamma_\beta (\not{p}' + m) \}. \end{aligned}$$

■「 $X_{ba} = X_{ab}^*$ 」「 $X_{ab} = X_{ba}$ 」(式 (8.68c) の下 3 行) について

$$-\frac{e^4}{64m^2(p \cdot k)(p \cdot k')} \begin{Bmatrix} X_{ab} \\ X_{ba} \end{Bmatrix} = \frac{1}{4} \sum_{\text{spin, pol}} \begin{Bmatrix} \mathcal{M}_a \mathcal{M}_b^* \\ \mathcal{M}_b \mathcal{M}_a^* \end{Bmatrix}$$

から  $X_{ba} = X_{ab}^*$  は明らかであり、ここから  $\frac{1}{4} \sum_{\text{spin, pol}} |\mathcal{M}_a|^2$  の式 (8.66) の実数性が保証される。

また  $X_{ab} = X_{ba}$  は次のように確かめられる。

$$\begin{aligned} X_{ab} &= \text{Tr} \{ \gamma^\beta (\not{f}_1 + m) \gamma^\alpha (\not{p} + m) \gamma_\beta (\not{f}_2 + m) \gamma_\alpha (\not{p}' + m) \} && \text{(式 (8.67c))} \\ &= \text{Tr} \{ \gamma_\beta (\not{f}_2 + m) \gamma_\alpha (\not{p}' + m) \gamma^\beta (\not{f}_1 + m) \gamma^\alpha (\not{p} + m) \} \\ &= \text{Tr} \{ \gamma_\alpha (\not{f}_2 + m) \gamma_\beta (\not{p}' + m) \gamma^\alpha (\not{f}_1 + m) \gamma^\beta (\not{p} + m) \} && \text{(入れ替え } \alpha \leftrightarrow \beta \text{)} \\ &= \text{Tr} \{ \gamma^\alpha (\not{f}_2 + m) \gamma^\beta (\not{p}' + m) \gamma_\alpha (\not{f}_1 + m) \gamma_\beta (\not{p} + m) \} \\ &= X_{ba}. && \text{(式 (8.67d))} \end{aligned}$$

■ $X_{aa}$  の式 (8.69) について これを得る際、

$$\text{Tr}\{1\} = \text{Tr} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4$$

に注意する。

■式 (8.70) について 保存則を移項して  $p - k' = p' - k$  と書き, 両辺を自乗して (4元内積の意味で) 得る.

■ $X_{aa}$  の式 (8.71a) の導出 保存則 (8.56):  $p + k = p' + k'$  より

$$p \cdot p' = p \cdot (p + k - k') = m^2 + p \cdot k - p \cdot k'$$

となることと, 式 (8.57):  $f_1 \equiv p + k$  より

$$f_1 \cdot p = m^2 + p \cdot k, \quad f_1 \cdot p' = p \cdot p' + p' \cdot k = m^2 + p \cdot k, \quad f_1^2 = m^2 + 2p \cdot k$$

となることに注意すると

$$\begin{aligned} 2(f_1 \cdot p)(f_1 \cdot p') &= 2m^4 + 4m^2 p \cdot k + 2(p \cdot k)^2, \\ -f_1^2(p \cdot p') &= -(m^2 + 2p \cdot k)(m^2 + p \cdot k - p \cdot k') \\ &= -m^4 - 3m^2 p \cdot k - 2(p \cdot k)^2 + 2(p \cdot k)(p \cdot k') + m^2 p \cdot k', \\ m^2[-4(p \cdot f_1) + 4f_1^2] &= -4m^2(m^2 + p \cdot k) + 4m^2(m^2 + 2p \cdot k) \\ &= 4m^2 p \cdot k, \\ m^2[(p \cdot p') - 4(f_1 \cdot p')] &= m^2[(m^2 + p \cdot k - p \cdot k') - 4(m^2 + p \cdot k)] \\ &= -3m^4 - 3m^2 p \cdot k - m^2 p \cdot k' \end{aligned}$$

である. よって

$$\begin{aligned} X_{aa} &= 16\{2(f_1 \cdot p)(f_1 \cdot p') - f_1^2(p \cdot p') + m^2[-4(p \cdot f_1) + 4f_1^2] + m^2[(p \cdot p') - 4(f_1 \cdot p')] + 4m^4\} \\ &(\because \text{式 (8.69)}) \\ &= 16\{2m^4 + 4m^2 p \cdot k + 2(p \cdot k)^2 \\ &\quad - m^4 - 3m^2 p \cdot k - 2(p \cdot k)^2 + 2(p \cdot k)(p \cdot k') + m^2 p \cdot k' \\ &\quad + 4m^2 p \cdot k \\ &\quad - 3m^4 - 3m^2 p \cdot k \qquad \qquad \qquad - m^2 p \cdot k' \\ &\quad + 4m^4\} \\ &= 32[m^4 - m^2(p \cdot k') + (p \cdot k)(p \cdot k')] : (8.71a) \end{aligned}$$

を得る.

■ $X_{ab}$  の式 (8.71c) について 縮約公式 (A.14) より

$$\begin{aligned} &\gamma^\alpha(\not{p} + m)\gamma_\beta(\not{f}_2 + m)\gamma_\alpha \\ &= -2\not{f}_2\gamma_\beta\not{p} + 4m(p_\beta + f_{2\beta}) - 2m^2\gamma_\beta \equiv Z, \\ &\quad \gamma^\beta(\not{f}_1 + m)Z \\ &= -2(4f_1 \cdot f_2 - 2m\not{f}_2)\not{p} + 4m(\not{p} + \not{f}_2)(\not{f}_1 + m) - 2m^2(-2\not{f}_1 + 4m) \equiv Y, \\ \therefore X_{ab} &= \text{Tr}\{Y(\not{p}' + m)\} \\ &= -8(f_1 \cdot f_2)\text{Tr}\{\not{p}(\not{p}' + m)\} + 4m\text{Tr}\{\not{f}_2\not{p}(\not{p}' + m)\} \\ &\quad + 4m\text{Tr}\{(\not{p} + \not{f}_2)(\not{f}_1 + m)(\not{p}' + m)\} + 4m^2\text{Tr}\{(\not{f}_1 - 2m)(\not{p}' + m)\} \end{aligned}$$

となる。ここでトレースの公式 (A.16), (A.18) を用いて最右辺の各項を評価すると

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\{\not{p}(\not{p}' + m)\} &= 4p \cdot p', \\ \mathrm{Tr}\{\not{f}_2 \not{p}(\not{p}' + m)\} &= 4mf_2 \cdot p, \\ \mathrm{Tr}\{(\not{p} + \not{f}_2)(\not{f}_1 + m)(\not{p}' + m)\} &= m\mathrm{Tr}\{(\not{p} + \not{f}_2)\not{f}_1 + (\not{p} + \not{f}_2)\not{p}'\} = 4m(p + f_2)(f_1 + p'), \\ \mathrm{Tr}\{(\not{f}_1 - 2m)(\not{p}' + m)\} &= 4f_1 \cdot p' - 8m^2\end{aligned}$$

となるので,

$$X_{\mathrm{ab}} = 16[-2(f_1 \cdot f_2)(p \cdot p') + m^2(f_2 \cdot p) + m^2(p + f_2) \cdot (f_1 + p') + m^2(f_1 \cdot p') - 2m^4]$$

を得る。さらに

$$\begin{aligned}\text{保存則 (8.56): } p + k &= p' + k' \quad \rightarrow \quad k \cdot k' = k \cdot (p + k - p') = p \cdot k + p \cdot k', \\ \text{式 (8.57): } f_1 &\equiv p + k, \quad f_2 \equiv p - k'\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}f_1 \cdot f_2 &= (p + k) \cdot (p - k') = m^2 + p \cdot k + p \cdot k' - (p \cdot k + p \cdot k') = m^2, \\ f_2 \cdot p &= m^2 - p \cdot k', \\ f_2 \cdot p' &= p \cdot p' - p' \cdot k' = (m^2 + p \cdot k - p \cdot k') - p \cdot k = m^2 - p \cdot k'\end{aligned}$$

となることに注意すると,

$$\begin{aligned}-2(f_1 \cdot f_2)(p \cdot p') &= -2m^2(m^2 + p \cdot k - p \cdot k') \\ &= -2m^4 - 2m^2p \cdot k + 2m^2p \cdot k', \\ m^2(f_2 \cdot p) &= m^4 - m^2p \cdot k', \\ m^2(p + f_2) \cdot (f_1 + p') &= m^2(p \cdot f_1 + p \cdot p' + f_1 \cdot f_2 + f_2 \cdot p') \\ &= m^2\{(m^2 + p \cdot k) + (m^2 + p \cdot k - p \cdot k') + m^2 + (m^2 - p \cdot k')\} \\ &= 4m^4 + 2m^2p \cdot k - 2m^2p \cdot k', \\ m^2(f_1 \cdot p') &= m^4 + m^2p \cdot k\end{aligned}$$

である。よって

$$\begin{aligned}X_{\mathrm{ab}} &= 16\{-2m^4 - 2m^2p \cdot k + 2m^2p \cdot k' \\ &\quad + m^4 \qquad \qquad - m^2p \cdot k' \\ &\quad + 4m^4 + 2m^2p \cdot k - 2m^2p \cdot k' \\ &\quad + m^4 + m^2p \cdot k \\ &\quad - 2m^4\} \\ &= 16m^2(2m^2 + p \cdot k - p \cdot k') : (8.71\mathrm{c})\end{aligned}$$

を得る。

■p.168 下から 9 行目の式について 第 1 式  $\not{p}\not{u} = -m\not{u}$  は次のように導ける.

$$\begin{aligned} -m\not{u} &= -\not{p}u \quad (\because mu = pu) \\ &= -\varepsilon_\alpha p_\beta \gamma^\alpha \gamma^\beta u \\ &= -\varepsilon_\alpha p_\beta (-\gamma^\beta \gamma^\alpha + 2g^{\alpha\beta})u \\ &= \not{p}\not{u} - 2(\varepsilon \cdot p)u \\ &= \not{p}\not{u}. \end{aligned}$$

最後の等号では「我々が選んだゲージにおいて  $p\varepsilon$  と  $p\varepsilon'$  がゼロになり, これを省いてしまっている」(p.168 下から 4,3 行目).

第 2 式の  $\psi$  は  $u$  の誤りで,  $\not{p}'u = -m\not{u}$  と訂正される.

■ $\mathcal{M}_a$  の式 (8.76) について  $k'$  は  $k$  の誤りであり (本稿では訂正済み), それ故「 $\varepsilon \rightarrow \varepsilon + \lambda k$  ( $\lambda$  は定数) の下で  $\mathcal{M}_a \rightarrow \mathcal{M}_a$  ( $k\cancel{k} = k^2 = 0$  なので)」(p.168 下から 5,4 行目) となる.  $k\cancel{k} = k^2$  については公式 (A.19) を参照する.

■電子スピンについての和と平均 (8.77), (8.78) について スピン, 偏極状態の指標を以下のように定義・明記する.

$$e^-(p, r) + \gamma(k, \alpha) \rightarrow e^-(p', s) + \gamma(k', \beta).$$

すると

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_a &= \frac{-ie^2}{2p \cdot k} \bar{u}'_s \Gamma_a u_r, & \Gamma_a &\equiv \not{\epsilon}'_\beta \cancel{k}'_\alpha, \\ \mathcal{M}_b &= \frac{-ie^2}{2p \cdot k'} \bar{u}'_s \Gamma_b u_r, & \Gamma_a &\equiv \not{\epsilon}_\alpha \cancel{k}'_\beta \not{\epsilon}' \end{aligned}$$

とおける.

$$\text{式 (A.6)} : \gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0, \quad \therefore \not{A}^\dagger = \gamma^0 \not{A} \gamma^0$$

に注意すると

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_a &= \gamma^0 \Gamma_a^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 (\gamma^0 \not{\epsilon}'_\alpha \gamma^0) (\gamma^0 \cancel{k}'_\beta \gamma^0) (\gamma^0 \not{\epsilon}'_\beta \gamma^0) \gamma^0 = \not{\epsilon}_\alpha \cancel{k}'_\beta \not{\epsilon}', \\ \tilde{\Gamma}_b &= \not{\epsilon}'_\beta \cancel{k}'_\alpha \not{\epsilon} \end{aligned}$$

なので, 8.2 節における式 (8.21) から式 (8.25) への計算と同様にして

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{1}{2} \sum_{r,s} (|\mathcal{M}_a|^2 + |\mathcal{M}_b|^2 + \mathcal{M}_a \mathcal{M}_b^* + \mathcal{M}_b \mathcal{M}_a^*) \\ &= \frac{1}{2} \frac{e^4}{4(p \cdot k)^2} \text{Tr} \left[ \frac{\not{p}' + m}{2m} \Gamma_a \frac{\not{p} + m}{2m} \tilde{\Gamma}_a \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{e^4}{4(p \cdot k')^2} \text{Tr} \left[ \frac{\not{p}' + m}{2m} \Gamma_b \frac{\not{p} + m}{2m} \tilde{\Gamma}_b \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{e^4}{4(p \cdot k)(p \cdot k')} \text{Tr} \left[ \frac{\not{p}' + m}{2m} \Gamma_a \frac{\not{p} + m}{2m} \tilde{\Gamma}_b \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{e^4}{4(p \cdot k)(p \cdot k')} \text{Tr} \left[ \frac{\not{p}' + m}{2m} \Gamma_b \frac{\not{p} + m}{2m} \tilde{\Gamma}_a \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^4}{32m^2} \left[ \frac{1}{(p \cdot k)^2} \text{Tr}\{(p' + m)\not{\epsilon}'\not{k}\not{\epsilon}'\not{p} + m)\not{\epsilon}'\not{k}\not{\epsilon}'\} \right. \\
&\quad + \frac{1}{(p \cdot k')^2} \text{Tr}\{(p' + m)\not{\epsilon}'\not{k}'\not{\epsilon}'\not{p}' + m)\not{\epsilon}'\not{k}'\not{\epsilon}'\} \\
&\quad + \frac{1}{(p \cdot k)(p \cdot k')} \text{Tr}\{(p' + m)\not{\epsilon}'\not{k}\not{\epsilon}'\not{p} + m)\not{\epsilon}'\not{k}'\not{\epsilon}'\} \\
&\quad \left. + \frac{1}{(p \cdot k)(p \cdot k')} \text{Tr}\{(p' + m)\not{\epsilon}'\not{k}'\not{\epsilon}'\not{p}' + m)\not{\epsilon}'\not{k}\not{\epsilon}'\} \right]
\end{aligned}$$

を得る.

■p.169 下から 7 行目の  $Y_{aa}$  の式について 偶数個の  $\gamma$  行列を含む項が生き残るので, 式 (8.78a) の  $Y_{aa}$  は

$$Y_{aa} = \text{Tr}\{\not{\epsilon}'\not{k}\not{p}\not{\epsilon}'\not{p}'\} + m^2 \text{Tr}\{\not{\epsilon}'\not{k}\not{\epsilon}'\not{k}'\}$$

となり, 右辺第 2 項は  $\not{k}\not{\epsilon}'\not{k} = -\not{k}\not{k} = 0$  より消える.

■ $Y_{aa}$  の式 (8.81a) について 第 2 の等号ではトレースの公式 (A.18b) を用い,

$$\begin{aligned}
\text{Tr}\{\not{\epsilon}'\not{k}\not{\epsilon}'\not{p}'\} &= 4\{(\varepsilon' \cdot p')(\varepsilon' \cdot p') - (\varepsilon \cdot \varepsilon')(k \cdot p') + (\varepsilon' \cdot p')(k \cdot \varepsilon')\} \\
&= 4\{2(\varepsilon' \cdot p')(\varepsilon' \cdot p') + k \cdot p'\}
\end{aligned}$$

とすれば良い.

■ $Y_{ab}$  の式 (8.81c) の導出  $Y_{ab}$  の式 (8.78c) のうち偶数個の  $\gamma$  行列を含む項が生き残る.  $p' = p + k - k'$  を代入すると

$$Y_{ab} = \text{Tr}\{\not{\epsilon}'\not{k}\not{p}\not{\epsilon}'\not{k}'\not{\epsilon}'(p + k - k')\} + m^2 \text{Tr}\{\not{\epsilon}'\not{k}\not{\epsilon}'\not{k}'\not{\epsilon}'\}. \quad (204)$$

上式 (204) の第 1 項において

$$\begin{aligned}
&\text{Tr}\{\not{\epsilon}'\not{k}\not{p}\not{\epsilon}'\not{k}'\not{\epsilon}'\not{p}\} \\
&= \text{Tr}\{\not{\epsilon}'\not{k}\not{\epsilon}'\not{p}'\not{k}'\not{p}\} \quad (\because \text{式 (8.75b), (8.80d) より } \not{p}\not{\epsilon}' = -\not{\epsilon}'\not{p}, \not{\epsilon}'\not{p} = -\not{p}\not{\epsilon}') \\
&= -m^2 \text{Tr}\{\not{\epsilon}'\not{k}\not{\epsilon}'\not{k}'\not{\epsilon}'\} + 2(p \cdot k') \text{Tr}\{\not{\epsilon}'\not{k}\not{\epsilon}'\not{p}\} \quad (\because \not{p}\not{k}' = -\not{k}'\not{p} + 2p \cdot k', \not{p}\not{p} = m^2)
\end{aligned}$$

であり, このうち最右辺第 1 項は式 (204) の第 2 項と相殺し, 第 2 項は

$$2(p \cdot k')[-\text{Tr}\{\not{\epsilon}'\not{k}\not{\epsilon}'\not{p}\not{\epsilon}'\} + 2(\varepsilon \cdot \varepsilon') \text{Tr}\{\not{\epsilon}'\not{k}\not{p}\}] \quad (\because \not{\epsilon}'\not{\epsilon}' = -\not{\epsilon}'\not{\epsilon}' + 2\varepsilon \cdot \varepsilon')$$

となる. ここにトレース公式 (A.18b):

$$\begin{aligned}
\text{Tr}\{\not{\epsilon}'\not{k}\not{\epsilon}'\not{p}\not{\epsilon}'\} &= \text{Tr}\{\not{\epsilon}'\not{k}\not{\epsilon}'\not{p}\} \quad (\text{p.169 下から 9, 8 行目}) \\
&= 4\{(\varepsilon' \cdot k)(\varepsilon' \cdot p) - (\varepsilon' \cdot \varepsilon')(k \cdot p) + (\varepsilon' \cdot p)(k \cdot \varepsilon')\} \\
&= 4k \cdot p, \quad (\because \varepsilon' \cdot p = 0, \varepsilon' \cdot \varepsilon' = -1) \\
\text{Tr}\{\not{\epsilon}'\not{k}\not{p}\not{\epsilon}'\} &= 4\{(\varepsilon' \cdot k)(p \cdot \varepsilon) - (\varepsilon' \cdot p)(k \cdot \varepsilon) + (\varepsilon' \cdot \varepsilon)(k \cdot p)\} \\
&= 4(\varepsilon' \cdot \varepsilon)(k \cdot p) \quad (\because p \cdot \varepsilon = 0, \varepsilon' \cdot p = 0)
\end{aligned}$$

を代入すると

$$8(p \cdot k)(p \cdot k')[2(\varepsilon \cdot \varepsilon')^2 - 1] \quad (205)$$

と書き換えられる。また

$$\begin{aligned}
& \text{Tr}\{\not{\epsilon}' \not{k} \not{p} \not{\epsilon}' \not{k}' \not{\epsilon}\} \\
&= -\text{Tr}\{\not{\epsilon}' \not{k} \not{\epsilon} \not{p} \not{k}' \not{\epsilon}\} + 2(\epsilon' \cdot k) \text{Tr}\{\not{k} \not{p} \not{\epsilon}' \not{k}' \not{\epsilon}\} \\
&\quad (\text{右端の } \not{k} \text{ を左端に移動して作られる } \not{k} \not{\epsilon}' \text{ に } -\not{\epsilon}' \not{k} + 2\epsilon' \cdot k \text{ を代入する}) \\
&= 2(\epsilon' \cdot k) \text{Tr}\{\not{k} \not{p} \not{\epsilon}' \not{k}'\} \\
&\quad (\not{k} \not{\epsilon} = 0 \text{ より第 1 項は消える。第 2 項の右端の } \not{\epsilon} \text{ を左端に移動し } \not{\epsilon} \not{k} \not{\epsilon} = -\not{k} \not{\epsilon} \not{\epsilon} = \not{k} \text{ を用いる。}) \\
&= -8(k \cdot \epsilon')^2 (p \cdot k') \quad (\because \text{トレース公式 (A.18b), } \epsilon' \cdot k' = 0, p \cdot \epsilon' = 0) \tag{206}
\end{aligned}$$

とできる。さらに

$$\begin{aligned}
& -\text{Tr}\{\not{\epsilon}' \not{k} \not{\epsilon} \not{p} \not{\epsilon}' \not{k}' \not{\epsilon}\} \\
&= \text{Tr}\{\not{\epsilon}' \not{k} \not{\epsilon} \not{p} \not{\epsilon}' (\not{k}' \not{\epsilon}') \not{\epsilon}\} - 2(\epsilon \cdot k') \text{Tr}\{\not{\epsilon}' \not{k} \not{\epsilon} \not{p} \not{\epsilon}' \not{k}'\} \quad (\because \not{\epsilon} \not{k}' = -\not{k}' \not{\epsilon} + 2\epsilon \cdot k') \\
&= -2(\epsilon \cdot k') \text{Tr}\{\not{k} \not{\epsilon} \not{p} \not{k}'\} \\
&\quad (\not{k}' \not{\epsilon}' = 0 \text{ より第 1 項は消える。第 2 項の左端の } \not{\epsilon}' \text{ を右端に移動し } \not{\epsilon}' \not{k}' \not{\epsilon}' = -\not{k}' \not{\epsilon}' \not{\epsilon}' = \not{k}' \text{ を用いる}) \\
&= 8(k' \cdot \epsilon)^2 (p \cdot k) \quad (\because \text{トレース公式 (A.18b), } k \cdot \epsilon = 0, \epsilon \cdot p = 0) \tag{207}
\end{aligned}$$

である。式 (205), (206), (207) を足し合わせると  $Y_{ab}$  の式 (8.81c) 右辺になる。

■ Klein-Nishina の公式から非偏極断面積の再導出 (式 (8.83) の箇所) について Klein-Nishina の公式 (8.82) において  $\epsilon \rightarrow \epsilon_\alpha$ ,  $\epsilon' \rightarrow \epsilon_{\beta'}$  と光子偏極の添字  $\alpha, \beta$  を明記し, これらについて和と平均の操作を施すと

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 (\text{式 (8.82)}) \\
&= \frac{\alpha^2}{4m^2} \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 \left\{ 2 \times \left(\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - 2\right) + 4 \times \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta) \right\} \\
&= \frac{\alpha^2}{2m^2} \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 \left\{ \frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - \sin^2 \theta \right\} : (8.74)
\end{aligned}$$

となる。

## 8.7 外場による散乱

量子ゆらぎが重要ではない外部電磁場  $A_e^\alpha(x)$  は, 古典場として記述するのが適切である。より一般には S 行列展開において,  $A^\alpha(x)$  を量子場と古典場の和  $A^\alpha(x) + A_e^\alpha(x)$  に置き換えれば良い。

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ie)^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \text{T} \{ N[\bar{\psi}(A + A_e)\psi]_{x_1} \cdots N[\bar{\psi}(A + A_e)\psi]_{x_n} \}. \tag{208}$$

特に静的な外場

$$A_e^\alpha(x) = A_e^\alpha(\mathbf{x})$$

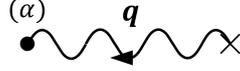
を考えると, 次の Feynman 規則が追加される [7.3 節のノートにおける規則 9 である].

(i) Feynman 振幅と S 行列要素を関係付ける式 (177) において

$$(2\pi)^4 \delta^{(4)} \left( \sum p'_f - \sum p_i \right) \rightarrow (2\pi) \delta \left( \sum E'_f - \sum E_i \right)$$

と置き換える。

(ii) 荷電粒子と外部の静的電磁場  $A_{e\alpha}(\mathbf{x})$  との相互作用



(× 印は外場の源を表す) それぞれに対して, 因子

$$A_{e\alpha}(\mathbf{q}) = \int d^3x e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} A_{e\alpha}(\mathbf{x})$$

を充てる.  $\mathbf{q}$  は場の源 (×) から粒子へ移行する運動量である.

[結節点で運動量を保存させる.]

このことを見るための簡単な例として, 静的な外場  $A_e^\alpha(\mathbf{x})$  による電子 (質量  $m$ ) の散乱

$$|i\rangle = |e^- \mathbf{p} r\rangle \rightarrow |f\rangle = |e^- \mathbf{p}' s\rangle$$

を取り上げる. 最低次の近似で, この過程の S 行列要素は

$$\begin{aligned} \langle f | S_e^{(1)} | i \rangle &= \left[ (2\pi) \delta(E' - E) \left( \frac{m}{VE} \right)^{1/2} \left( \frac{m}{VE'} \right)^{1/2} \right] \mathcal{M}, \\ \mathcal{M} &= ie \bar{u}_s(\mathbf{p}') A_e(\mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}) u_r(\mathbf{p}) \end{aligned} \quad (209)$$

と計算される ( $E \equiv E_{\mathbf{p}}, E' \equiv E_{\mathbf{p}'}$ ) [導出は本稿次節]. 対応する運動量空間の Feynman ダイアグラムを図 35 に示す. これを 7.2 節における量子場による散乱 (図 22) の式 (7.31), (7.32) と比べると,

$$\begin{aligned} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\mathbf{p}' + \mathbf{k}' - \mathbf{p}) &\rightarrow (2\pi) \delta(E' - E), \\ \text{光子の因子} \left( \frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}'}} \right)^{1/2} \varepsilon_\alpha(\mathbf{k}') &\rightarrow \text{外場の因子} A_{e\alpha}(\mathbf{q}) \end{aligned}$$

と置き換わっている. これは上記の規則 (i), (ii) へと一般化される. なお, この例で言うと

- 始・終状態とで運動量が保存しないのは, 静的な外場の仮定において, 外場から電子への運動量  $\mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}$  の移行に伴う外場の源の反跳を無視しているためである.
- デルタ関数  $\delta(E' - E)$  は静的な外場のエネルギーが一定であることに対応して, 残りの粒子 (電子) だけでエネルギーが保存されることを意味している. 弾性散乱の条件  $E' = E$  より  $|\mathbf{p}'| = |\mathbf{p}|$  としなければならない.

次に任意の静的な外場  $A_e(x)$  による電子散乱について, 電子の散乱方向の立体角  $d\Omega'$  に関する微分断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega'} = \left( \frac{m}{2\pi} \right)^2 |\mathcal{M}|^2 = \left( \frac{me}{2\pi} \right)^2 |\bar{u}_s(\mathbf{p}') A_e(\mathbf{q}) u_r(\mathbf{p})|^2 \quad (8.91)$$

で与えられる (導出は下記).

特に重い原子核の周りの Coulomb 場

$$A_e^\alpha(x) = \left( \frac{Ze}{4\pi|\mathbf{x}|}, 0, 0, 0 \right) \quad (8.92a)$$

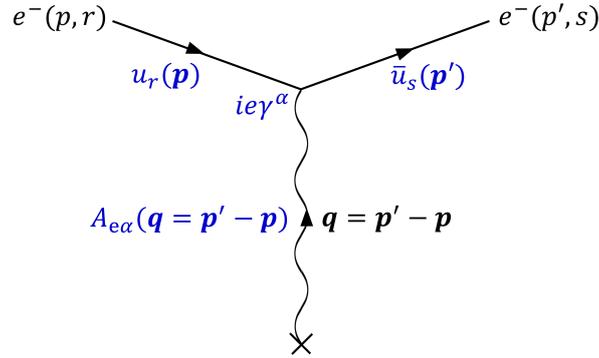


図 35 静的な外場による電子散乱. × 印は外場の源を表す.  $|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'|$  である.

による電子散乱 (Mott 散乱) に対して, 電子のスピン状態に関する平均と和をとった非偏極断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega'} = \frac{(\alpha Z)^2}{4E^2 v^4 \sin^4(\theta/2)} [1 - v^2 \sin^2(\theta/2)] \quad (8.93b)$$

と計算される (導出は下記). ただし  $\theta$  は散乱角 ( $\mathbf{p}'$  の  $\mathbf{p}$  との成す角) であり, また  $v = |\mathbf{p}|/E$  である. 非相対論的極限をとると, これは Rutherford の公式

$$\frac{d\sigma}{d\Omega'} = \frac{(\alpha Z)^2}{4m^2 v^4 \sin^4(\theta/2)}$$

になる [教科書の式 (8.95) における分母の  $v^2$  を  $v^4$  に訂正した [16, p.65]].

Coulomb 散乱では

- 非相対論的極限 → スピンが保存する (図 36 参照).
- 相対論的極限 → ヘリシティが保存する (図 37 参照).

(本稿では詳しくは説明しない.)

### 8.7 節, 式の導出など

■外場による散乱の断面積 (8.91) の導出 充分長い有限の反応時間  $T$  を想定すると, 式 (209) より単位時間の遷移率は

$$w = \frac{1}{T} |\langle f | S_e^{(1)} | i \rangle|^2 = 2\pi \delta(E' - E) \left( \frac{m}{VE} \right)^2 |\mathcal{M}|^2 \quad (210)$$

で与えられる [教科書 p.173, 1.11 の式において  $\omega \rightarrow \pi$  と訂正した. 本稿次節で補足]. これに状態数

$$\frac{V d^3 p'}{(2\pi)^3} = \frac{V |\mathbf{p}'|^2 d|\mathbf{p}'| d\Omega'}{(2\pi)^3} = \frac{V |\mathbf{p}'| E' dE' d\Omega'}{(2\pi)^3}$$

を掛け, さらに入射電子の流束  $v/V = |\mathbf{p}|/(VE)$  で割れば, 微分断面積 (8.91) が得られる [本稿次節で補足].

■Coulomb 散乱の非偏極断面積 (8.93b) の導出 Coulomb 場 (8.92a) の Fourier 成分

$$A_e^\alpha(\mathbf{q}) = \left( \frac{Ze}{|\mathbf{q}|^2}, 0, 0, 0 \right) \quad (8.92b)$$

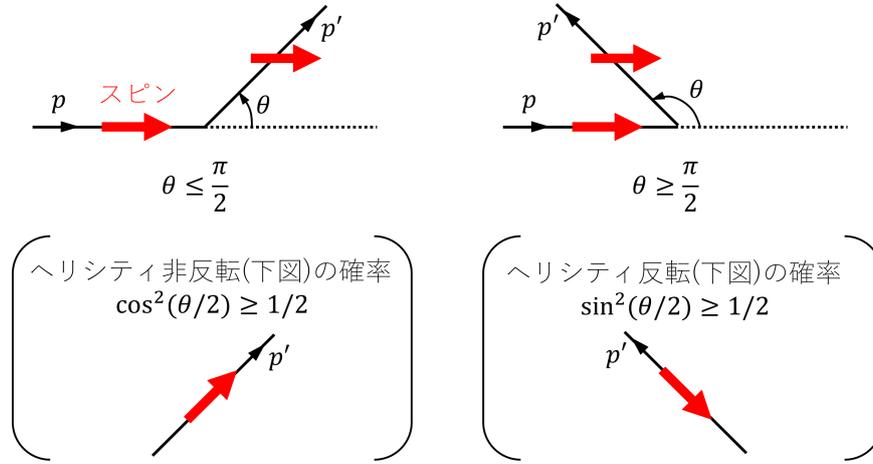


図 36 非相対論的極限  $|\mathbf{p}| \ll E$  での Coulomb 散乱 : スピンが保存する

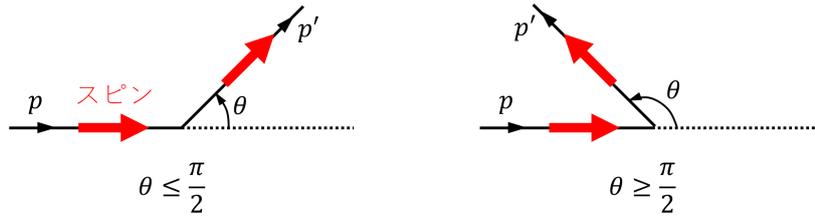


図 37 相対論的極限  $E \gg m$  での Coulomb 散乱 : ヘリシティが保存する

[本稿次節で補足] を一般式 (8.91) に代入し, 電子のスピン状態に関する和と平均化  $\frac{1}{2} \sum_{r,s}$  を施すと, 非偏極断面積

$$\begin{aligned}
 \frac{d\sigma}{d\Omega'} &= \frac{(2m\alpha Z)^2}{|\mathbf{q}|^4} \frac{1}{2} \sum_{r,s} |\bar{u}_s(\mathbf{p}') \gamma^0 u_r(\mathbf{p})|^2 \\
 &= \frac{(\alpha Z)^2}{2|\mathbf{q}|^4} \text{Tr} \{ (\not{\mathbf{p}}' + m) \gamma^0 (\not{\mathbf{p}} + m) \gamma^0 \} \\
 &= \frac{2(\alpha Z)^2}{|\mathbf{q}|^4} (E^2 + \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' + m^2)
 \end{aligned} \tag{8.93a}$$

が得られる [本稿次節で補足]. さらに

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' = |\mathbf{p}|^2 \cos \theta, \quad |\mathbf{q}|^2 = |\mathbf{p}' - \mathbf{p}|^2 = 4|\mathbf{p}|^2 \sin^2(\theta/2)$$

の関係を用いると, これを式 (8.93b) へと書き換えられる [本稿次節で補足].

## 8.7 について

■外場による電子散乱の S 行列要素 (209) の導出 S 演算子 (208) において散乱に最低次の寄与をするのは, 1 次の項

$$S_e^{(1)} = ie \int d^4x \bar{\psi}^-(x) \mathcal{A}_e(x) \psi^+(x)$$

である.  $p = (E, \mathbf{p}), p' = (E', \mathbf{p}')$  と書くと, その行列要素は

$$\begin{aligned} \langle f | S_e^{(1)} | i \rangle &= \langle e^{-\mathbf{p}' \cdot \mathbf{s}} | ie \int d^4 x \bar{\psi}^-(x) A_e(x) \psi^+(x) | e^{-\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} \rangle \\ &= ie \int d^4 x \left[ \left( \frac{m}{VE'} \right)^{1/2} \bar{u}_s(\mathbf{p}') e^{i\mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}} \right] \gamma^\alpha \left[ \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} A_{e\alpha}(\mathbf{q}) e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} \right] \left[ \left( \frac{m}{VE} \right)^{1/2} u_r(\mathbf{p}) e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \right] \\ &= \left( \frac{m}{VE'} \right)^{1/2} \left( \frac{m}{VE} \right)^{1/2} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \left[ \int d^4 x e^{i\mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \right] ie \bar{u}_s(\mathbf{p}') \gamma^\alpha A_{e\alpha}(\mathbf{q}) u_r(\mathbf{p}) \end{aligned}$$

であり, 最右辺の座標  $x$  に関する積分は

$$\int dt e^{i(E'-E)t} \int d^3 x e^{-i(\mathbf{p}' - \mathbf{p} - \mathbf{q}) \cdot \mathbf{x}} = (2\pi)^4 \delta(E' - E) \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p} - \mathbf{q})$$

となることに注意して  $\mathbf{q}$  に関する積分を実行すると, S 行列要素の式 (209) が得られる.

■遷移率の式 (210) について 8.1 節の一般式 (8.2)–(8.6) に対応して

$$\begin{aligned} 2\pi\delta(E' - E) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{i(E'-E)t} \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \delta_T(E' - E), \\ [\delta_T(E' - E)]^2 &\simeq \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{i(E'-E)t} 2\pi\delta(E' - E) \\ &= 2\pi T \delta(E' - E) \quad (\delta \text{関数があるので } e^{i(E'-E)t} \text{ を } 1 \text{ とおける}) \end{aligned}$$

なので,

$$[\delta(E' - E)]^2 \simeq \frac{1}{(2\pi)^2} [\delta_T(E' - E)]^2 \simeq \frac{T}{2\pi} \delta(E' - E), \quad T \rightarrow \infty \text{ で } \simeq \rightarrow =$$

を用いれば良い.

■微分断面積 (8.91) の導出の補足 p.173, 1.14 の状態数において

$$E' = \sqrt{m^2 + |\mathbf{p}'|^2}, \quad \therefore dE' = \frac{|\mathbf{p}'| d|\mathbf{p}'|}{E'}$$

微分断面積 (8.91) は

$$\begin{aligned} d\sigma &= \int_{E'=0}^{E'=\infty} \underbrace{2\pi\delta(E' - E) \left( \frac{m}{VE} \right)^2 |\mathcal{M}|^2}_w \underbrace{\frac{V|\mathbf{p}'|E'dE'd\Omega'}{(2\pi)^3}}_{\text{状態数}} \frac{VE}{|\mathbf{p}|} \\ &= \left( \frac{m}{2\pi} \right)^2 |\mathcal{M}|^2 d\Omega' \quad (\because \delta \text{関数の下で } E' = E, |\mathbf{p}'| = |\mathbf{p}|) \end{aligned}$$

と導ける.

■Coulomb 場の Fourier 成分 (8.92b) について 式 (5.43) の箇所で確かめたように,

$$\int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}}}{|\mathbf{q}|^2} = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}$$

である. これはよく知られているように,  $G(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}$  が Poisson 方程式の Green 関数であることを意味する. 実際, Green 関数の性質  $\Delta G(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})$  は Fourier 成分に対する関係

$$-|\mathbf{q}|^2 G(\mathbf{q}) = 1, \quad \therefore G(\mathbf{q}) = -\frac{1}{|\mathbf{q}|^2}$$

になる.

■非偏極断面積 (8.93a) について 第2の等号は式 (8.25):

$$X \equiv \frac{1}{2} \sum_{r,s} |\bar{u}_s(\mathbf{p}') \Gamma u_r(\mathbf{p})|^2 = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ \frac{\not{p}' + m}{2m} \Gamma \frac{\not{p} + m}{2m} \tilde{\Gamma} \right] \quad (\tilde{\Gamma} \equiv \gamma^0 \Gamma^\dagger \gamma^0)$$

から分かる. 第3の等号では

$$\begin{aligned} & \text{Tr}\{(\not{p}' + m)\gamma^0(\not{p} + m)\gamma^0\} \\ &= p'_\alpha p_\beta \text{Tr}\{\gamma^\alpha \gamma^0 \gamma^\beta \gamma^0\} + m^2 \text{Tr}\{\gamma^0 \gamma^0\} \quad (\because \text{公式 (A.16)}) \\ &= 4p'_\alpha p_\beta (g^{\alpha 0} g^{\beta 0} - g^{\alpha\beta} g^{00} + g^{\alpha 0} g^{0\beta}) + 4m^2 \quad (\because \text{公式 (A.16)}, \text{Tr}\{\gamma^0 \gamma^0\} = \text{Tr}(1) = 4) \\ &= 4(E'E - \mathbf{p}' \cdot \mathbf{p} + E'E) + 4m^2 \\ &= 4(E^2 + \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' + m^2) \quad (\because E = E') \end{aligned}$$

とすれば良い.

■Mott 散乱の公式 (8.93b) について これを得るには

$$\begin{aligned} E^2 + \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' + m^2 &= E^2 + |\mathbf{p}|^2 \cos \theta + m^2 \\ &= E^2 + |\mathbf{p}|^2 \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) + m^2 \\ &= E^2 + (|\mathbf{p}|^2 + m^2) - 2(Ev)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ &= 2E^2 \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

とすれば良い.

Mott 散乱の公式 (8.93b) はその導き方より相対論的極限  $E \gg m$  の近似を含まず, それ故, 非相対論的極限として Rutherford の公式 (8.95) を含んでいる.

■p.175 下6行~p.176, l.1 の確認 正ヘリシティを持つ電子が散乱後, 正・負のヘリシティを持つ確率  $\propto$ (8.98):

$$X_\pm = \frac{1}{16m^2} \text{Tr}\{(\not{p}' + m)\gamma^0(1 + \gamma^5)(\not{p} + m)\gamma^0(1 \pm \gamma^5)\}$$

が,

- $X_+$  に寄与するのは  $\not{p}$  と  $\not{p}'$  を含む項だけで,  $X_+ = O((E/m)^2)$
- $X_-$  に寄与するのは  $m^2$  に比例する項だけで,  $X_- = O(1)$

であることを確かめる. 偶数個の  $\gamma$  行列を含む項だけをとり出せば良いから,

$$\begin{aligned} X_\pm &= \frac{1}{16m^2} [p'_\alpha p_\beta \text{Tr}\{\gamma^\alpha \gamma^0 (1 + \gamma^5) \gamma^\beta \gamma^0 (1 \pm \gamma^5)\} + m^2 \text{Tr}\{\gamma^0 (1 + \gamma^5) \gamma^0 (1 \pm \gamma^5)\}] \\ &= \frac{1}{16m^2} p'_\alpha p_\beta [\text{Tr}\{\gamma^\alpha \gamma^0 \gamma^\beta \gamma^0\} \pm \text{Tr}\{\gamma^\alpha \gamma^0 \gamma^5 \gamma^\beta \gamma^0 \gamma^5\}] + \frac{1}{16} [\text{Tr}\{\gamma^0 \gamma^0\} \pm \text{Tr}\{\gamma^0 \gamma^5 \gamma^0 \gamma^5\}]. \end{aligned}$$

ここで  $(\gamma^0)^2 = (\gamma^5)^2 = 1$ , および, これにより

$$\gamma^\alpha \gamma^0 \gamma^5 \gamma^\beta \gamma^0 \gamma^5 = \gamma^\alpha \gamma^0 \gamma^\beta \gamma^0, \quad \gamma^0 \gamma^5 \gamma^0 \gamma^5 = -(\gamma^0)^2 (\gamma^5)^2 = -1$$

なので、4個の $\gamma$ 行列の積に対するトレースの公式 (A.17) を用い、

$$X_{\pm} = \frac{1}{16m^2} [4(2EE' - p \cdot p') \pm 4(2EE' - p \cdot p')] + \frac{1}{16}(4 \mp 4),$$

$$\therefore \begin{cases} X_+ \text{ に対し第 2 項はゼロで, } & X_+ = (2EE' - p \cdot p')/2m^2 \\ X_- \text{ に対し第 1 項はゼロで, } & X_- = 1/2 \end{cases}$$

#### ■種々の断面積まとめ

- Coulomb 散乱の非偏極断面積 (8.74)
  - ↓ 低エネルギー極限
  - Thomson 散乱 (自由電子による光子の散乱) の非偏極断面積 (1.69a)
- 重い原子核の Coulomb 場による電子散乱 (Mott 散乱) の非偏極断面積 (8.93b)
  - ↓ 非相対論的極限
  - Rutherford の公式 (8.95)

## 8.8 制動放射

- 「本節では、重い原子核の Coulomb 場によって電子が散乱されるときに生じる制動放射を考察する」 (8.8 節, 1.3,4).
- 「ここでは弾性 Coulomb 散乱とは異なり、量子化された輻射場と外場 (原子核 Coulomb 場) が両方とも関わる過程を考察しなければならない」 (8.8 節, 1.7,8).

この過程への最低次の寄与は図 38 に示す 2 つの運動量空間の Feynman ダイアグラムによって表され (S 行列展開 (208) の  $n = 2$  の項に由来, スピン・偏極の指標を省略), 対応する S 行列要素は

$$\langle f|S|i\rangle = 2\pi\delta(E' + \omega - E) \left(\frac{m}{VE}\right)^{1/2} \left(\frac{m}{VE'}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{2V\omega}\right)^{1/2} \mathcal{M}, \quad (8.99)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= -e^2 \bar{u}(\mathbf{p}) [\not{\epsilon}(\mathbf{k}) iS_F(p' + k) A_e(\mathbf{q}) + A_e(\mathbf{q}) iS_F(p - k) \not{\epsilon}(\mathbf{k})] u(\mathbf{p}) \\ &= -ie^2 \bar{u}(\mathbf{p}) \left[ \not{\epsilon}(\mathbf{k}) \frac{\not{p}' + \not{k} + m}{2p' \cdot k} A_e(\mathbf{q}) + A_e(\mathbf{q}) \frac{\not{p} - \not{k} + m}{-2p \cdot k} \not{\epsilon}(\mathbf{k}) \right] u(\mathbf{p}) \end{aligned} \quad (8.100)$$

(ただし  $\mathbf{q} = \mathbf{p}' + \mathbf{k} - \mathbf{p}$ ) となる [本稿次節で補足.  $k = (\omega, \mathbf{k})$  であり, その他の文字の意味は 8.7 節と同様].

ここから電子の散乱方向  $\mathbf{p}'$  の立体角を  $d\Omega'$  として, 微分断面積

$$d\sigma = \frac{m^2}{(2\pi)^5 2\omega} \frac{|\mathbf{p}'|}{|\mathbf{p}|} |\mathcal{M}|^2 d^3k d\Omega' \quad (8.101)$$

が得られる (導出は下記)<sup>\*37</sup>. 1 つの興味ある状況として, 放射される光子のエネルギーが非常に低い “軟光子 (ソフトフォトン)” の極限  $\omega \approx 0$  を考えると, 断面積は

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega'}\right)_B = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega'}\right)_0 \frac{\alpha}{(2\pi)^2} \left[\frac{p' \cdot \epsilon}{p' \cdot k} - \frac{p \cdot \epsilon}{p \cdot k}\right]^2 \frac{d^3k}{\omega} \quad (\omega \approx 0) \quad (8.103)$$

<sup>\*37</sup> ここでは電子スピンの和と平均 [および光子偏極に関する和] を施していない. 電子スピンに関する和と平均をとると, Bethe-Heitler(ベーテ-ハイトラ) の Coulomb 場における制動放射の公式が得られる.

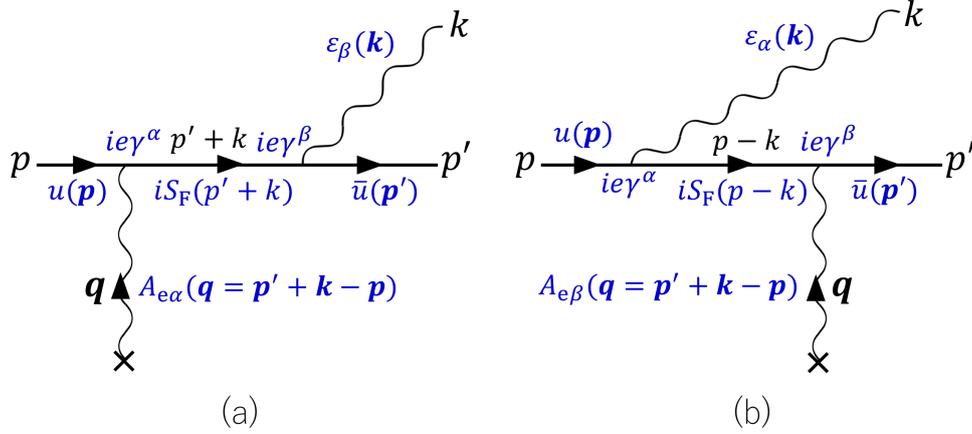


図 38 制動放射を表す運動量空間の Feynman ダイアグラム

と書ける (導出は下記). ただし  $\varepsilon \equiv \varepsilon(\mathbf{k})$  であり,  $(d\sigma/d\Omega')_0$  は光子放射を伴わない弾性散乱の断面積 (8.91) を表す\*38. 以上の結果は任意の静的な外場  $A_{e\alpha}(\mathbf{x})$  に対して成り立つものの, ここでは Coulomb 場による散乱を考えているため  $A_e^\alpha(\mathbf{q}) = (Ze/|\mathbf{q}|^2, 0, 0, 0)$ : (8.92b) としなければならない.

軟光子の制動放射の断面積 (8.103) (および Feynman 振幅 (8.102)) は, 弾性散乱に関する評価量と軟光子に関わる因子との積の形をとっており, 赤外極限  $\omega \rightarrow 0$  において特異性を持つ (赤外発散).

8.3 節のゲージ不変性を利用した手法で光子の偏極状態の和をとると, 断面積 (8.103) は

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega'}\right)_B = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega'}\right)_0 \frac{(-\alpha)}{(2\pi)^2} \left[ \frac{p' \cdot \varepsilon}{p' \cdot k} - \frac{p \cdot \varepsilon}{p \cdot k} \right]^2 \frac{d^3k}{\omega} \quad (\omega \approx 0) \quad (8.104)$$

となる [導出は本稿次節. 断面積をもとの式 (8.103) と同じ記号  $(\frac{d\sigma}{d\Omega'})_B$  で表しているが, 誤解の恐れはあるまい].

### 8.8 節, 式の導出など

■微分断面積 (8.101) の導出 前節と同様, S 行列要素 (8.99) から得られる遷移頻度  $|\langle f|S|i\rangle|^2/T$  に状態数

$$\frac{Vd^3p'Vd^3k}{(2\pi)^6}$$

を掛け, 入射流束  $|\mathbf{p}|/VE$  で割れば良い [本稿次節で補足].

■軟光子の制動放射に関する断面積 (8.103) の導出 軟光子の極限  $\omega \approx 0$  では弾性散乱と同様の関係  $\mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}$ ,  $|\mathbf{p}'| = |\mathbf{p}|$  を想定できる. また Feynman 振幅 (8.100) において, 電子伝播関数の分子から  $\not{k}$  を省き, Dirac 方程式を用いると

$$\mathcal{M} = -ie^2 \bar{u}(\mathbf{p}') A_e(\mathbf{q}) u(\mathbf{p}) \left[ \frac{p' \cdot \varepsilon}{p' \cdot k} - \frac{p \cdot \varepsilon}{p \cdot k} \right] = -e\mathcal{M}_0 \left[ \frac{p' \cdot \varepsilon}{p' \cdot k} - \frac{p \cdot \varepsilon}{p \cdot k} \right] \quad (\omega \approx 0) \quad (8.102)$$

を得る [本稿次節で補足]. ここに  $\mathcal{M}_0$  は光子放射を伴わない弾性散乱の Feynman 振幅 (209) を表す. これを微分断面積の式 (8.102) に代入して式 (8.91) と比べると, 断面積 (8.103) が得られる.

\*38  $(d\sigma/d\Omega')_B$  の添字 B は制動放射 (bremsstrahlung) を表すものと想像される.

## 8.8 について

■Feynman 振幅 (8.100) について 図 38 のダイアグラム (a),(b) に Feynman 規則を適用すると, 対応する Feynman 振幅はそれぞれ

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_a &= A_{e\alpha}(\mathbf{q})\varepsilon_\beta(\mathbf{k})[\bar{u}(\mathbf{p}')ie\gamma^\beta iS_F(p'+k)ie\gamma^\alpha u(\mathbf{p})], \\ \mathcal{M}_b &= \varepsilon_\alpha(\mathbf{k})A_{e\beta}(\mathbf{q})[\bar{u}(\mathbf{p}')ie\gamma^\beta iS_F(p-k)ie\gamma^\alpha u(\mathbf{p})]\end{aligned}$$

と書き下せる. ここで伝播関数の式 (4.63) または (7.24a):

$$S_F(p) = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$$

の分母は  $S_F(p \pm k)$  に対して,

$$(p \pm k)^2 - m^2 = \pm 2p \cdot k$$

と計算される. 以上の和  $\mathcal{M}_a + \mathcal{M}_b$  が Feynman 振幅 (8.100) を与える.

■微分断面積 (8.101) の導出について 詳しく書くと,

$$d\sigma = \int_{E'=0}^{E'=\infty} \underbrace{\frac{1}{T} 2\pi T \delta(E' + \omega - E) \frac{m}{VE} \frac{m}{VE'} \frac{1}{2V\omega}}_{w=| \langle f | S | i \rangle |^2 / T} |\mathcal{M}|^2 \underbrace{\frac{V|\mathbf{p}'|E'dE'd\Omega'}{(2\pi)^3}}_{\text{電子の状態数}} \underbrace{\frac{Vd^3k}{(2\pi)^3}}_{\text{光子の状態数}} \frac{VE}{|\mathbf{p}|}.$$

■軟光子の極限での Feynman 振幅 (8.102) について

$$\bar{u}' \equiv \bar{u}(\mathbf{p}'), \quad \varepsilon^\alpha \equiv \varepsilon^\alpha(\mathbf{k}), \quad A_e^\alpha \equiv A_e^\alpha(\mathbf{q}), \quad u \equiv u(\mathbf{p})$$

とおくと,

$$\begin{aligned}\bar{u}' \not{\epsilon} \not{p}' A_e u &= -\bar{u}' \not{p}' \not{\epsilon} A_e u + 2(p' \cdot \varepsilon) \bar{u}' A_e u \\ (\because \text{公式 (A.19a)} : \not{\epsilon} \not{p}' &= -\not{p}' \not{\epsilon} + 2p' \cdot \varepsilon) \\ &= -m \bar{u}' \not{\epsilon} A_e u + 2(p' \cdot \varepsilon) \bar{u}' A_e u, \\ (\because \text{公式 (A.26)} : \bar{u}' \not{p}' &= m \bar{u}') \\ \bar{u}' A_e \not{p} \not{\epsilon} u &= -\bar{u}' A_e \not{\epsilon} \not{p} u + 2(p \cdot \varepsilon) \bar{u}' A_e u \\ (\because \text{公式 (A.19a)} : \not{p} \not{\epsilon} &= -\not{\epsilon} \not{p} + 2p \cdot \varepsilon) \\ &= -m \bar{u}' A_e \not{\epsilon} u + 2(p \cdot \varepsilon) \bar{u}' A_e u. \\ (\because \text{公式 (A.26)} : \not{p} u &= m u)\end{aligned}$$

Feynman 振幅 (8.100) から電子伝播関数の分子における  $\not{k}$  を除いたものに, 以上 2 式を代入すれば, Feynman 振幅 (8.102) を導ける.

■「この赤外特異性は…… “実電子” の 4 元運動量を持ち, ……発散することから生じている」(p.178 下から 8~6 行目) について 例えば Feynman 振幅 (8.102), 断面積 (8.103) における  $1/(p \cdot k)$  は, Feynman 振幅 (8.100) の伝播関数部分

$$\frac{\not{p} - \not{k} + m}{2p \cdot k} = S_F(p - k)$$

に由来する。これは  $k = 0$  で

$$S_F(p) = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

となり、分母において入射電子の 4 元運動量  $p$  は  $p^2 - m^2 = 0$  を満たすということ。

「電子の内線が質量殻に載る [乗る]」「殻上になる」という俗語は「簡潔ではあるが感心しない」と述べられているのが注目される (p.178 脚注 8)。

■光子の偏極状態について和をとった断面積 (8.104) について

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= -e\mathcal{M}_0 \left[ \frac{p'}{p' \cdot k} - \frac{p}{p \cdot k} \right]_\alpha \varepsilon^\alpha \equiv \mathcal{M}_\alpha \varepsilon^\alpha : (8.102), \\ \therefore \sum_r |\mathcal{M}|^2 &= -\mathcal{M}_\alpha^* \mathcal{M}_\alpha : (8.36) \\ &= -e^2 |\mathcal{M}_0|^2 \left[ \frac{p'}{p' \cdot k} - \frac{p}{p \cdot k} \right]^2. \end{aligned}$$

断面積 (8.101) における  $|\mathcal{M}|^2$  を上式の  $\sum_r |\mathcal{M}|^2$  で置き換え、 $|\mathbf{p}'| = |\mathbf{p}|$  とおくと式 (8.104) が得られる。

## 8.9 赤外発散

現実の実験ではエネルギー分解能が有限なので、エネルギーがある値  $\Delta E$  未満の軟光子を制動放射する散乱も弾性散乱として記録される。よって弾性散乱の実験的な断面積は

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega'} \right)_{\text{Exp}} = \left( \frac{d\sigma}{d\Omega'} \right)_{\text{El}} + \left( \frac{d\sigma}{d\Omega'} \right)_{\text{B}} \quad (8.105)$$

である。ここに  $\left( \frac{d\sigma}{d\Omega'} \right)_{\text{El}}$  は真の弾性散乱 [elastic scattering] の断面積であり、また制動放射断面積 (8.104) の光子エネルギー範囲  $0 \leq \omega \leq \Delta E$  にわたる積分を改めて

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega'} \right)_{\text{B}} = \left( \frac{d\sigma}{d\Omega'} \right)_0 \alpha B, \quad (8.106)$$

$$B = \frac{-1}{(2\pi)^2} \int_{\lambda \leq \omega \leq \Delta E} \frac{d^3k}{\omega} \left[ \frac{p'}{p' \cdot k} - \frac{p}{p \cdot k} \right]^2 \quad (8.107)$$

としている。 $(d\sigma/d\Omega')_0$  は制動放射のない厳密な弾性散乱の断面積  $(d\sigma/d\Omega')_{\text{El}}$  の、最低次の摂動論による計算結果である。

さて、[8.8 節の事情を反映して]  $B$  の被積分関数は  $\omega$  の小さい範囲で赤外発散を起こす。そこで赤外発散を防ぐために、Feynman にならって光子に虚構的な小さい質量  $\lambda (\neq 0)$  を与えて計算し直すと、

$$B(\lambda) = \frac{-1}{(2\pi)^2} \int_{\lambda \leq \omega \leq \Delta E} \frac{d^3k}{\omega_\lambda} \left[ \frac{2p'}{2p' \cdot k + \lambda^2} + \frac{2p}{-2p \cdot k + \lambda^2} \right]^2 \quad (8.110)$$

となる ( $\omega_\lambda \equiv (\lambda^2 + \mathbf{k}^2)^{1/2}$ , 導出は下記)。

式 (8.105) の 2 項の摂動次数をそろえるために、弾性散乱断面積にも  $\alpha$  の 1 次の補正を含めると

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega'} \right)_{\text{El}} = \left( \frac{d\sigma}{d\Omega'} \right)_0 [1 + \alpha R(\lambda)]$$

という形になる (具体的には 9.7 節).  $\lambda \rightarrow 0$  とすると, 補正項  $R(\lambda)$  もまた赤外発散を生じる ( $R(\lambda) \rightarrow -\infty$ ). そしてこの発散は  $B(\lambda)$  の発散  $B(\lambda) \rightarrow B = \infty$  と相殺し, 実験的な断面積

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega'}\right)_{\text{El}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega'}\right)_0 [1 + \alpha\{B(\lambda) + R(\lambda)\} + O(\alpha^2)] \quad (8.112)$$

は有限となる (9.7 節参照,  $\lambda \rightarrow 0$  での有限値  $\alpha\{B(\lambda) + R(\lambda)\}$  が最低次の“輻射補正”を与える)<sup>\*39</sup>. これは赤外発散の困難が, 制動放射と弾性散乱を人為的に区別することに由来していることを意味する.

#### ■エネルギー分解能が実験系に依存していること

実験的な断面積 (8.112) は, 式 (8.107) や式 (8.110) に現れるエネルギー分解能  $\Delta E$  に依存しているため, 実験系の構成によって異なる. このため実験データから計算による補正量を差し引いた“輻射補正を考慮した断面積”を与えることが有効である. このような措置により, 別々の実験による結果の間の比較や, 実験と理論的な  $(d\sigma/d\Omega')_0$  の予言値との比較が可能になる. (p.181 より)

#### ■Bloch-Nordsieck(ブロッホ-ノルトジーク)の定理

摂動のあらゆる次数において, 赤外発散は正確に相殺され,  $\alpha$  のオーダーの有限の輻射補正だけが残りという声明は, Bloch-Nordsieck の定理として有名である. (p.181 より)

- 摂動の全次数を考慮すると,

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega'}\right)_{\text{Exp}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega'}\right)_0 e^{\alpha[B(\lambda)+R(\lambda)]}, \quad \left(\frac{d\sigma}{d\Omega'}\right)_{\text{El}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega'}\right)_0 e^{\alpha R(\lambda)} \text{ と一般化される.}$$

$\lambda \rightarrow 0$  のとき  $R(\lambda) \rightarrow -\infty$  なので, 光子放射のない純粋な弾性散乱の断面積はゼロになる. すなわち真の弾性散乱過程というもの存在しない. 観測される散乱は必ず光子の放射を伴うのである. この結論は, 加速度を与えられた電荷が必ず電磁波を放射するという古典電磁気学の結果と整合している. (p.182 より)

- Bloch-Nordsieck の定理は外場による電子の弾性散乱に限らず, QED のあらゆる過程に当てはまる.

#### 8.9 節, 式の導出など

■ $B(\lambda)$  の式 (8.110) の導出 光子に質量  $\lambda$  を与えると, [偏極状態の和と光子エネルギーの積分を施す前の] 断面積 (8.103) は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega'} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega'}\right)_0 \frac{\alpha}{(2\pi)^2} \left[ \frac{2p' \cdot \varepsilon}{2p' \cdot k + \lambda^2} + \frac{2p \cdot \varepsilon}{-2p \cdot k + \lambda^2} \right]^2 \frac{d^3k}{\omega} \quad (8.108)$$

に置き換わる [本稿次節で補足]. また光子偏極の和をとるには, 質量を持つスピン 1-ボゾンに対する関係

$$\sum_{r=1}^3 \varepsilon_{r\alpha} \varepsilon_{r\beta} = -g_{\alpha\beta} + \frac{k_\alpha k_\beta}{\lambda^2} \quad (8.109)$$

(16.3 節の式 (16.24)–(16.27) を参照) を用いる必要がある. すると光子エネルギー範囲  $(\lambda \leq) \omega_\lambda \leq \Delta E$  の軟光子制動放射の非偏極断面積 (8.106) において, 式 (8.107) の  $B$  は式 (8.110) に修正されることが分かる [本稿次節で補足].

<sup>\*39</sup>  $B$  は制動放射を,  $R$  は輻射補正を表すものと想像される.

## 8.9 について

■  $(d\sigma/d\Omega')_B$  の式 (8.106) について

$$\left[ \text{式 (8.106) の } \left( \frac{d\sigma}{d\Omega'} \right)_B \right] = \int_{0 \leq \omega \leq \Delta E} \left[ \text{式 (8.104) の } \left( \frac{d\sigma}{d\Omega'} \right)_B \right].$$

■ 「 $\omega$  が小さい領域で  $1/\omega$  のように振舞うので」 (式 (8.107) 3 行下) について 式 (8.107) において例えば,

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3k}{\omega} \frac{p^2}{(p \cdot k)^2} &\sim \int \frac{|\mathbf{k}|^2 d|\mathbf{k}| d\Omega}{\omega} \frac{1}{\omega^2} \quad (\because p \cdot k \sim \omega) \\ &\sim \int \frac{d\omega}{\omega}. \quad (\because |\mathbf{k}| = \omega, d|\mathbf{k}| = d\omega) \end{aligned}$$

もっとも (被積分関数)  $\sim 1/\omega$  は, 次元の考察に基づく粗い評価であると考えられる (式 (9.109) の箇所を参照).

■ 光子に質量  $\lambda$  を与えたときの断面積 (8.108) について  $S_F(p) = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$  なので, Feynman 振幅 (8.100) において

$$S_F(p' + k) = \frac{\not{p}' + \not{k} + m}{2p' \cdot k + \lambda^2}, \quad S_F(p - k) = \frac{\not{p} - \not{k} + m}{-2p \cdot k + \lambda^2}$$

だから, 分母が

$$2p' \cdot k \rightarrow 2p' \cdot k + \lambda^2, \quad -2p \cdot k \rightarrow -2p \cdot k + \lambda^2$$

と置き換わる. よって軟光子の極限 (8.102) において  $[\dots]$  内は

$$\frac{p' \cdot \epsilon}{p' \cdot k} - \frac{p \cdot \epsilon}{p \cdot k} = \frac{2p' \cdot \epsilon}{2p' \cdot k} + \frac{2p \cdot \epsilon}{-2p \cdot k} \rightarrow \frac{2p' \cdot \epsilon}{2p' \cdot k + \lambda^2} + \frac{2p \cdot \epsilon}{-2p \cdot k + \lambda^2}$$

と置き換わる. この置き換えを断面積 (8.103) に施すと, 式 (8.108) が得られる.

■ 式 (8.110) の導出について 偏極状態についての和は, 光子に質量を与えたとき

$$\begin{aligned} \sum_r |\mathcal{M}|^2 &= \mathcal{M}_\alpha \mathcal{M}_\beta^* \sum_r \epsilon_r^\alpha \epsilon_r^\beta \quad (\text{式 (8.34)}) \\ &= \mathcal{M}_\alpha \mathcal{M}_\beta^* \left( -g_{\alpha\beta} + \frac{k_\alpha k_\beta}{\lambda^2} \right) \\ &\quad (\because \text{質量がゼロでないときの式 (8.109)}) \\ &= -\mathcal{M}^\alpha \mathcal{M}_\alpha^* \end{aligned}$$

となって, 式 (8.36) と変わらない. ただし最後の等号では式 (8.33):  $k^\alpha \mathcal{M}_\alpha = 0$  より 「 $k_\alpha k_\beta / \lambda^2$  は  $\lambda \rightarrow 0$  の極限において非偏極断面積に寄与を持たない」 (p.180, 1.4) ことを用いた. そこで式 (8.108) の偏極状態についての和は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega'} = - \left( \frac{d\sigma}{d\Omega'} \right)_0 \frac{\alpha}{(2\pi)^2} \left[ \frac{2p'}{2p' \cdot k + \lambda^2} + \frac{2p}{-2p \cdot k + \lambda^2} \right]^2 \frac{d^3k}{\omega}$$

となる. これを  $\Delta E \geq \omega_\lambda \equiv (\lambda^2 + \mathbf{k}^2)^{1/2} \geq \lambda$  の範囲で足し合わせたものが

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega'} \right)_0 \alpha B(\lambda), \quad B(\lambda) \equiv \frac{-1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^3k}{\omega_\lambda} \left[ \frac{2p'}{2p' \cdot k + \lambda^2} + \frac{2p}{-2p \cdot k + \lambda^2} \right]^2 : (8.110)$$

である.

## 第 9 章 輻射補正

QED の最低次の摂動計算に対する高次の補正は輻射補正と呼ばれる。そのような計算を行うと、発散する積分が現れる。これは次の手順により解消される。

1. 理論を正則化する。
  - 全次数において、諸量が有限で数学的によく定義されるように、理論の形を修正する。
2. 繰り込み。
  - 相互作用する物理的な粒子を、相互作用のない (裸の) 粒子と区別する。
  - 物理的な粒子の性質を裸の粒子の性質と関係付け、理論の予言を物理的な粒子の質量や電荷によって表現する。
3. 正則化された理論を再び QED に戻す。
  - 発散は裸の粒子と物理的粒子の関係の部分にだけ残る。  
これは裸の粒子自体を観測できないために、物理的な検証の対象とはなり得ない。
  - 観測可能量、輻射補正は有限となる。

輻射補正の中の最低次補正の一般的な計算方法を 9.1–9.5 節で展開する。

### 9.1 QED における 2 次の輻射補正

輻射補正は仮想光子の放射と再吸収を表す結節点を付け加える補正にあたる。以下、結節点を 2 つだけ追加する 2 次の輻射補正を考える。これは元の行列要素に対する  $\alpha = e^2/4\pi$  程度の補正となる。

今まで  $e, m$  と書いていた裸の粒子の電荷と質量を、それが裸の粒子の電荷と質量であることを明確にするために、これ以降それぞれ  $e_0, m_0$  と書く。2 次の輻射補正として、基のグラフの基本要素に対する図 39 の置き換えが考えられる。図 39(a) は電子の自己エネルギー部分であり (7.1 節)、裸の電子を物理的な電子へ移行させる最低次の過程を表す。図 39(b) は光子の自己エネルギー部分であり、真空偏極ダイアグラムと呼ばれる (7.1 節)。図 39(c) は結節点補正と呼ばれる。

Feynman ルールに基づいて、これらのループ部分に関して以下の積分が現れる (図 39 を参考にせよ)。

$$\begin{aligned}
 ie_0^2 \Sigma(p) &\equiv \frac{(ie_0)^2}{(2\pi)^4} \int d^4k i D_{F\alpha\beta}(k) \gamma^\alpha i S_F(p-k) \gamma^\beta, \\
 ie_0^2 \Pi^{\mu\nu}(q) &\equiv \frac{(ie_0)^2}{(2\pi)^4} (-1) \text{Tr} \int d^4\bar{p} \bar{\gamma}^\mu i S_F(\bar{p}+q) \gamma^\nu i S_F(\bar{p}), \\
 e_0^2 \Lambda^\mu(p', p) &\equiv \frac{(ie_0)^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \gamma^\alpha i S_F(p'-k) \gamma^\nu i S_F(p-k) \gamma^\beta i D_{F\alpha\beta}(k)
 \end{aligned}$$

これらのループ積分は積分変数の運動量が大きくなる場所で発散する。任意の過程に対する最低次の輻射補正を計算する際に発散積分として現れるのは、必ずこれら 3 種類の積分なので、それらの扱い方を確立すれば十分である。(実際、上の置き換えによっては得られないような 2 次の輻射補正も一般に存在するけれど、それらの寄与は有限で数学的によく定義されている。) 9.2–9.5 節において、これら 3 種類の発散積分を正則化した後の繰り込み処方について論じる。

輻射補正と S 行列展開の関係

輻射補正がどのように現れるのかを簡単に見るために、具体例として静的な外場  $A_e^\mu(\mathbf{x})$  (引数が時刻  $t$  に依らない) による電子の弾性散乱を考える。最低次の過程は図 40 の Feynman ダイアグラムで表され、対応する Feynman 振幅は

$$\mathcal{M}^{(0)} = ie_0 \bar{u}(\mathbf{p}') A_e(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) u(\mathbf{p})$$

である (8.7 節)。

このダイアグラムの要素に対して図 39 の置き換えを施すと、2 次輻射補正に対応する図 41 の 4 通りのダイ

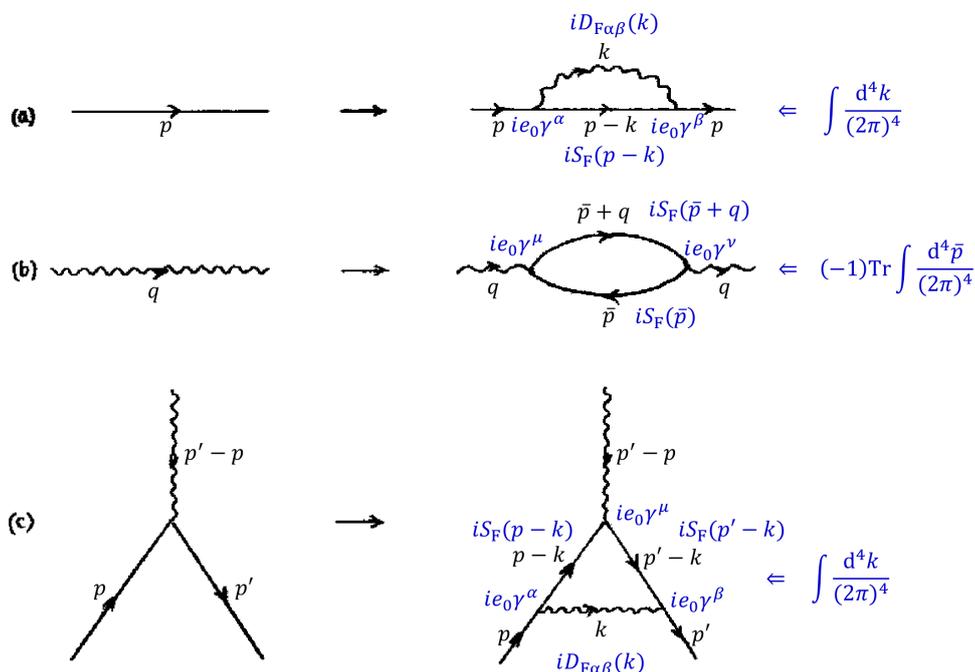


図 39 フェルミオン線, ボゾン線, 結節点に対する 2 次の輻射補正 (教科書の図 9.3(p.189) を改変)

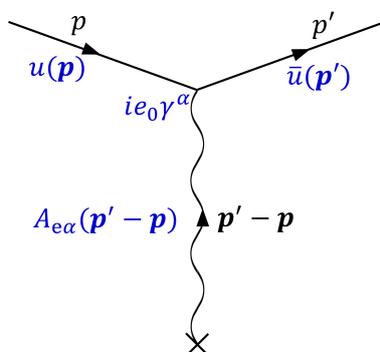


図 40 静的な外場による電子弾性散乱への最低次の寄与 (教科書の図 9.1(p.186) を改変)

ヤグラム (a)–(d) が得られる。それぞれの Feynman 振幅は

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_a^{(2)} &= ie_0 \bar{u}(\mathbf{p}') A_e(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) iS_F(p) \left[ (ie_0)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} iD_{F\alpha\beta}(k) \gamma^\alpha iS_F(p - k) \gamma^\beta \right] u(\mathbf{p}) \\
&= ie_0 \bar{u}(\mathbf{p}') A_e(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) iS_F(p) ie_0^2 \Sigma(p) u(\mathbf{p}), \\
\mathcal{M}_b^{(2)} &= ie_0 \bar{u}(\mathbf{p}') ie_0^2 \Sigma(p') iS_F(p') A_e(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) u(\mathbf{p}), \\
\mathcal{M}_c^{(2)} &= ie_0 \bar{u}(\mathbf{p}') \gamma^\lambda u(\mathbf{p}) iD_{F\lambda\mu}(q) \left[ (ie_0)^2 (-1) \text{Tr} \int \frac{d^4 \bar{p}}{(2\pi)^4} \gamma^\mu iS_F(\bar{p} + q) \gamma^\nu iS_F(\bar{p}) \right] A_{e\nu}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \\
&= ie_0 \bar{u}(\mathbf{p}') \gamma^\lambda u(\mathbf{p}) iD_{F\lambda\mu}(q) ie_0^2 \Pi^{\mu\nu}(q) A_{e\nu}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}), \\
\mathcal{M}_d^{(2)} &= ie_0 \bar{u}(\mathbf{p}') \left[ (ie_0)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma^\alpha S_F(p' - k) \gamma^\mu iS_F(p - k) \gamma^\beta iD_{F\alpha\beta}(k) \right] u(\mathbf{p}) A_{e\mu}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \\
&= ie_0 \bar{u}(\mathbf{p}') e_0^2 \Lambda^\mu(p', p) u(\mathbf{p}) A_{e\mu}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})
\end{aligned}$$

である。

さて、これらが S 行列展開にどのように含まれているのかを考えよう。電磁場を静的な外場  $A_e^\mu(\mathbf{x})$  と輻射場  $A^\mu(x)$  に分けて  $A^\mu(x) \rightarrow A_e^\mu(\mathbf{x}) + A^\mu(x)$  と考えると、S 行列展開は

$$\begin{aligned}
S &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ie_0)^n}{n!} \int d^4 x_1 \cdots d^4 x_n \text{T} \{ N[\bar{\psi}(A + A_e)\psi]_{x_1} \cdots N[\bar{\psi}(A + A_e)\psi]_{x_n} \} : (208) \\
&\simeq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ie_0)^n}{(n-1)!} \int d^4 x_1 \cdots d^4 x_n \text{T} \{ N(\bar{\psi} A_e \psi)_{x_1} N(\bar{\psi} A \psi)_{x_2} \cdots N(\bar{\psi} A \psi)_{x_n} \}
\end{aligned}$$

によって与えられる。ただし第 2 の等号では、外場は弱いものと仮定して  $A_e^\mu(\mathbf{x})$  の 1 次の項だけを拾った。最初の振幅  $\mathcal{M}^{(0)}$  は  $n = 1$  の項から生じる (8.7 節)。2 次の輻射補正は仮想光子の放射と再吸収を表す 2 つの結節点を付け加える補正なので、輻射場  $A^\mu(x)$  を 2 つ含んでいる  $n = 3$  の項から現れる。

### Furry の定理

Compton 散乱の最低次 (2 次) 基本過程を表すグラフに自己エネルギー部分の挿入や結節点補正の導入を行うことでは得られない Compton 散乱の 4 次過程の例として、図 42 の三角グラフが挙げられている。このように閉じたフェルミオンループを含むダイヤグラムは一般に、必ずループの矢の向きが逆のダイヤグラムと対になって現れ、ループが奇数個の結節点を持つ場合にはそれぞれからの寄与は互いに打ち消しあう (Furry の定理)。図 42 の三角ダイヤグラムに関して言えば、このことは直観的には次のように説明できる。すなわちフェルミオン線の矢の向きを逆転させることは電子と陽電子の入れ換えに対応し、したがって 3 つの頂点に付随する  $e_0$  を  $-e_0$  に置き換えることと等価である。このため矢の向きを逆転したダイヤグラムの Feynman 振幅は、もとのダイヤグラムの振幅と因子  $(-1)^3$  だけ異なり、もとの振幅と相殺する。

## 9.2 光子の自己エネルギー

### 正則化

光子の自己エネルギー部分に関するループ積分 (9.8):

$$ie_0^2 \Pi^{\mu\nu}(k) = \frac{-e_0^2}{(2\pi)^4} \int d^4 p \frac{\text{Tr}[\gamma^\mu (\not{p} + \not{k} + m_0) \gamma^\nu (\not{p} + m_0)]}{[(p+k)^2 - m_0^2 + i\varepsilon][p^2 - m_0^2 + i\varepsilon]} \quad (211)$$

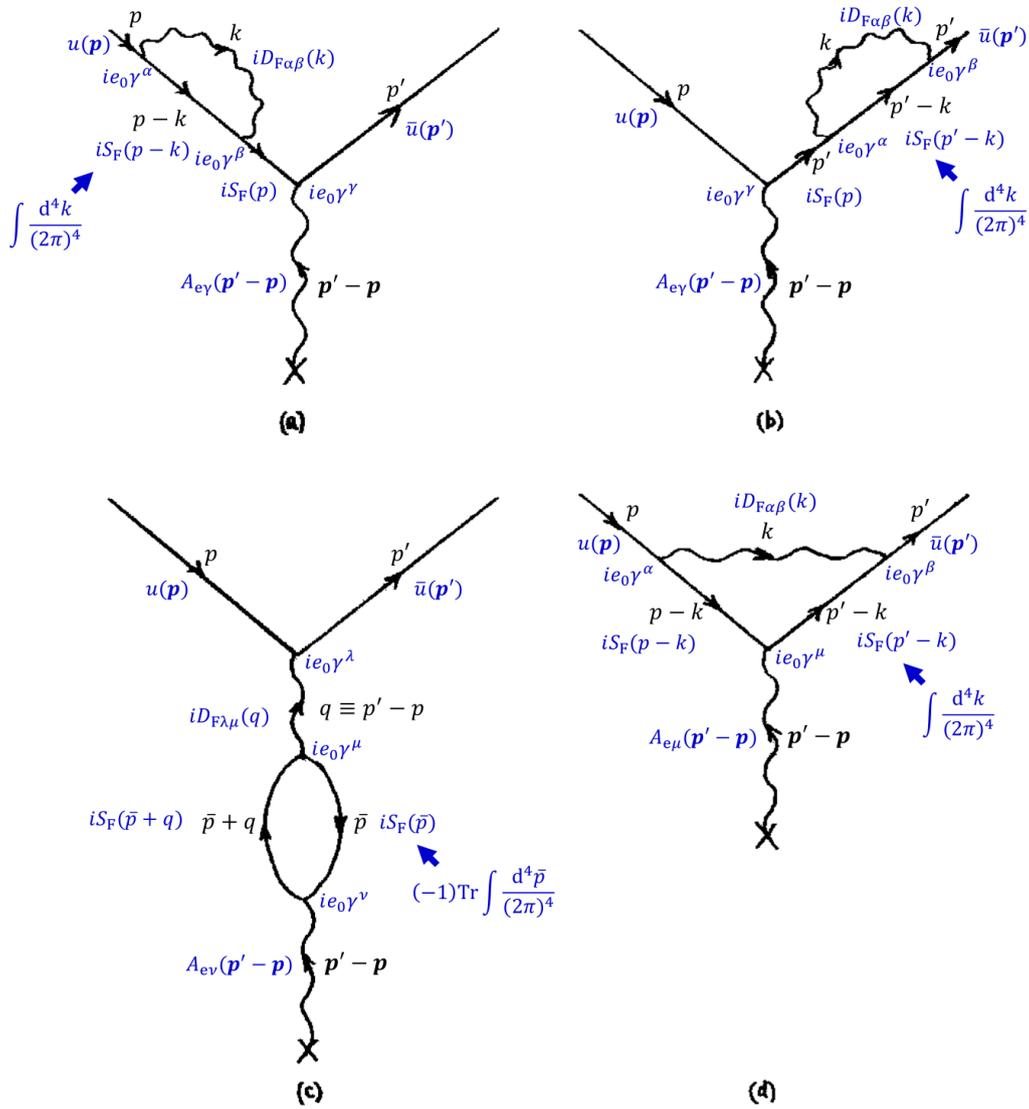


図 41 電子散乱への 2 次輻射補正の 4 通りの寄与を表すグラフ (教科書の図 9.2(p.188) を改変)

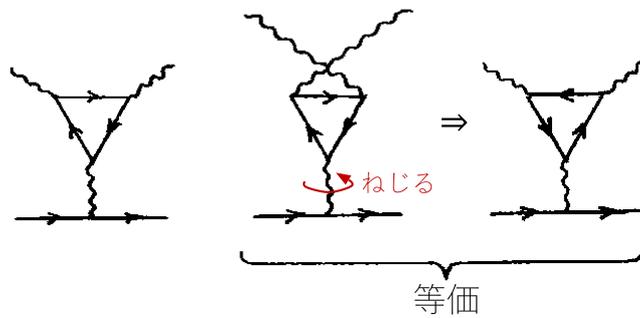


図 42 Compton 散乱の 4 次過程を表す三角グラフ (教科書の図 9.6(p.191) を改変)

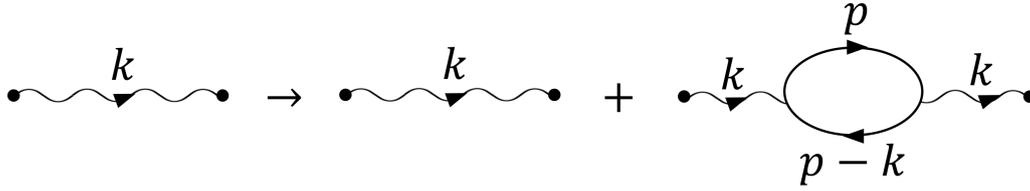


図 43 光子伝播関数の修正 (教科書の図 9.8(p.194))

[右辺の負号は 2 つの伝播関数  $S_F$  の係数  $i$  に由来] は,  $p$  が大きいところで発散する. これを正則化する, すなわち数学的によく定義された有限積分へと修正するには, 例えば被積分関数に切断因子

$$f(p^2, \Lambda^2) = \left( \frac{-\Lambda^2}{p^2 - \Lambda^2} \right)^2$$

を掛ければ良い.  $\Lambda$  の値を大きな有限の値にとれば, [それに比べて  $p$  の小さいところで]  $f \simeq 1$  であり, 積分は  $p$  の大きいところで  $\int d^4p/p^6$  のように振舞い収束する. 現時点ではこの措置を単なる数学的な道具とも, QED の高エネルギー領域において本質的な修正とも見なせる. この点については後に [9.5 節, pp.210–211 にて] 再論される\*40. ただしこの措置はこのままでは実光子の固有質量をゼロと保証できず, また理論のゲージ不変性を破る. 光子の固有質量がゼロとなり, ゲージ不変性が保証されるような別の正則化の方法も存在する. 今後は  $\Pi^{\mu\nu}(k)$  などと書く場合, それは式 (211) そのものではなく, 何らかの方法で既に正則化がなされたものと見なすことにする.

### 繰り込み

図 43 のように光子伝播関数を, 光子の自己エネルギー部分を挿入したグラフと一緒に考える修正を行う. これは

$$\begin{aligned} iD_{F\alpha\beta}(k) &\rightarrow iD_{F\alpha\beta}(k) + iD_{F\alpha\mu}(k)ie_0^2\Pi^{\mu\nu}(k)iD_{F\nu\beta}(k), \\ \therefore \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon} &\rightarrow \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon} + \frac{-ig_{\alpha\mu}}{k^2 + i\varepsilon}ie_0^2\Pi^{\mu\nu}(k)\frac{-ig_{\nu\beta}}{k^2 + i\varepsilon} \end{aligned} \quad (212)$$

という修正に対応する. [これは今考えている光子の線が内線 (光子伝播関数) であることによる. 外線の場合は 9.4 節で議論する.]

この置き換えが Lorentz 不変であるためには  $\Pi^{\mu\nu}$  は  $k^\mu$  から作られる 2 階 [反変] テンソルでなければならず, その最も一般的な形は

$$\Pi^{\mu\nu}(k) = -g^{\mu\nu}A(k^2) + k^\mu k^\nu B(k^2) \quad (213)$$

である [ $A, B$  はスカラー関数]. ところが光子伝播関数は S 行列展開の中に, 保存するカレントと結合した形でしか現れないため, 第 2 項  $k^\mu k^\nu B(k^2)$  はこれに寄与しないことが示される (説明は下記). そこで  $k^\mu k^\nu B(k^2)$  の項を省いて上の修正を

$$\frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon} \rightarrow \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon} \left[ 1 - e_0^2 A(k^2) \frac{1}{k^2 + i\varepsilon} \right]$$

\*40 結論としては, QED が有限の  $\Lambda$  を持つ理論によって修正されるとしても, 実験的・理論的に不都合は生じない.

とすると、これは  $A(k^2)$  を有限の量とする仮定の下で

$$\frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon} \rightarrow \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon + e_0^2 A(k^2)} + O(e_0^4) \quad (214)$$

と書き直される [本稿次節で補足]。上式 (214) は裸の光子の伝播関数を現実の光子の伝播関数へと修正しているものと見ることができる。ところで一般に、質量が  $m$  の粒子の伝播関数は引数の 4 元運動量  $p$  が  $p^2 = m^2$  のところで極を持つので、現実の光子についても質量がゼロになるためには

$$A(0) = 0, \quad \therefore A(k^2) = k^2 A'(0) + k^2 \Pi_c(k^2) \quad (9.15)$$

でなければならない。ただしここに  $A(0) \equiv A(k^2 = 0)$ ,  $A'(0) \equiv \left. \frac{dA(k^2)}{dk^2} \right|_{k^2=0}$  であり、 $\Pi_c(k^2)$  は  $k^2 = 0$  の近くで  $k^2$  の 1 次以上のべきに比例してゼロに近づく。よって式 (214) は、[伝播関数の端の 2 つの結節点に関わる電荷  $e_0$  を含めて考えると]

$$\frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon} e_0^2 \rightarrow \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon} e_0^2 [1 - e_0^2 A'(0)] + \frac{ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon} e_0^4 \Pi_c(k^2) \quad (215)$$

となる [本稿次節で補足]。右辺第 1 項は裸の電子の電荷 ( $-e_0$ ) の、物理的な電子の電荷 ( $-e$ ) への修正

$$e^2 = e_0^2 [1 - e_0^2 A'(0)] \quad (216)$$

と捉えることができる。これが“電荷の繰り込み”であり、( $-e$ ) は“繰り込まれた電荷”である。ここでは 2 次の自己エネルギー部分だけを考慮しており、より高次の補正も含めると

$$e \equiv Z_3^{1/2} e_0 = e_0 \left[ 1 - \frac{1}{2} e_0^2 A'(0) + O(e_0^4) \right]$$

となる。ここに  $Z_3$  は“繰り込み定数”と呼ばれる。ここから逆に  $e_0$  を観測可能な実電荷  $e$  によって表すと、結局、光子の伝播関数 (の  $e^2$  倍) の修正として

$$\frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon} e_0^2 \rightarrow \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon} e^2 + \frac{ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon} e^4 \Pi_c(k^2) + O(e^6) \quad (217)$$

を得る。これは電荷の置き換え  $e_0 \rightarrow e$  (第 1 項) と、第 1 項に対する  $\alpha$  のオーダーの輻射補正 (第 2 項) から成る。

## 正則化した理論の QED への復元

結論を先取りして述べると (10.4 節)、正則化した理論から QED を復元するような極限操作 (例: 切断パラメーター  $\Lambda \rightarrow \infty$ ) を行った後に、光子伝播関数 (217) は、したがって各種の物理的な予言は、観測される素電荷  $e$  と、正則化の詳細に依らない有限の極限值を持つ  $\Pi_c(k^2)$  だけを含む。発散はこの極限操作により  $A'(0)$ ,  $Z_3$  に残り、これらは  $e$  と  $e_0$  の関係を決めるため、実験検証の対象とはなり得ない。

## 9.2 節, 式の導出など

■式 (213) における  $k^\mu k^\nu B(k^2)$  の項を省ける理由 光子伝播関数は (S 行列展開において) 保存するカレントと結合しており、

$$\int d^4 k s^\alpha(-k) iD_{F\alpha\beta}(k) s^\beta(k)$$

という形の結合が現れる [本稿次節で補足, ここでは教科書における恣意的に 2 種類の電荷を区別するカレントの添字 1,2 を省いた]. ここで伝播関数の置き換え (212) を行い, 式 (213) を代入すると, カレント保存則

$$\partial_\mu s^\mu(x) = 0 \quad \rightarrow \quad k_\mu s^\mu(k) = 0$$

より光子の運動量  $k$  に比例する項からの寄与はゼロになる.

## 9.2 について

■  $\Pi^{\mu\nu}(k)$  の式 (9.8) は「 $p$  が大きいところで 2 次の発散をする」(p.193, l.1) ことについて これは  $p$  の大きいところで積分が  $\int d^4p/p^2$  のように振舞うことに注意し,

$$d^4p \quad \rightarrow \quad dp^0 d|\mathbf{p}|d\Omega|\mathbf{p}|^2$$

と書くと分かる. なお 9.9 節では積分記号の下に入る運動量の次数  $K$  として積分の発散次数 (9.109) が定義されており, 今考えている積分  $\int d^4p/p^2$  に対してこれは  $K = 4 - 2 = 2$  となる. これが p.189 脚注 2) における「次元による議論」のことと考えられる.

■ p.194, 1 番下の式について S 行列展開の 2 次の項のうち, 光子伝播関数を作る部分, 例えば式 (7.5c):

$$\begin{aligned} & \frac{(ie)^2}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 N[(\bar{\psi}\gamma^\alpha\psi)_{x_1}(\bar{\psi}\gamma^\beta\psi)_{x_2}] iD_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2) \\ &= -\frac{1}{2} N \left[ \int d^4x_1 d^4x_2 s^\alpha(x_1) iD_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2) s^\beta(x_2) \right] \quad (\because s^\alpha = -e\bar{\psi}\gamma^\alpha\psi : (4.28)) \end{aligned}$$

は光子伝播関数とカレントが結合した形をしている. これを運動量空間の積分に書き換えると,

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} N \left[ \int \frac{d^4k d^4k' d^4k''}{(2\pi)^{12}} s^\alpha(k') iD_{F\alpha\beta}(k) s^\beta(k'') \int d^4x_1 d^4x_2 e^{-i(k'+k)\cdot x_1} e^{-i(k''-k)\cdot x_2} \right] \\ &= -\frac{1}{2} N \left[ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} s^\alpha(-k) iD_{F\alpha\beta}(k) s^\beta(k) \right] \end{aligned}$$

となる.

■ 光子伝播関数の式 (214) への書き換えについて  $A(k^2)$  を有限の量と仮定すれば

$$\frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon + e_0^2 A(k^2)} = \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon \left(1 + \frac{e_0^2 A(k^2)}{k^2 + i\varepsilon}\right)} = \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon} \left(1 - \frac{e_0^2 A(k^2)}{k^2 + i\varepsilon}\right) + O(e_0^4).$$

■ 式 (215) の確認

$$\begin{aligned} \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon + e_0^2 A(k^2)} &= \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2} \frac{1}{1 + e_0^2 \{A'(0) + \Pi_c(k^2)\} + \frac{i\varepsilon}{k^2}} \\ &= \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2} \left\{ 1 - e_0^2 A'(0) - e_0^2 \Pi_c(k^2) - \frac{i\varepsilon}{k^2} \right\} \\ &= \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon} [\{1 - e_0^2 A'(0)\} - e_0^2 \Pi_c(k^2)] \end{aligned}$$

による.



図 44 フェルミオン伝播関数の修正 (教科書の図 9.8(p.198))

■ 「 $e_0^2$  を掛けると」 (p.196, l.2) について これは伝播関数の端の 2 つの結節点に関わる電荷  $e_0$  を含めて考えることに対応する (p.202, l.1 参照). これによって伝播関数の修正 (215) を, 電荷の繰り込み (216) と見ることが可能となっている.

### 9.3 電子の自己エネルギー

#### 正則化

フェルミオンの自己エネルギー部分に関するループ積分 (9.4) を具体的に書くと

$$ie_0^2 \Sigma(p) = \frac{e_0^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \frac{2\not{p} - 2\not{k} - 4m_0}{(p-k)^2 - m_0^2 + i\epsilon} \quad (218)$$

となる [本稿次節で確認]. これは  $k \rightarrow \infty$  での発散 (紫外発散) のみならず,  $k \rightarrow 0$  でも発散する (赤外発散). 両方の発散を取り除くような正則化の方法の 1 つに,

$$\frac{1}{k^2 + i\epsilon} \rightarrow \frac{1}{k^2 - \lambda^2 + i\epsilon} - \frac{1}{k^2 - \Lambda^2 + i\epsilon} \quad (219)$$

と置き換えることが考えられる [本稿次節で補足]. この場合,  $\lambda \rightarrow 0, \Lambda \rightarrow \infty$  の極限で QED が復元される. 以降  $ie_0^2 \Sigma(p)$  は何らかの方法で既に正則化されているものと見なす.

#### 質量の繰り込み (その 1)

図 44 のようにフェルミオン伝播関数を, 自己エネルギー部分の挿入されたグラフと併せて考える修正を行う. これは置き換え

$$\begin{aligned} \frac{i}{\not{p} - m_0 + i\epsilon} &\rightarrow \frac{i}{\not{p} - m_0 + i\epsilon} ie_0^2 \Sigma(p) \frac{i}{\not{p} - m_0 + i\epsilon} \\ &= \frac{i}{\not{p} - m_0 + e_0^2 \Sigma(p) + i\epsilon} + O(e_0^4) \end{aligned} \quad (220)$$

$$\left( \because \text{恒等式 } \frac{1}{A-B} = \frac{1}{A} + \frac{1}{A} B \frac{1}{A} + \frac{1}{A} B \frac{1}{A} B \frac{1}{A} + \dots \right) \quad (221)$$

に対応する [恒等式 (221) の確認は本稿次節].

この置き換えは裸のフェルミオン伝播関数を物理的な粒子のそれへと修正していると見ることができる. 一般に質量  $m$  の粒子の伝播関数は引数  $p$  が  $\not{p} = m$  のところで極を持つので, 式 (220) は裸のフェルミオンの質量  $m_0$  の, 物理的な粒子の質量

$$m = m_0 + \delta m$$

への修正と見なせる. 置き換え  $m_0 \rightarrow m$  は “質量の繰り込み” と呼ばれ,  $m$  は繰り込まれた質量と呼ばれる. 伝播関数 (220) の極  $\not{p} = m$  を特定するには, その分母を  $\not{p} - m + i\epsilon$  と等置して  $\delta m$  について解けば良い.

$$\Sigma(p) = A + (\not{p} - m)B + (\not{p} - m)\Sigma_c(p) \quad (222)$$

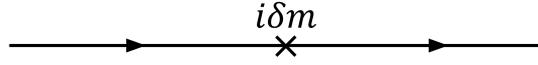


図 45 質量相殺項  $-\delta m \bar{\psi} \psi$  を表す 2 伝播線結節点のグラフ (教科書の図 9.10(p.200))

と展開するならば [ $\not{p} - m_0$  による展開ではないことに注意する]\*41, 結果として

$$\delta m = -e_0^2 A \quad (223)$$

を得る [本稿次節で補足].

### 質量の繰り込み (その 2)

質量の繰り込みを行うには次のような方法もある:

- 自由場ハミルトニアン密度に  $-\bar{\psi}(i\not{p} - m_0)\psi$  として含まれる  $m_0$  を物理的フェルミオン質量  $m$  に置き換え,
- その代償として“質量相殺項”  $-\delta m \bar{\psi} \psi$  を相互作用ハミルトニアン密度に含める.

$$\mathcal{H}_I = -e_0 \bar{\psi} A \psi - \delta m \bar{\psi} \psi. \quad (224)$$

これにより

- 全体を通じて (特にフェルミオン伝播関数において) 裸の質量  $m_0$  が物理的フェルミオン質量  $m$  に置き換わる:

$$m_0 \rightarrow m. \quad (225)$$

- 相互作用ハミルトニアン密度の質量相殺項  $-\delta m \bar{\psi} \psi$  に対応する 2 伝播線結節点 (図 45,  $i\delta m \equiv -ie_0^2 A$  を充てる) を自己エネルギーループと併せて考える (両者はともに  $e_0^2$  程度):

$$\begin{aligned} ie_0^2 \Sigma(p) &\rightarrow ie_0^2 \Sigma(p) + i\delta m \\ &= ie_0^2 (\not{p} - m) B + ie_0^2 (\not{p} - m) \Sigma_c(p). \quad (\because \text{式 (222), (223)}) \end{aligned} \quad (226)$$

2 次の輻射補正と併せて考えたフェルミオン伝播関数 (220) は式 (9.29):

$$\frac{i}{(\not{p} - m)(1 + e_0^2 B) + e_0^2 (\not{p} - m) \Sigma_c(p) + i\varepsilon} + O(e_0^4) \quad (227)$$

と書き換えられるけれど, これは式 (220) に上記の置き換え (225), (226) を施すことでも得られる [本稿次節で補足]. これは  $m_0 \bar{\psi} \psi$  を  $m \bar{\psi} \psi$  と  $-\delta m \bar{\psi} \psi$  に分けて自由場項と相互作用項に割り当てても, 全ハミルトニアンは変わらないことによる.

\*41  $\not{p} \rightarrow m$  において  $\Sigma_c(p)$  は  $(\not{p} - m)$  の 1 次 (以上) でゼロに近づく.

電荷の繰り込み (フェルミオンの自己エネルギー部分に由来)

いずれの質量の繰り込みの方法によっても, フェルミオン伝播関数は

$$\frac{i}{\not{p} - m_0 + i\varepsilon} \rightarrow \frac{i}{\not{p} - m + i\varepsilon} [(1 - e_0^2 B) - e_0^2 \Sigma_c(p)] + O(e_0^4) \quad (228)$$

と修正される [本稿次節で補足]. これは伝播関数の端の 2 つの結節点に関わる電荷  $e_0$  を含めて考え,  $e_0^2$  を掛けると, 裸の電荷  $e_0$  の繰り込まれた電荷  $e$  への修正

$$e^2 \equiv Z_2 e_0^2 = e_0^2 (1 - e_0^2 B) + O(e_0^6) \quad (229)$$

と見ることができる. そこで  $e_0$  を  $e$  によって表せば, 繰り込まれたフェルミオン伝播関数 (の  $e^2$  倍) は

$$\frac{ie_0^2}{\not{p} - m_0 + i\varepsilon} \rightarrow \frac{ie^2}{\not{p} - m + i\varepsilon} [1 - e^2 \Sigma_c(p)] + O(e^6)$$

によって  $e^4$  の精度まで与えられる. これは光子伝播関数の場合 (9.2 節) と同様, 電荷の置き換え  $e_0 \rightarrow e$  と有限の輻射補正から成る.

### QED の復元

結論を先取りして述べると (10.2 節, 練習問題 10.2, 10.3), 正則化された理論から QED を復元する極限操作  $\Lambda \rightarrow \infty$  [および  $\lambda \rightarrow 0$ ] において,

- 測定可能な輻射補正に関わる補正項  $\Sigma_c(p)$  は, 正則化の詳細に依らない有限値に留まる.
- 物理的な量と裸の量とを関係付ける検証不可能な部分にのみ現れる定数  $A, B, Z_2$  は,  $\Lambda$  に関して対数的に発散する.

### 9.3 について

■フェルミオンの自己エネルギー部分に関するループ積分の式 (218) の確認

$$\begin{aligned} ie_0^2 \Sigma(p) &= \frac{(ie_0)^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{-ig_{\alpha\beta} \gamma^\alpha i \not{p} - \not{k} + m_0}{k^2 + i\varepsilon} \frac{\gamma^\beta}{(p-k)^2 - m_0^2 + i\varepsilon} : (9.4) \\ &= -\frac{e_0^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{\gamma^\alpha (\not{p} - \not{k} + m_0) \gamma_\alpha}{(k^2 + i\varepsilon) \{(p-k)^2 - m_0^2 + i\varepsilon\}} \quad (\gamma_\alpha \equiv g_{\alpha\beta} \gamma^\beta) \\ &= \frac{e_0^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{1}{k^2 + i\varepsilon} \frac{2\not{p} - 2\not{k} - 4m_0}{(p-k)^2 - m_0^2 + i\varepsilon} : (218). \quad (\gamma^\alpha (\not{p} - \not{k}) \gamma_\alpha = -2(\not{p} - \not{k}), \gamma^\alpha \gamma_\alpha = 4 : (A.14)) \end{aligned}$$

■正則化 (219) について 式 (219):

$$\frac{1}{k^2 + i\varepsilon} \rightarrow \frac{1}{k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon} - \frac{1}{k^2 - \Lambda^2 + i\varepsilon} = -\frac{\Lambda^2 - \lambda^2}{(k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon)(k^2 - \Lambda^2 + i\varepsilon)}$$

のように置き換えると, これは  $k \rightarrow 0$  において分母が有限の値に留まり,  $k \rightarrow \infty$  において  $1/k^2$  の代わりに  $1/k^4$  のように振舞う. このため  $ie_0^2 \Sigma(p)$  の式 (218) から赤外発散と紫外発散を取り除けるものと考えられる.

■恒等式 (221) の証明 任意の演算子  $A, B$  (これらは非可換でもよい) に対して, 恒等式 (221):

$$\frac{1}{A-B} = \frac{1}{A} + \frac{1}{A}B\frac{1}{A} + \frac{1}{A}B\frac{1}{A}B\frac{1}{A} + \dots$$

が成立する。「証明は  $A-B$  を掛けることで容易に行える」(p.198 下から 3 行目). 実際,

$$\begin{aligned} (A-B)(\text{上式右辺}) &= 1 + \cancel{B\frac{1}{A}} + \cancel{B\frac{1}{A}B\frac{1}{A}} + \dots \\ &\quad - \cancel{B\frac{1}{A}} - \cancel{B\frac{1}{A}B\frac{1}{A}} - \dots = 1, \\ (\text{上式右辺})(A-B) &= 1 + \cancel{\frac{1}{A}B} + \cancel{\frac{1}{A}B\frac{1}{A}B} + \dots \\ &\quad - \cancel{\frac{1}{A}B} - \cancel{\frac{1}{A}B\frac{1}{A}B} - \dots = 1. \end{aligned}$$

■「Lorentz 不変性により,  $\Sigma(p)$  は運動量  $p$  に対して……だけを通じて依存する」(p.199, l.16,17) について  $p^2 = \not{p}\not{p}$  は公式 (A.19b) による. ここから  $\not{p}$  は Lorentz スカラーであることが分かる. これを踏まえ, 式 (9.24) の書き換えが Lorentz 不変性を持つためには, 今の場合, 書き換えの前後で分母が Lorentz スカラーとなっていれば良い. よって  $\Sigma(p)$  もまた Lorentz スカラーでなければならないから, それを「運動量  $p$  に対して  $\not{p}$  と  $p^2 (= \not{p}\not{p})$  だけを通じて依存する」と考えるのはもっともらしい.

■式 (223), (227), (228) の確認 修正された伝播関数 (220) の分母に  $\Sigma(p)$  の展開 (222) を代入し,  $\not{p} - m$  と等置すると

$$\not{p} - m_0 + e_0^2 \{A + (\not{p} - m)B + (\not{p} - m)\Sigma_c(p)\} = \not{p} - m$$

となる. これに  $\not{p} = m$  を代入すると  $\delta m = -e_0^2 A$ : (223) を得る. このため伝播関数 (220) の分母に他ならない上式左辺は,  $\not{p} - m_0 + e_0^2 A = \not{p} - m$  であることに注意して  $\not{p} - m$  でくくると

$$(\not{p} - m)(1 + e_0^2 B + e_0^2 \Sigma_c(p))$$

となる (式 (227)). さらに式 (227) は

$$\begin{aligned} & \frac{i}{(\not{p} - m) \left\{ 1 + e_0^2 B + e_0^2 \Sigma_c(p) + \frac{i\varepsilon}{\not{p} - m} \right\}} + O(e_0^4) \\ &= \frac{i}{\not{p} - m} \left\{ (1 - e_0^2 B) - e_0^2 \Sigma_c(p) - \frac{i\varepsilon}{\not{p} - m} \right\} + O(e_0^4) \\ &= \frac{i}{\not{p} - m + i\varepsilon} \{ (1 - e_0^2 B) - e_0^2 \Sigma_c(p) \} + O(e_0^4) : (228) \end{aligned}$$

と書き換えられる.

なお式 (223):  $\delta m = -e_0^2 A = -e_0^2 \Sigma(p)|_{\not{p}=m}$  は  $m_0$  ではなく物理的な質量  $m$  を既知として, その  $m_0$  との差  $\delta m$  を表した式である. 実際, 我々の観測するのは裸の粒子の質量  $m_0$  ではなく, 物理的粒子の質量  $m$  である. 式 (223) を既知の  $m_0$  から  $m$  を求める式と (誤って) 解釈した場合, これは未知量  $\delta m$  を未知量  $m$  で表した式に過ぎなくなる.

■繰り込みについて 9.2 節, 9.3 節では 2 次の輻射補正として, 光子とフェルミオンの伝播関数に対する自己エネルギー部分の挿入を考察した. このような伝播関数の修正は等価的に電荷や質量の繰り込みとして表現され, それ故, 自己エネルギー部分は裸の粒子を物理的な粒子へと移行させる過程と解釈できる.

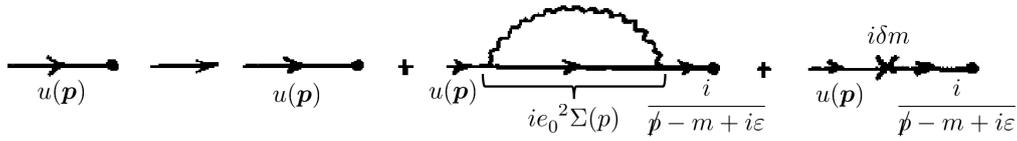


図 46 始状態側の電子の外線に対する 2 次補正 (教科書の図 9.11(p.203))

## 9.4 外線の繰り込み

自己エネルギー部分の挿入による 2 次の輻射補正を, 伝播関数 (内線) ではなく外線に施した場合, これは単に電荷の繰り込みとして表現することができ, それ以外の補正は生じない.

例として入射電子の (外) 線の輻射補正を, 9.3 節における質量の繰り込みを行う 2 つ目の方法 (p.200, 1.3 ~ p.201, 1.24) に従って図 46 のように考える. 対応する式は

$$u(\mathbf{p}) \rightarrow u(\mathbf{p}) + \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} [ie_0^2 \Sigma(p) + i\delta m] u(\mathbf{p}) \quad (230)$$

$$= \left[ 1 - \frac{e_0^2}{\not{p} - m + i\epsilon} (\not{p} - m) B \right] u(\mathbf{p}) \quad (231)$$

である [導出は下記および本稿次節].

$B$  に比例する項の不定性を取り除くために, 断熱仮説を導入する. これは散乱を, 実質的に相互作用の起きている間よりも遙か以前・以後の記述に依らないものと仮定して  $t \rightarrow \pm\infty$  において相互作用項  $\mathcal{H}_I$  をゼロにし, 始・終状態の粒子を裸の粒子とする扱いを正当化するものである. そのためには  $t \rightarrow \pm\infty$  においてゼロになり, 散乱過程の [実質的な] 時間よりも充分長い時間  $T$  においてほとんど 1 となるような関数  $f(t)$  を用い, 相互作用項 (224):

$$\mathcal{H}_I = -e_0 \bar{\psi} A \psi - \delta m \bar{\psi} \psi, \quad \delta m = -e_0^2 A$$

における  $e_0$  を  $e_0 f(t)$  に置き換えれば良い (6.2 節). このように相互作用を修正すると, 図 47 のようにグラフは, 結節点においてエネルギーの保存しないグラフに置き換わる ( $q = (E, \mathbf{0}), q' = (E', \mathbf{0})$ ). [時間並進対称性はエネルギー保存則に関係していることを思い出そう.] これに対応して

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(E) e^{iEt} dE = \int_{-\infty}^{\infty} F(E) e^{iq \cdot x} dE \quad (232)$$

と Fourier 展開すると, 式 (231) は

$$u(\mathbf{p}) \rightarrow \left[ 1 - \int dE dE' F(E) F(E') \frac{e_0^2 B}{\not{p} - \not{q} - \not{q}' - m + i\epsilon} (\not{p} - \not{q} - m) \right] u(\mathbf{p}) \quad (233)$$

$$= \dots = Z_2^{1/2} u(\mathbf{p}), \quad Z_2 \equiv 1 - e_0^2 B : (229) \quad (234)$$

と変更される [式 (233) の導出は本稿次節, 式 (234) の導出は下記]. 最終的な結果は  $F(E)$  に依らないため, 断熱仮説を導入する前の  $f(t) = 1$  の理論に戻した結果と見ても良い.

以上は 2 次の輻射補正に関する結果であるけれど, 実はフェルミオン線の各外線および光子の外線に対して

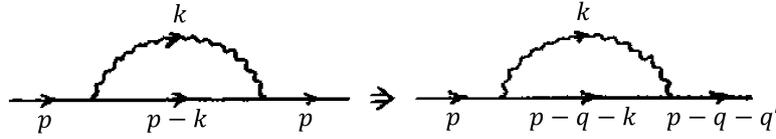


図 47 フェルミオン自己エネルギーループ (教科書の図 9.12(p.204))

任意の次数の摂動論において

$$u(\mathbf{p}) \rightarrow Z_2^{1/2} u(\mathbf{p}), \quad \bar{u}(\mathbf{p}) \rightarrow Z_2^{1/2} \bar{u}(\mathbf{p}), \quad v(\mathbf{p}) \rightarrow Z_2^{1/2} v(\mathbf{p}), \quad \bar{v}(\mathbf{p}) \rightarrow Z_2^{1/2} \bar{v}(\mathbf{p}),$$

$$\varepsilon^\mu(\mathbf{k}) \rightarrow Z_3^{1/2} \varepsilon^\mu(\mathbf{k})$$

となる。よって外線の繰り込みは、外線に接続する結節点に関する電荷を

$$e_0 \rightarrow e = Z_3^{1/2} e_0, \quad e_0 \rightarrow e = Z_2^{1/2} e_0$$

と繰り込みさえすれば良い (冒頭の措置  $m_0 \rightarrow m$  も併せて行う)。

#### 9.4 節, 式の導出など

■式 (230) の式 (231) への書き換え  $(\not{p}-m)u(\mathbf{p})=0$  であり, また  $\not{p} \rightarrow m$  において  $(\not{p}-m)\Sigma_c(p)$  は  $(\not{p}-m)$  の 2 次でゼロに近づくので, 式 (230) の最後の項を省くことができる。

■式 (234) の導出 式 (233):

$$u(\mathbf{p}) \rightarrow \left[ 1 - \int dE dE' F(E) F(E') \frac{e_0^2 B}{\not{p} - \not{q} - \not{q}' - m + i\varepsilon} (\not{p} - \not{q} - m) \right] u(\mathbf{p})$$

において,  $(\not{p}-m)u(\mathbf{p})=0$  より被積分関数の因子を

$$(\not{p} - \not{q} - m) \rightarrow (\not{p} - \not{q} - m) - \frac{1}{2}(\not{p} - m) = \frac{1}{2}(\not{p} - 2\not{q} - m)$$

と置き換えられる。ところがこの因子以外は  $q$  と  $q'$  に関して対称なので, さらに

$$\frac{1}{2}(\not{p} - 2\not{q} - m) \rightarrow \frac{1}{2}(\not{p} - \not{q} - \not{q}' - m)$$

と置き換えて良い [本稿次節で補足]。

$$u(\mathbf{p}) \rightarrow \left[ 1 - \frac{1}{2} e_0^2 B \int dE dE' F(E) F(E') \right] u(\mathbf{p}).$$

さらに Fourier 展開 (232) は  $F(E)$  に対する規格化条件

$$1 = f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} F(E) dE$$

を含意することを用いると, 式 (234):

$$u(\mathbf{p}) \rightarrow \left( 1 - \frac{1}{2} e_0^2 B \right) u(\mathbf{p})$$

を得る。

## 9.4 について

■外線に対する補正の式 (230) について 図 46 に対応する置き換え

$$u(\boldsymbol{p}) \rightarrow u(\boldsymbol{p}) + \frac{i}{\not{p} - m + i\varepsilon} [ie_0^2 \Sigma(p) + i\delta m] u(\boldsymbol{p})$$

を書き, 式 (226) を代入して得られる.

■「 $F(E)$  は……幅  $1/T$  のピークを持つ, ……関数である」(p.203, l.15) について 文献 [4, pp.162–163] 参照.

■断熱仮説の下での外線に対する補正の式 (233) について 式 (231) における分母  $\not{p} - m + i\varepsilon$  の  $p$  は図 9.12(a)(p.204, 本稿の図 47 左側) 右端のフェルミオン伝播関数の引数であり,  $e_0^2 B(\not{p} - m)$  における  $p$  は同図 (a) 中央の補正項  $ie_0^2 \Sigma(p)$  の引数である. これを踏まえると図 9.12(b)(本稿の図 47 右側) に対応する式を書くには, 以上の 2 つの  $p$  を式 (233) のようにそれぞれ  $p - q - q', p - q$  に置き換えれば良い. さらに電荷  $e_0 f(t)$  の Fourier 展開に由来する, 不定のエネルギー  $E, E'$  に関する積分が施される.

もし Fourier 展開を式 (232) の代わりに

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(E) e^{iEt} \frac{dE}{2\pi}$$

のように定義したならば, 式 (233) にも  $1/(2\pi)^2$  が現れると考えられる.

■p.204, l.6 の置き換えについて 今考えている積分

$$I = \int dE dE' F(E) F(E') \frac{e_0^2 B}{\not{p} - \not{q} - \not{q}' - m + i\varepsilon} \frac{1}{2} (\not{p} - 2\not{q} - m)$$

は, 積分変数  $E, E'$  を入れ替えた式

$$I = \int dE dE' F(E) F(E') \frac{e_0^2 B}{\not{p} - \not{q} - \not{q}' - m + i\varepsilon} \frac{1}{2} (\not{p} - 2\not{q}' - m)$$

と辺々足すことによって,

$$I = \int dE dE' F(E) F(E') \frac{e_0^2 B}{\not{p} - \not{q} - \not{q}' - m + i\varepsilon} \frac{1}{2} (\not{p} - \not{q} - \not{q}' - m)$$

とも書くことができる. 結果的に

$$\frac{1}{2} (\not{p} - 2\not{q} - m) \rightarrow \frac{1}{2} (\not{p} - \not{q} - \not{q}' - m)$$

と置き換わっている.

## 9.5 結節点補正

結節点補正のループ積分 (9.6):

$$\Lambda^\mu(p', p) = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k}{k^2 + i\varepsilon} \gamma^\alpha \frac{1}{\not{p}' - \not{k} - m + i\varepsilon} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m + i\varepsilon} \gamma_\alpha \quad (235)$$

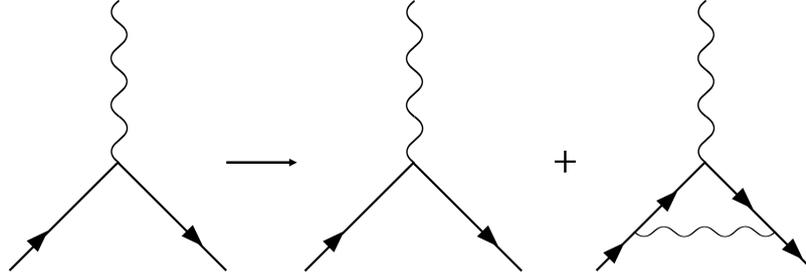


図 48 2 次の結節点補正 (教科書の図 9.13(p.206))

[右辺の表式について本稿次節で補足] は紫外と赤外において発散する。フェルミオンの自己エネルギーループの場合 (9.3 節) と同様の置き換え (219):

$$\frac{1}{k^2 + i\epsilon} \rightarrow \frac{1}{k^2 - \lambda^2 + i\epsilon} - \frac{1}{k^2 - \Lambda^2 + i\epsilon}$$

によってこれを正則化する。

図 48 に示すような結節点補正を考えよう。これは

$$ie_0\gamma^\mu \rightarrow i\Gamma^\mu(p', p) = ie_0[\gamma^\mu + e_0^2\Lambda^\mu(p', p)] \quad (236)$$

という置き換えに対応する。 $\Lambda^\mu(p', p)$  において切断パラメーター  $\Lambda$  に対して発散する分離したい部分は, [図 48 のフェルミオン線を外線と見なした上で式に含めれば]

$$\bar{u}(\mathbf{P})\Lambda^\mu(P, P)u(\mathbf{P})$$

である\*42。ここに運動量  $P$  は  $P^2 = m^2$  を満たす値であり, 自由粒子の値と呼べる。これは  $L$  をスカラーの定数として

$$\bar{u}(\mathbf{P})\Lambda^\mu(P, P)u(\mathbf{P}) = L\bar{u}(\mathbf{P})\gamma^\mu u(\mathbf{P}) \quad (237)$$

と書けることが分かるので (理由は下記),  $\Lambda^\mu(p', p)$  において発散する部分は  $L\gamma^\mu$  として分離され,

$$\Lambda^\mu(p', p) = L\gamma^\mu + \Lambda_c^\mu(p', p) \quad (238)$$

と書けば  $\Lambda_c^\mu(p', p)$  は  $\Lambda \rightarrow \infty$  においても有限になる。(実際にループ積分 (235) を式 (238) のように書き分けられることの直接的確認は下記。)

置き換え (236) は  $\Lambda^\mu(p', p) = L\gamma^\mu + \Lambda_c^\mu(p', p)$  とすると,

$$ie_0\gamma^\mu \rightarrow i\Gamma^\mu(p', p) = ie_0[\gamma^\mu(1 + e_0^2L) + e_0^2\Lambda_c^\mu(p', p)]$$

となる。第 1 項は電荷の繰り込み

$$e \equiv \frac{e_0}{Z_1} = e_0(1 + e_0^2L) + O(e_0^5) \quad (239)$$

と解釈できる。これにより結節点補正における  $e_0$  を繰り込まれた電荷  $e$  で表すと, 最終的な結果として

$$ie_0\gamma^\mu \rightarrow i\Gamma^\mu(p', p) = ie[\gamma^\mu + e^2\Lambda_c^\mu(p', p)] + O(e^5)$$

を得る。これは電荷の置き換え  $e_0 \rightarrow e$  と補正項  $\Lambda_c^\mu(p', p)$  の導入から成る。

\*42 これを示すには, ループ積分 (235) がすぐ後で見える式 (238) のように書き分けられることを示せば良い。

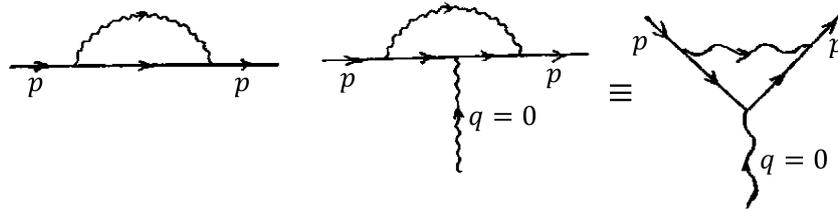


図 49 光子伝播関数の修正 (教科書の図 9.14(p.194))

### 2 次の輻射補正による正味の電荷の繰り込み

QED において各結節点には 1 本の光子線と 2 本のフェルミオン線が接続しているのので、光子・フェルミオンの自己エネルギー部分、および結節点補正に伴う電荷の繰り込み (それぞれ  $e = Z_3^{1/2} e_0$ ,  $e = Z_2^{1/2} e_0$ ,  $e = e_0/Z_1$ ) を同時に施すと、正味の効果は

$$e = e_0 \frac{Z_3^{1/2} Z_2}{Z_1} \quad (240)$$

である [本稿次節で補足]. ここで Ward 恒等式

$$\frac{\partial \Sigma(p)}{\partial p_\mu} = \Lambda^\mu(p, p) \quad (241)$$

に注目する [導出は本稿次節]. これは図 49 に示したフェルミオン自己エネルギーと、4 元運動量  $q = 0$  の光子外線 (ゼロエネルギー光子) を持つ結節点補正を関係付ける式であり、ここから

$$Z_2 = Z_1 \quad (242)$$

が導かれる (導出は下記).

結局、電荷の繰り込みは

$$e = e_0 Z_3^{1/2}$$

となって、光子の自己エネルギー効果、すなわち真空偏極効果だけに起因することになる. 以上は 2 次摂動において導かれているけれど、摂動のあらゆる次数において成立する.

### 2 次の輻射補正まとめ

他の荷電レプトン  $\mu^\mp, \tau^\mp$  についても同様の結果が得られることを踏まえ、2 次の輻射補正の手順を次のようにまとめられる.

- 各レプトンに物理的な質量 ( $m_e, m_\mu, m_\tau$ ) を充てる.
- 裸の電荷  $e_0$  を物理的な電荷  $e = e_0 Z_3^{1/2}$  に置き換える.

その上で伝播関数の自己エネルギー補正

$$\begin{aligned} \frac{-ig^{\alpha\beta}}{k^2 + i\epsilon} &\rightarrow \frac{-ig^{\alpha\beta}}{k^2 + i\epsilon} [1 - e^2 \Pi_c(k^2)] + O(e^4), \\ \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} &\rightarrow \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} [1 - e^2 \Sigma_c(p)] + O(e^4) \end{aligned}$$

および結節点補正

$$ie_0\gamma^\mu \rightarrow ie[\gamma^\mu + e^2\Lambda_c^\mu(p', p)] + O(e^5)$$

を施せば十分である。

### 9.5 節, 式の導出など

■式 (237) の導出 [ $\bar{\psi}\psi$  はスカラー,  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  はベクトルとして変換することを思い出すと,] Lorentz 不変性より  $a, b$  をスカラーの定数として

$$\bar{u}(\mathbf{P})\Lambda^\mu(P, P)u(\mathbf{P}) = a\bar{u}(\mathbf{P})\gamma^\mu u(\mathbf{P}) + bP^\mu\bar{u}(\mathbf{P})u(\mathbf{P}) \quad (243)$$

と表現できるはずである。ところが Gordon の恒等式より右辺第 2 項において

$$P^\mu\bar{u}(\mathbf{P})u(\mathbf{P}) = m\bar{u}(\mathbf{P})\gamma^\mu u(\mathbf{P}) \quad (244)$$

と書き換えられるので [本稿次節で補足], 結局, 上式 (243) は式 (237) の形  $L\bar{u}(\mathbf{P})\gamma^\mu u(\mathbf{P})$  をとる。

■ループ積分 (235) を式 (238) のように書き分けられることの直接的確認

$$\Delta \equiv \not{P} - \not{k} - m + i\varepsilon, \quad q \equiv p - P, \quad q' \equiv p' - P$$

と略記すると, 恒等式 (221) により

$$\begin{aligned} \Lambda^\mu(p', p) &= \frac{-i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{k^2 + i\varepsilon} \gamma^\alpha \left[ \frac{1}{\not{q}' + \Delta} \gamma^\mu \frac{1}{\not{q} + \Delta} \right] \gamma_\alpha \\ &= \frac{-i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{k^2 + i\varepsilon} \gamma^\alpha \left[ \left( \frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\Delta} \not{q}' \frac{1}{\Delta} + \dots \right) \gamma^\mu \left( \frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\Delta} \not{q} \frac{1}{\Delta} + \dots \right) \right] \gamma_\alpha \\ &\equiv L\gamma^\mu + \Lambda_c^\mu(p', p) \end{aligned}$$

なので,

$$L\gamma^\mu = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{k^2 + i\varepsilon} \gamma^\alpha \frac{1}{\Delta} \gamma^\mu \frac{1}{\Delta} \gamma_\alpha, \quad \Lambda_c^\mu(p', p) = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{k^2 + i\varepsilon} O(\Delta^{-3})$$

と同定される ( $\Delta$  が  $k$  の 1 次なので  $k \rightarrow \infty$  において  $L\gamma^\mu$  は対数的に発散し,  $\Lambda_c^\mu(p', p)$  は収束する). [ここで上式は光子伝播関数の部分が  $1/(k^2 + i\varepsilon)$  のようになっているため, 既に  $\Lambda \rightarrow \infty$  の極限をとって QED を復元した式と見なせることに注意しよう.]

■式 (242):  $Z_2 = Z_1$  の導出 Ward 恒等式 (241) より自由粒子スピノル  $u(\mathbf{P})$  に対する関係

$$\bar{u}(\mathbf{P}) \frac{\partial \Sigma(P)}{\partial P_\mu} u(\mathbf{P}) = \bar{u}(\mathbf{P}) \Lambda^\mu(P, P) u(\mathbf{P}) \quad (245)$$

が得られる.  $\Sigma(P)$  の具体的な表式 (222) を代入し

$$\bar{u}(\mathbf{P})(\not{P} - m) = 0, \quad \Sigma_c(P)u(\mathbf{P}) = 0$$

を用いると, 上式 (245) の左辺は

$$\bar{u}(\mathbf{P}) \left[ \gamma^\mu B + \Sigma_c(P) + (\not{P} - m) \frac{\partial \Sigma_c(P)}{\partial P_\mu} \right] u(\mathbf{P}) = B\bar{u}(\mathbf{P})\gamma^\mu u(\mathbf{P})$$

と計算できる. 他方, 式 (245) の右辺は式 (237) より  $L\bar{u}(\mathbf{P})\gamma^\mu u(\mathbf{P})$  に等しいので, これらを等置して

$$B = L \quad (246)$$

が見出される. これを用いると式 (242) が得られる [本稿次節で補足].

## 9.5 について

■ $\Lambda^\mu(p', p)$  の式 (235) における置き換え  $m_0 \rightarrow m$  について  $\Lambda^\mu(p', p)$  の式 (235) において  $m_0$  が  $m$  に置き換わっているのは, 9.3 節で導入された, 最初に  $m_0$  を  $m$  に置き換え質量相殺項を相互作用ハミルトニアンに含めるアプローチを採用していることを反映していると考えられる. 外線の繰り込み (9.4 節) の際にもこちらのアプローチが採用された. 後の 9.8 節 p.225 では, 以降こちらのアプローチを採用することが宣言されている.

■Gordon の恒等式と式 (244) について 問題 A.2(付録末尾) が Gordon の恒等式 (A.80):

$$2m\bar{u}_s(\mathbf{p}')\gamma^\mu u_r(\mathbf{p}) = \bar{u}_s(\mathbf{p}')[(p' + p)^\mu + i\sigma^{\mu\nu}(p' - p)_\nu]u_r(\mathbf{p})$$

の証明となっている. まずこれを示そう.  $u_r(\mathbf{p}) \equiv u, \bar{u}_s(\mathbf{p}') \equiv \bar{u}$  と略記すると,

$$(\not{p} - m)u = 0 : (\text{A.25}), \quad \bar{u}(\not{p}' - m) = 0 : (\text{A.26})$$

(ただし  $c = 1$  とおいた) により任意のベクトル  $a_\mu$  に対して

$$0 = \bar{u}[\not{a}(\not{p} - m) + (\not{p}' - m)\not{a}]u = \bar{u}[\not{a}\not{p} + \not{p}'\not{a} - 2m\not{a}]u$$

である. ここで公式 (A.19a) [本稿の式 (326)] により

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \sigma^{\nu\mu}$$

に対して

$$\begin{aligned} \not{a}\not{p} &= a \cdot p - i\sigma^{\mu\nu}a_\mu p_\nu = a_\mu(p^\mu - i\sigma^{\mu\nu}p_\nu), \\ \not{p}'\not{a} &= p' \cdot a - i\sigma^{\mu\nu}a_\nu p'_\mu = a_\mu(p'^\mu + i\sigma^{\mu\nu}p'_\nu) \end{aligned}$$

なので, 上式は

$$a_\mu\bar{u}[(p' + p)^\mu + i\sigma^{\mu\nu}(p' - p)_\nu - 2m\gamma^\mu]u = 0$$

となる. これが任意の  $a_\mu$  に対して成り立つことから, Gordon の恒等式 (A.80) を得る.

式 (A.80) において  $p' = p = P$  とおくと, 式 (244):

$$P^\mu\bar{u}(\mathbf{P})u(\mathbf{P}) = m\bar{u}(\mathbf{P})\gamma^\mu u(\mathbf{P})$$

が導かれる.

■2 次の輻射補正による正味の電荷の繰り込み (240) について 基のグラフとある輻射補正を行ったグラフを併せて考えた結果が, 電荷の繰り込みによって表現された. これを改めて基のグラフとして別の輻射補正を行ったグラフと併せて考える, ということを繰り返行くと, 正味の電荷の繰り込みは式 (240):

$$e = e_0 \frac{Z_3^{1/2} Z_2}{Z_1}$$

となる.

■Ward 恒等式 (241) の証明 (問題 9.2)  $S_F(p)$  の引数を省略し,  $S_F^{-1} = \not{p} - m$  に注意して  $S_F S_F^{-1} = 1$  の両辺を  $p_\mu$  で微分すると

$$\frac{\partial S_F}{\partial p_\mu} S_F^{-1} + S_F \frac{\partial}{\partial p_\mu} (\not{p} - m) = 0, \quad \therefore \frac{\partial S_F}{\partial p_\mu} S_F^{-1} = -S_F \gamma^\mu$$

を得る. 両辺に右から  $S_F$  をかけると

$$\frac{\partial S_F}{\partial p_\mu} = -S_F \gamma^\mu S_F$$

となる. これを用いると Ward 恒等式 (241):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Sigma(p)}{\partial p_\mu} &= i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} i D_{F\alpha\beta}(k) \gamma^\alpha i \frac{\partial S_F(p-k)}{\partial p_\mu} \gamma^\beta \quad (\because \Sigma(p) \text{ の式 (9.4)}) \\ &= i^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} i D_{F\alpha\beta}(k) \gamma^\alpha [i S_F(p-k) \gamma^\mu i S_F(p-k)] \gamma^\beta \\ &= \Lambda^\mu(p, p) \quad (\because \Lambda^\mu(p, p) \text{ の式 (9.6)}) \end{aligned}$$

を得る.

■式 (242)  $Z_2 = Z_1$  の導出の続き

$$Z_1 \simeq 1 - e_0^2 L \quad (\text{式 (239)})$$

$$= 1 - e_0^2 B \quad (\text{式 (246)})$$

$$\simeq Z_2. \quad (\text{式 (229)})$$

## 9.6 応用

$$\text{輻射補正} \rightarrow \begin{cases} \text{電子の磁気能率の Dirac 値からのずれ} \\ \text{Lamb シフト} \end{cases}$$

### 9.6.1 異常磁気能率

粒子の磁気能率は磁場による粒子の散乱を通して知られる. そこで静的な外場による弾性散乱 (8.7 節) を再考しよう. 外線に対する修正は単に電荷の繰り込みとして表されるので, 繰り込みの後には, 図 50(a) の最低次の Feynman グラフに対する  $\alpha$  のオーダーの輻射補正には図 50 の (b) と (c) のダイアグラムだけが寄与を持つ. [外線に対する繰り込みが観測される修正を生じないことの根本的な理由 (9.4 節) を, 「 $\Sigma_c(p)u(\mathbf{p}) = 0$  なので」 (9.6.2 節, 1.12) と述べることができる.] (a),(b),(c) のダイアグラムを合わせた Feynman 振幅は

$$ie\bar{u}(\mathbf{p}')\gamma^\mu u(\mathbf{p})A_{e\mu}(\mathbf{q}) + ie\bar{u}(\mathbf{p}')\gamma^\mu u(\mathbf{p})[-e^2\Pi_c(q^2)]A_{e\mu}(\mathbf{q}) + ie\bar{u}(\mathbf{p}')[e^2\Lambda_c^\mu(p', p)]u(\mathbf{p})A_{e\mu}(\mathbf{q}) \quad (9.67)$$

である.

第 1 項, すなわち最低次の Feynman 振幅を Gordon 恒等式 (A.80) によって書き換えると

$$-\frac{e}{2m}\bar{u}(\mathbf{p}')\sigma^{\mu\nu}q_\nu u(\mathbf{p})A_{e\mu}(\mathbf{q})$$

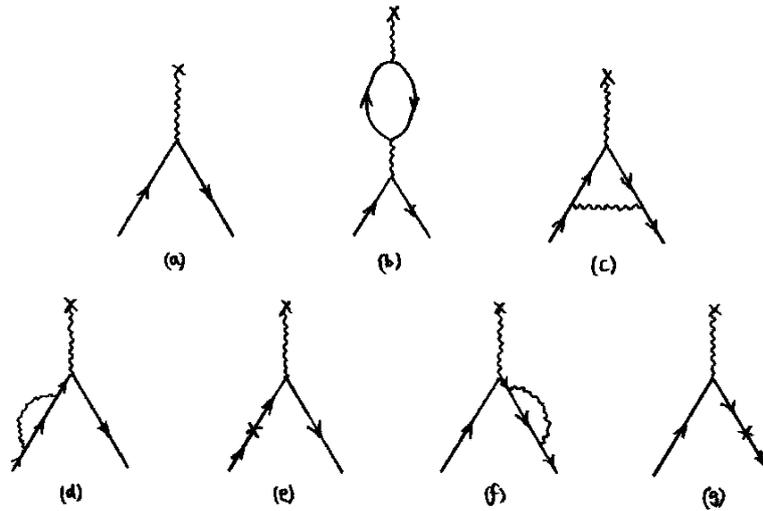


図 50 外場による電子の散乱 (教科書の図 9.15(p.212))

という項が現れる ( $\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ ). これは電子の磁気能率が<sup>43</sup>  $(-e/2m)$ , したがって  $g$  因子が<sup>43</sup>  $g = 2$  であることを意味する (Dirac 値) [本稿の付録 C.3.3 を参照]. 10.5 節で示すように,  $\Lambda_c^\mu(p', p)$  の項からは

$$-\frac{e}{2m} \cdot \frac{\alpha}{2\pi} \bar{u}(p') \sigma^{\mu\nu} q_\nu u(p) A_{e\mu}(q)$$

が現れる. これが磁気能率の Dirac 値に対する補正を表し, 上式と合わせると

$$-\frac{e}{2m} \left(1 + \frac{\alpha}{2\pi}\right) \bar{u}(p') \sigma^{\mu\nu} q_\nu u(p) A_{e\mu}(q)$$

となる. これは磁気能率が  $-\frac{e}{2m} \left(1 + \frac{\alpha}{2\pi}\right)$  であることを表し,  $g$  因子のずれとして書けば

$$a_e \equiv \frac{g-2}{g} = \frac{\alpha}{2\pi} = 0.00116$$

となる<sup>43</sup>.

$\alpha^4$  のオーダーまで補正した理論値は

$$10^{12} a_e = 1159652183 \pm 8$$

であり, 実験値

$$10^{12} a_e = 1159652181 \pm 7$$

と驚異的な精度で一致する.

### 9.6.1 について

■最低次の Feynman 振幅 (9.66) について 外場  $A_e$  にスラッシュを付け忘れていた.

<sup>43</sup> このように QED の立場からすれば, 異常磁気能率は“正常”である.

■Feynman 振幅 (9.67) について 式 (9.65) は輻射補正をする前の元のダイアグラムと併せて考えた結果であることに注意し, 付加的な項を取り出せば良い. ここで教科書の図 9.15(p.212)(b) のダイアグラムを考える際には, 式 (9.65a) の光子伝播関数  $\frac{-ig^{\alpha\beta}}{k^2+i\epsilon}$  の部分を外場  $A_{e\mu}(\mathbf{q})$  に置き換えれば良いと考えられる. ただし式 (9.16) に取り込んだ伝播関数の両端の電荷  $e_0^2$  の繰り込み  $e_0 \rightarrow e = e_0 Z_3^{1/2}$  について, 今の場合「この因子  $Z_3^{1/2}$  の一方は, 外場  $A_{e\mu}(\mathbf{q})$  の源として働く電荷の繰り込みへと吸収される」(p.212, 1.3,4).

■式 (9.69) の確認 式 (9.68) の対数部分を展開すると

$$\begin{aligned} e^2\Pi_c(q^2) &= -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dz z(1-z) \left\{ -\frac{q^2 z(1-z)}{m^2} + O\left(\left(\frac{q}{m}\right)^4\right) \right\} \\ &= \frac{2\alpha}{\pi} \frac{q^2}{m^2} \int_0^1 dz z^2(1-z)^2 + O\left(\left(\frac{q}{m}\right)^4\right) \\ &= \frac{\alpha}{15\pi} \frac{q^2}{m^2} + O\left(\left(\frac{q}{m}\right)^4\right) : (9.69) \end{aligned}$$

を得る.

### 9.6.2 Lamb シフト

Dirac 理論によれば水素原子の  $2s_{1/2}$  準位と  $2p_{1/2}$  準位は縮退しているが [例えば文献 [5, p.110,pp.157–162]], 実験的にはこれらの準位の間には, Lamb シフトと呼ばれる約 1000MHz のエネルギー差があることが明らかになった. 本節では水素原子のエネルギー準位に対する輻射補正からこれを説明する.

前節の静的ポテンシャルによる電子の散乱においては, 電子の自己エネルギーを表す図 50(d)–(g) の Feynman ダイアグラムは観測可能な輻射補正を生じなかった. 一方これから見るように, 水素原子内の束縛状態では電子の自己エネルギーが重要となる.

ここでは Bethe のアプローチに従い, 非相対論的な近似によって Lamb シフトを計算しよう. 1.4 節のように電子を捕獲している原子核 Coulomb 場を非摂動ハミルトニアンに含める束縛相互作用を採用し, 相互作用ハミルトニアンを式 (1.62):

$$H_I = \frac{1}{2m} \{ -2e\mathbf{A} \cdot \mathbf{p} + (e\mathbf{A})^2 \} \rightarrow -\frac{e}{m} \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}$$

にとる\*44. ここでは電子と (横波) 光子の相互作用が摂動として扱われていることになる. 水素原子内の状態  $|nl\rangle$  ( $n$  は主量子数,  $l$  は角運動量子数) の準位ずれは, 2 次の摂動論により

$$\delta E(nl) = - \sum_{\lambda} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=1,2} \frac{|\langle \lambda, n_r(\mathbf{k}) = 1 | H_I | nl \rangle|^2}{E_{\lambda} + k - E_n} \quad (247)$$

で与えられる [「9.6.2 について」の節で補足]. ここに  $|\lambda\rangle$  は完全系を成す水素原子状態の 1 つを表し,  $E_{\lambda}$  と  $E_n$  はそれぞれ状態  $|\lambda\rangle$  と  $|nl\rangle$  のエネルギー固有値である. また  $|n_r(\mathbf{k}) = 1\rangle$  は横波光子が 1 つある状態である. この  $\delta E(nl)$  は束縛状態の電子の自己エネルギーと解釈される量である. [ $|\lambda, n_r(\mathbf{k}) = 1\rangle$  を中間状態にとっていることが, 電子の自己エネルギーに対応していると考えられる.] 行列要素  $\langle B, n_r(\mathbf{k}) + 1 | H_I | A, n_r(\mathbf{k}) \rangle$  の式 (1.65) ( $A, B$  は原子状態) を用い, 重要な寄与を持つ仮想光子の波長は Bohr 半径よりも充分長く ( $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \ll 1$ ,

\*44  $\mathbf{A}^2$  の項は電子の運動量に依存しない. したがってこれは束縛電子に関しては同じ電子の自己エネルギーを生成し, 準位の相対的なずれには寄与を持たない.

$\mathbf{r}$  は場  $\mathbf{A}$  の引数),  $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \simeq 1$  として, 1.3 節と同様にこれを評価すると

$$\delta E(nl) = -\frac{1}{6\pi^2} \left(\frac{e}{m}\right)^2 \int_0^\infty dk k \sum_\lambda \frac{|\langle \lambda | \mathbf{p} | nl \rangle|^2}{E_\lambda + k - E_n} \quad (248)$$

を得る [「9.6.2 について」の節で補足].

さて, ここで自己エネルギー効果の一部は, 計算に裸の質量ではなく物理的な電子質量を用いることによって既に考慮されていることに注意しよう. したがって真の準位ずれは, 束縛電子の自己エネルギーと, 自由電子のそれとの差に対応する [「9.6.2 について」の節で補足]. そこで自由電子の自己エネルギー  $\delta E_f(nl)$  を求めよう. そのためには式 (248) において束縛状態  $|\lambda\rangle, |nl\rangle$  を平面波状態  $\mathbf{p}$  に置き換えて

$$\sum_\lambda \frac{|\langle \lambda | \mathbf{p} | nl \rangle|^2}{E_\lambda + k - E_n} \rightarrow \frac{\mathbf{p}^2}{k}$$

とし, 次いで状態  $|nl\rangle$  の運動量分布について  $\mathbf{p}^2$  の期待値をとって

$$\begin{aligned} \delta E_f(nl) &= -\frac{1}{6\pi^2} \left(\frac{e}{m}\right)^2 \langle nl | \mathbf{p}^2 | nl \rangle \int_0^\infty dk \\ &= -\frac{1}{6\pi^2} \left(\frac{e}{m}\right)^2 \sum_\lambda |\langle \lambda | \mathbf{p}^2 | nl \rangle|^2 \int_0^\infty dk \end{aligned} \quad (249)$$

とすれば良い. 物理的な電子質量を用いて状態  $|nl\rangle$  の準位ずれを計算するのであれば, 自己エネルギー  $\delta E_f(nl)$  は繰り込み済みであり, 上で述べたように観測される準位ずれは

$$\begin{aligned} \Delta E(nl) &= \delta E(nl) - \delta E_f(nl) \\ &= \frac{1}{6\pi^2} \left(\frac{e}{m}\right)^2 \sum_\lambda |\langle \lambda | \mathbf{p}^2 | nl \rangle|^2 \int_0^\infty dk \frac{E_\lambda - E_n}{E_\lambda - E_n + k} \end{aligned} \quad (250)$$

与えられる.  $k \rightarrow \infty$  において式 (248), 式 (249) は 1 次で発散するのに対し, 式 (250) は対数的にしか発散しない.

- 式 (248) を収束させるために, 積分の上限を有限の切断値  $k = K \sim m$  に置き換える.
  - これは電子の非相対論的な取扱いが有効であるためには, 電子がエネルギー  $k$  の仮想光子を放出したときの反跳エネルギーが質量に比べて充分小さくなければならないこと  $k \ll m$  から正当化される.
- $\lambda$  の和を評価できる形にするために, 次式で定義される平均励起エネルギー  $\langle E - E_n \rangle$  を導入する.

$$\sum_\lambda |\langle \lambda | \mathbf{p} | nl \rangle|^2 (E_\lambda - E_n) \{ \ln \langle E - E_n \rangle - \ln |E_\lambda - E_n| \} = 0. \quad (251)$$

- 水素原子内の状態  $\phi_{nl}(\mathbf{x}) \equiv \langle \mathbf{x} | nl \rangle$  の具体形を用いて式 (9.77):

$$\langle \lambda | \mathbf{p} | nl \rangle = \int d^3x \phi_\lambda^*(\mathbf{x}) (-i\nabla) \phi_{nl}(\mathbf{x})$$

に対して和 (9.86):

$$\sum_\lambda |\langle \lambda | \mathbf{p} | nl \rangle|^2 (E_\lambda - E_n)$$

を評価する.

以上の手順により，最終的な結果として

$$\Delta E(nl) = \frac{8}{3\pi} \frac{a^3}{n^3} \text{Ry} \ln \frac{K}{\langle E - E_n \rangle} \delta_{l0} \quad (252)$$

を得る [導出は下記]. ここに  $\text{Ry} \equiv e^2/(8\pi a)$  は Rydberg エネルギー， $a \equiv 4\pi/(me^2)$  は Bohr 半径である. これによれば  $s$  状態  $l=0$  だけが電子の自己エネルギー効果による準位ずれを起こす. Bethe は数値計算に基づいて  $\langle E - E_{2s} \rangle = 17.8\text{Ry}$  という値を用い，また  $K = m$  と置いて，Lamb シフトの予想値として

$$E(2s_{1/2}) - E(2p_{1/2}) = 1040\text{MHz}$$

を得た. [自己エネルギー効果を考慮しない理論において  $2s_{1/2}$  準位と  $2p_{1/2}$  準位は縮退しているため， $s$  状態のみに起こる準位ずれ  $\Delta E(nl)$  が 2 準位間のエネルギー差である Lamb シフトを与えることになる.] これは実験値  $1057.8 \pm 0.1\text{MHz}$  とよく一致している.

### 9.6.2 節，式の導出など

■式 (252) の導出 式 (250) は， $\lambda$  の和に関して重要な項が  $|E_\lambda - E_n| \ll K$  を満たすものと仮定すると

$$\Delta E(nl) = \frac{1}{6\pi^2} \left(\frac{e}{m}\right)^2 \sum_\lambda |\langle \lambda | \mathbf{p} | nl \rangle|^2 (E_\lambda - E_n) \ln \frac{K}{|E_\lambda - E_n|} \quad (9.83)$$

となる [「9.6.2 について」の節で補足]. これは切断  $K$  に対して対数的にしか変化せず， $K$  の値の選び方に対して鈍感である. 式 (251) で定義した平均励起エネルギー  $\langle E - E_n \rangle$  を用いてこれを

$$\Delta E(nl) = \frac{1}{6\pi^2} \left(\frac{e}{m}\right)^2 \ln \frac{K}{\langle E - E_n \rangle} \sum_\lambda |\langle \lambda | \mathbf{p} | nl \rangle|^2 (E_\lambda - E_n)$$

と書き換えると， $\lambda$  に関する和の計算を

$$\begin{aligned} \sum_\lambda |\langle \lambda | \mathbf{p} | nl \rangle|^2 (E_\lambda - E_n) &= \frac{1}{2} e^2 |\phi_{nl}(\mathbf{0})|^2 \\ &= \begin{cases} \frac{e^2}{2\pi a^3 n^3} & \text{if } l=0 (s \text{ 状態}) \\ 0 & \text{if } l \neq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (9.86)$$

と実行できるので [本稿次節で補足]，式 (252) が得られる.

### 9.6.2 について

■2 次の摂動論における準位ずれの式 (247) について 縮退のある場合の時間を含まない摂動論の公式

$$\Delta_l^{(1)} = \langle l^{(0)} | V | l^{(0)} \rangle, \quad \Delta_l^{(2)} = \sum_{k \notin D} \frac{|V_{kl}|^2}{E_D^{(0)} - E_k^{(0)}}$$

を参照する [7, p.414, p.416].

■式 (248) の導出  $\delta E(nl)$  の式 (247) における行列要素  $\langle \lambda, n_r(\mathbf{k}) = 1 | H_1 | nl \rangle$  は， $\langle B, n_r(\mathbf{k}) + 1 | H_1 | A, n_r(\mathbf{k}) \rangle$  の式 (1.65) において  $n_r(\mathbf{k}) = 0$  と置いたものに対応するから，

$$\langle \lambda, n_r(\mathbf{k}) = 1 | H_1 | nl \rangle = -\frac{e}{m} \frac{1}{(2V_k)^{1/2}} \langle \lambda | \boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{p} | nl \rangle e^{i\omega_k t}$$

である ( $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \simeq 1$  の近似を用いた). これを式 (9.74) に代入したときに現れる和は, p.15(1.3 節) の計算と同様に

$$\sum_{r=1,2} |\boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k}) \cdot \langle \lambda | \mathbf{p} | nl \rangle|^2 = |\langle \lambda | \mathbf{p} | nl \rangle|^2 \sin^2 \theta$$

となる. ここに  $\theta$  は  $\mathbf{k}$  と  $\mathbf{p}$  の成す角である. よって  $\delta E(nl)$  の式 (247) は

$$\delta E(nl) = - \sum_{\lambda} \sum_{\mathbf{k}} \left( \frac{e}{m} \right)^2 \frac{1}{2Vk} \frac{|\langle \lambda | \mathbf{p} | nl \rangle|^2}{E_{\lambda} + k - E_n} \sin^2 \theta$$

と書き換えられる. 状態数の式 (1.47) を考慮して  $\mathbf{k}$  に関する和を

$$\sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \int \frac{dk d\Omega V k^2}{(2\pi)^3}$$

と積分に置き換えると,

$$\begin{aligned} \delta E(nl) &= \frac{1}{2(2\pi)^3} \left( \frac{e}{m} \right)^2 \left( \int d\Omega \sin^2 \theta \right) \int_0^{\infty} dk k \sum_{\lambda} \frac{|\langle \lambda | \mathbf{p} | nl \rangle|^2}{E_{\lambda} + k - E_n} \\ &= - \frac{1}{6\pi^2} \left( \frac{e}{m} \right)^2 \int_0^{\infty} dk k \sum_{\lambda} \frac{|\langle \lambda | \mathbf{p} | nl \rangle|^2}{E_{\lambda} + k - E_n} : (248) \end{aligned}$$

を得る ( $\int d\Omega \sin^2 \theta = \frac{8\pi}{3}$ ).

■ 「自己エネルギーの効果の一部は, ……自由電子と束縛電子の自己エネルギーの差に対応する」 (p.216, 1.2-4) について 質量の繰り込み  $m_0 \rightarrow m$  は, 電子が常に光子の衣をまとっているために生じる一定の自己エネルギー

$$\delta E_f(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{\mathbf{p}^2}{2m_0}$$

に関係している. ところで束縛状態における電子の自己エネルギー  $\delta E(nl)$  の計算では, 電子の裸の質量  $m_0$  ではなく物理的な質量  $m$  を用いており, 通常は観測にかからない量  $\delta E_f(\mathbf{p})$  を含めてしまっていることになる. そこでこれを差し引いて, 観測される自己エネルギーによる準位のずれを

$$\Delta E(nl) = \delta E(nl) - \langle nl | \delta E_f(\mathbf{p}) | nl \rangle = \delta E(nl) - \delta E_f(nl)$$

とする [5, pp.85-86].

■ 式 (9.83) の導出

$$\begin{aligned} \int_0^K dk \frac{E_{\lambda} - E_n}{E_{\lambda} - E_n + k} &= (E_{\lambda} - E_n) [\ln |E_{\lambda} - E_n + k|]_0^K = (E_{\lambda} - E_n) \ln \left| \frac{E_{\lambda} - E_n + K}{E_{\lambda} - E_n} \right| \\ &\simeq (E_{\lambda} - E_n) \ln \frac{K}{|E_{\lambda} - E_n|} \end{aligned}$$

による.

■式 (9.86) の導出 水素原子における 1 電子を考えているので, 1.4 節の非摂動ハミルトニアンは簡単に

$$H_m = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r}), \quad V(\mathbf{r}) = -\frac{e^2}{4\pi r}$$

となる. ここで位置の任意関数  $F(\mathbf{r})$  に対する公式

$$[p_i, F(\mathbf{r})] = -i \frac{\partial F}{\partial x_i} \quad (253)$$

を思い出すと [1, p.113],

$$[H_m, \mathbf{p}] = i \nabla V, \quad \therefore i \langle \lambda | \nabla V | nl \rangle = \langle \lambda | [H_m, \mathbf{p}] | nl \rangle = \langle \lambda | \mathbf{p} | nl \rangle (E_\lambda - E_n)$$

なので, 式 (9.86) 最左辺の和は

$$\sum_\lambda |\langle \lambda | \mathbf{p} | nl \rangle|^2 (E_\lambda - E_n) = i \sum_\lambda \langle nl | \mathbf{p} | \lambda \rangle \cdot \langle \lambda | \nabla V | nl \rangle = i \langle nl | \mathbf{p} \cdot \nabla V | nl \rangle$$

と評価される. 最左辺は実数なので, 最右辺もまた実数でなければならないから,

$$\begin{aligned} \sum_\lambda |\langle \lambda | \mathbf{p} | nl \rangle|^2 (E_\lambda - E_n) &= \text{Re}[i \langle nl | \mathbf{p} \cdot \nabla V | nl \rangle] = \frac{i}{2} \sum_{k=1}^3 \langle nl | [p_k, \partial_k V] | nl \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle nl | \nabla^2 V | nl \rangle \quad (\because \text{式 (253)}) \\ &= \frac{1}{2} \int |\phi_{nl}(\mathbf{r})|^2 \nabla^2 V d^3x \\ &= \frac{e^2}{2} |\phi_{nl}(\mathbf{0})|^2 \quad (\because \text{Poisson 方程式 } \nabla^2 V = e^2 \delta(\mathbf{r})) \end{aligned} \quad (254)$$

とできる [5, p.87].

ところで水素型原子 (原子番号  $Z$ ) における電子の波動関数は,  $s$  状態 ( $l=0$ ) 以外では原点でゼロになる. 実際, 波動関数  $\phi_{nl} = R_{nl}(r) Y_l^m(\theta, \phi)$  における動径部分は, 無次元化した変数  $\rho = 2rZ/na$  を用いて

$$R_{nl}(r) = - \left\{ \left( \frac{2Z}{na} \right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3} \right\}^{1/2} e^{-\rho/2} \rho^l L_{n+l}^{2l+1}(\rho)$$

と表される [1, pp.351-352]\*45. ここに Laguerre 多項式

$$\begin{aligned} L_N(\rho) &= e^\rho \frac{d^N}{d\rho^N} (\rho^N e^{-\rho}) \\ &= e^{-\rho} \{ (-1)^N \cdot \rho^N + N \cdot (-1)^{N-1} \cdot N \rho^{N-1} + \dots + N \cdot (-1) \cdot N! \rho + n! \} e^{\rho} \quad (\text{Leibniz の公式}) \end{aligned} \quad (255)$$

は  $\rho$  の  $N$  次の多項式であり, Laguerre 陪多項式

$$L_{n+l}^{2l+1}(\rho) = \left( \frac{d}{d\rho} \right)^{2l+1} L_{n+l}(\rho)$$

は  $\rho$  の  $(n+l) - (2l+1) = n-l-1 (\geq 0)$  次式である. その上で  $R_{nl}(\rho)$  全体は  $\rho^l$  に比例しているから,  $l \neq 0$  でない限り  $R_{nl}(0) = 0$  となる.

\*45 このことは電磁気学の単位系によらず, ただ Bohr 半径  $a$  の定義式が単位系によって変わる. 我々は式 (254) の箇所で Poisson 方程式  $\nabla^2 V = e^2 \delta(\mathbf{r})$  を用いた際, これまで通り Heaviside 単位系を仮定した.

次に  $l = 0$  に対する波動関数の原点での値  $\phi_{n0}(\mathbf{0})$  を調べよう．このとき  $m = 0$  なので，球面調和関数は  $Y_0^0(\theta, \phi) = 1/\sqrt{4\pi}$  に決まる．また Laguerre 多項式の表式 (255) より

$$L_n^1(0) = \left. \frac{d}{d\rho} L_n(\rho) \right|_{\rho=0} = -n \cdot n!$$

なので， $R_{n0}(0) = \left[ \frac{4Z^3}{n^3 a^3} \right]^{1/2}$  である．水素原子を想定して  $Z = 1$  とおくと

$$|\phi_{n0}(\mathbf{0})|^2 = |R_{n0}(0)|^2 \frac{1}{4\pi} = \frac{1}{\pi n^3 a^3}$$

が得られる．

以上より式 (254) の最右辺は

$$\frac{e^2}{2} |\phi_{nl}(\mathbf{0})|^2 = \frac{e^2}{2\pi n^3 a^3} \delta_{l0}$$

と書き換えられるので，式 (9.86) を得る．

## 9.7 赤外発散

8.8 節と 8.9 節では外場による電子の散乱を考察した．エネルギーが  $\Delta E$  未満の軟光子 (エネルギーが低い光子という意味) の制動放射に関する断面積  $(d\sigma/d\Omega')_B$  は赤外発散し，赤外発散を防ぐために光子に質量  $\lambda$  を与えて計算し直すと，

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega'} \right)_B = \left( \frac{d\sigma}{d\Omega'} \right)_0 \alpha B(\lambda), \quad B(\lambda) = \frac{-1}{(2\pi)^2} \int_{\lambda \leq \omega_\lambda \leq \Delta E} \frac{d^3 k}{\omega_\lambda} \left[ \frac{2p'}{2p' \cdot k + \lambda^2} + \frac{2p}{-2p \cdot k + \lambda^2} \right]^2$$

となることを見た．ここで  $\omega_\lambda \equiv (\lambda^2 + \mathbf{k}^2)^{1/2}$  であり， $(d\sigma/d\Omega')_0$  は制動放射のない厳密な弾性散乱の断面積  $(d\sigma/d\Omega')_{E1}$  の，最低次の摂動論による計算結果である．さて，現実の実験ではエネルギー分解能が有限なので，エネルギーがある値  $\Delta E$  未満の軟光子を制動放射する散乱も弾性散乱として記録される．よって弾性散乱の実験的な断面積は

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega'} \right)_{\text{Exp}} = \left( \frac{d\sigma}{d\Omega'} \right)_{E1} + \left( \frac{d\sigma}{d\Omega'} \right)_B$$

である．

8.9 節では次のことを予告した．すなわち弾性散乱断面積

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega'} \right)_{E1} = \left( \frac{d\sigma}{d\Omega'} \right)_0 [1 + \alpha R(\lambda)]$$

における  $\alpha$  の 1 次の補正  $R(\lambda)$  を計算すると，これは赤外発散を生じる．そしてこの発散は  $B(\lambda)$  の発散と相殺し，実験的な断面積

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega'} \right)_{E1} = \left( \frac{d\sigma}{d\Omega'} \right)_0 [1 + \alpha \{B(\lambda) + R(\lambda)\} + O(\alpha^2)]$$

は有限となる．(これは赤外発散の困難が，制動放射と弾性散乱を人為的に区別することに由来していることを意味する．) このことを確かめよう．

最低次の輻射補正を含む電子の弾性散乱に関する Feynman 振幅 (9.67):

$$ie\bar{u}(\mathbf{p}')\gamma^\mu u(\mathbf{p})A_{e\mu}(\mathbf{q}) + ie\bar{u}(\mathbf{p}')\gamma^\mu u(\mathbf{p})[-e^2\Pi_c(q^2)]A_{e\mu}(\mathbf{q}) + ie\bar{u}(\mathbf{p}')[e^2\Lambda_c^\mu(p', p)]u(\mathbf{p})A_{e\mu}(\mathbf{q})$$

において  $\Pi_c$  は赤外発散を生じない [式 (9.68):  $e^2\Pi_c(q^2) = -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dz z(1-z) \ln \left[ 1 - \frac{q^2 z(1-z)}{m^2} \right]$  (説明は 10.4 節) を参照]．赤外発散は  $\Lambda_c^\mu$  の項から生じる．実際，本節の計算の結果として， $\Lambda_c^\mu$  の項は  $k \rightarrow 0$  のとき

$$e^2\bar{u}(\mathbf{p}')\Lambda_c^\mu(p', p)u(\mathbf{p}) \simeq e^2\bar{u}(\mathbf{p}')\gamma^\mu(p', p)u(\mathbf{p}) \times \frac{1}{4(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k}{\omega_\lambda} \left( \frac{p'}{p' \cdot k} - \frac{p}{p \cdot k} \right)^2 \quad (256)$$

となることが示される [導出は下記]. よって電子の弾性散乱に関する Feynman 振幅と断面積は, 最低次の結果に対する  $\alpha$  のオーダーの補正を行うと, それぞれ

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \left\{ 1 + \frac{e^2}{4(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{\omega_\lambda} \left( \frac{p'}{p' \cdot k} - \frac{p}{p \cdot k} \right)^2 \right\}, \quad \mathcal{M}_0 \equiv ie\bar{u}(\mathbf{p}') A_e(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) u(\mathbf{p}),$$

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega'} \right)_{\text{El}} = \left( \frac{d\sigma}{d\Omega'} \right)_0 [1 + \alpha R(\lambda)], \quad R(\lambda) \equiv \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^3k}{\omega_\lambda} \left( \frac{p'}{p' \cdot k} - \frac{p}{p \cdot k} \right)^2$$

となる.  $R(\lambda)$  の  $\lambda \rightarrow 0$  における赤外発散は確かに  $B(\lambda)$  の赤外発散と相殺することが見て取れる (式 (8.110) と見比べよ). なお, より高次の輻射補正から生じる赤外発散についても, 複数個の軟光子放射を含む非弾性過程の赤外発散と打ち消し合うことが知られており, これは Bloch-Nordsieck の定理と呼ばれる (8.9 節).

### 9.7 節, 式の導出など

■式 (256) の導出 式 (235) の  $\Lambda^\mu(p', p)$  を式 (219) の置き換えによって正則化すると,

$$e^2 \Lambda^\mu(p', p) = \frac{-ie^2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon} f(k) \left\{ \frac{\gamma^\alpha (\not{p}' - \not{k} + m) \gamma^\mu (\not{p} - \not{k} + m) \gamma_\alpha}{[(p' - k)^2 - m^2 + i\varepsilon][(p - k)^2 - m^2 + i\varepsilon]} \right\}, \quad (9.92)$$

$$f(k) \equiv \frac{\lambda^2 - \Lambda^2}{k^2 - \Lambda^2 + i\varepsilon} \quad (9.93)$$

となる. ここで  $k \rightarrow 0$  の赤外発散を調べるには切断因子  $f(k)$  を省いて良く, また可能な箇所では  $k = 0$  とおき,  $p^2 = p'^2 = m^2$  と Dirac 方程式を用いると

$$e^2 \bar{u}(\mathbf{p}') \Lambda^\mu(p', p) u(\mathbf{p}) = \frac{-ie^2}{(2\pi)^4} \bar{u}(\mathbf{p}') \gamma^\mu u(\mathbf{p}) \left[ \int \frac{d^4k}{k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon} \frac{(p' \cdot p)}{(p' \cdot k)(p \cdot k)} + \dots \right] \quad (9.94)$$

を得る [本稿次節で補足] (「 $\dots$ 」は  $\lambda \rightarrow 0$  のとき有限に留まる項であり, 発散項に対して無視できる). ここで恒等式

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon} &\equiv \text{P} \frac{1}{k^2 - \lambda^2} - i\pi \delta(k^2 - \lambda^2) \\ &\equiv \text{P} \frac{1}{k^2 - \lambda^2} - \frac{i\pi}{2\omega_\lambda} [\delta(k^0 - \omega_\lambda) + \delta(k^0 + \omega_\lambda)] \end{aligned}$$

(ただし  $\omega_\lambda = (\lambda^2 + \mathbf{k}^2)^{1/2}$ ) を用いて  $k^0$ -積分を実行し, 主値 P からの有限の寄与を省くと,

$$e^2 \bar{u}(\mathbf{p}') \Lambda^\mu(p', p) u(\mathbf{p}) = e^2 \bar{u}(\mathbf{p}') \gamma^\mu u(\mathbf{p}) A(p', p) + \dots, \quad (9.96a)$$

$$A(p', p) \equiv \frac{-1}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{\omega_\lambda} \frac{(p' \cdot p)}{(p' \cdot k)(p \cdot k)} \quad (9.96b)$$

が得られる [本稿次節で補足]. 式 (237) から得られる関係

$$e^2 \bar{u}(\mathbf{p}) \Lambda^\mu(p, p) u(\mathbf{p}) = e^2 L \bar{u}(\mathbf{p}) \gamma^\mu u(\mathbf{p})$$

と比較すると  $L = A(p, p) + \dots$  が見出される. 同様に  $p$  を  $p'$  に置き換えた  $L = A(p', p') + \dots$  が成り立つ. これらを式 (238) と併せて用いると,

$$\begin{aligned} e^2 \bar{u}(\mathbf{p}') \Lambda_c^\mu(p', p) u(\mathbf{p}) &= e^2 \bar{u}(\mathbf{p}') [\Lambda^\mu(p', p) - L \gamma^\mu] u(\mathbf{p}) \\ &= e^2 \bar{u}(\mathbf{p}') \gamma^\mu u(\mathbf{p}) \left\{ A(p', p) - \frac{1}{2} A(p', p') - \frac{1}{2} A(p, p) \right\} + \dots \\ &= e^2 \bar{u}(\mathbf{p}') \gamma^\mu (p', p) u(\mathbf{p}) \left\{ \frac{1}{4(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{\omega_\lambda} \left( \frac{p'}{p' \cdot k} - \frac{p}{p \cdot k} \right)^2 \right\} + \dots : (256) \end{aligned}$$

と計算される。

## 9.7 について

■式 (9.94) の確認  $\Lambda_c^\mu(p', p)$  の式 (9.92) の  $\{\dots\}$  内は, 可能な箇所では  $k = 0$  とおくと

$$\frac{\gamma^\alpha(\not{p}' + m)\gamma^\mu(\not{p} + m)\gamma_\alpha}{(-2p' \cdot k + i\varepsilon)(-2p \cdot k + i\varepsilon)}$$

となる。これに左から  $\bar{u}(p') \equiv \bar{u}$  を, 右から  $u(p) \equiv u$  をかけることを考える。反交換子を  $\{ \quad, \quad \}$  と書くと,

$$\begin{aligned} (\not{p} + m)\gamma_\alpha u &= [\{\not{p} + m, \gamma_\alpha\} - \gamma_\alpha(\not{p} + m)]u \\ &= (2p_\alpha + 2m\gamma_\alpha)u - \gamma_\alpha 2mu \\ &\quad (\because \{\not{p}, \gamma_\alpha\} = p^\beta \{\gamma_\beta, \gamma_\alpha\} = p^\beta 2g_{\alpha\beta} = 2p_\alpha, \quad \not{p}u = mu : (A.25)) \\ &= 2p_\alpha u, \\ \bar{u}\gamma^\alpha(\not{p}' + m) &= \bar{u}[\{\gamma^\alpha, \not{p}' + m\} - (\not{p}' + m)\gamma^\alpha] \\ &= \bar{u}(2p'^\alpha + 2m\gamma^\alpha) - 2m\bar{u}\gamma^\alpha \\ &\quad (\because \{\gamma^\alpha, \not{p}'\} = p'_\beta \{\gamma^\alpha, \gamma^\beta\} = p'_\beta 2g^{\alpha\beta} = 2p'^\alpha, \quad \bar{u}\not{p}' = m\bar{u} : (A.26)) \\ &= 2p'^\alpha \bar{u} \end{aligned}$$

より

$$\bar{u}\gamma^\alpha(\not{p}' + m)\gamma^\mu(\not{p} + m)\gamma_\alpha u = 4(p' \cdot p)\bar{u}\gamma^\mu u$$

なので, 式 (9.94):

$$\bar{u}(p') \frac{\gamma^\alpha(\not{p}' + m)\gamma^\mu(\not{p} + m)\gamma_\alpha}{(-2p' \cdot k + i\varepsilon)(-2p \cdot k + i\varepsilon)} u(p) = \bar{u}(p') \gamma^\mu u(p) \frac{p' \cdot p}{(p' \cdot k)(p \cdot k)}$$

を得る ( $\varepsilon = 0$ )。

■式 (9.96) の確認 式 (9.94) において

$$\begin{aligned} &\frac{-ie^2}{(2\pi)^4} \int d^3k \int dk^0 \left( -\frac{i\pi}{2\omega_\lambda} \right) [\delta(k^0 - \omega_\lambda) + \delta(k^0 + \omega_\lambda)] \frac{p' \cdot p}{(p' \cdot k)(p \cdot k)} \\ &= e^2 \frac{-1}{2(2\pi)^3} \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{\omega_\lambda} (p' \cdot p) \left\{ \left[ \frac{1}{(p' \cdot k)(p \cdot k)} \right]_{k^0=\omega_\lambda} + \left[ \frac{1}{(p' \cdot k)(p \cdot k)} \right]_{k^0=-\omega_\lambda} \right\} \end{aligned}$$

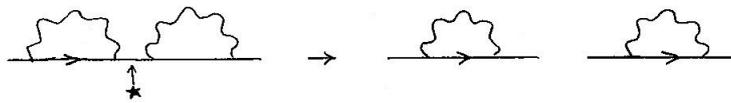
であり,  $\{\dots\}$  内第 2 項

$$\left[ \frac{1}{(p' \cdot k)(p \cdot k)} \right]_{k^0=-\omega_\lambda} = \frac{1}{(\omega_\lambda p'^0 + \mathbf{p}' \cdot \mathbf{k})(\omega_\lambda p^0 + \mathbf{p} \cdot \mathbf{k})}$$

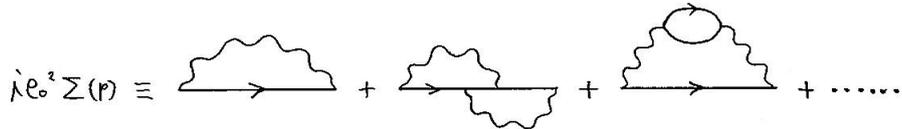
は積分変数を  $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$  と置き換えると第 1 項に一致するので, 上式は

$$e^2 A(p', p), \quad A(p', p) \equiv \frac{-1}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{\omega_\lambda} \frac{p' \cdot p}{(p' \cdot k)(p \cdot k)} : (9.96b)$$

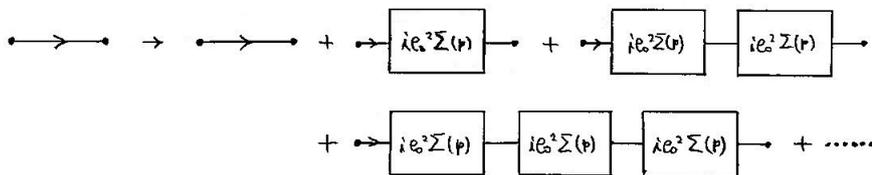
となる。ただし式 (9.96b) では  $k^0 = \omega_\lambda$  と見なす。



非固有グラフの例. ★の箇所では内線も切断すると, 2つのグラフに分離できる.



電子の自己エネルギーを表す, 全ての固有グラフの総和



$i e_0^2 \Sigma(p)$  を繰り返して含めることによって得られる電子の伝播関数

図 51 電子の伝播関数に対する高次の輻射補正

## 9.8 高次の輻射補正

これまで見てきた  $\alpha$  のオーダーの輻射補正に関する繰り込みの手続きを, すべての摂動次数へと一般化する方法について簡単に言及する.

### 電子の伝播関数

図 51 のように, 1 本の内線を切断することによって 2 つのグラフに分離できないようなグラフを固有グラフと定義すると, 可能な電子の自己エネルギー部分のグラフは固有グラフと非固有グラフを含む. そこで図 51 のように,  $i e_0^2 \Sigma(p)$  をすべての固有自己エネルギーの総和と再定義すると, それを繰り返して含めることによって得られる電子の伝播関数は可能な電子の自己エネルギーのすべてのグラフを含むことになり, 対応する無限級数は

$$\begin{aligned}
 i S_F(p) &= \frac{i}{\not{p} - m_0 + i\epsilon} \\
 \rightarrow i S_F(p) + i S_F(p) \{ i e_0^2 \Sigma(p) \} i S_F(p) + i S_F(p) \{ i e_0^2 \Sigma(p) \} i S_F(p) \{ i e_0^2 \Sigma(p) \} i S_F(p) + \dots \\
 &= \frac{i}{\not{p} - m_0 + e_0^2 \Sigma(p) + i\epsilon} \quad (\because \text{恒等式 (221)})
 \end{aligned}$$

となる.

9.3 節と同様に繰り込まれた質量  $m$  を用い, 展開

$$\Sigma(p) = A + (\not{p} - m)B + (\not{p} - m)\Sigma_c(p)$$

よって  $A, B, \Sigma_c(p)$  を定義すると、これは

$$\frac{ie_0^2}{\not{p} - m_0 + i\varepsilon} \rightarrow \frac{ie_0^2}{(\not{p} - m)(1 + e_0^2 B) + e_0^2(\not{p} - m)\Sigma_c(p) + i\varepsilon}$$

と書き換えられる。9.3 節の式 (9.29) と違って、ここでは  $\Sigma(p)$  が電子の自己エネルギーの全ての固有グラフを表し、これは摂動の全次数で成立する。繰り込まれた電荷  $e$  を

$$e^2 \equiv Z_2 e_0^2 = \frac{e_0^2}{1 + e_0^2 B}$$

よって定義すると (式 (9.35):  $e^2 \equiv Z_2 e_0^2 = e_0^2(1 - e_0^2 B) + O(e_0^6)$  に整合), これは

$$\frac{ie_0^2}{\not{p} - m_0 + i\varepsilon} \rightarrow \frac{ie^2}{(\not{p} - m) + e^2(\not{p} - m)\Sigma_c(p) + i\varepsilon}$$

となる。

あるいは等価的に、あらかじめ理論に物理的質量  $m$  を用いる代わりに相互作用に質量相殺項を導入するアプローチを採用するならば、

$$\frac{ie_0^2}{\not{p} - m + i\varepsilon} \rightarrow \frac{ie^2}{(\not{p} - m) + e^2(\not{p} - m)\Sigma_c(p) + i\varepsilon}.$$

#### 光子の伝播関数

電子の伝播関数と同様に、光子の自己エネルギー部分を表す固有グラフの総和として  $ie_0^2 \Pi^{\mu\nu}(k)$  を再定義すると、固有と非固有を合わせたあらゆる光子の自己エネルギー部分を含む光子の伝播関数への修正は

$$\frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon} \rightarrow \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon + e_0^2 A(k^2)}$$

となる。ただし  $A(k^2)$  はここでも式 (9.11):  $\Pi^{\mu\nu}(k) = -g^{\mu\nu} A(k^2) + k^\mu k^\nu B(k^2)$  によって定義されている。上式は 9.2 節の式 (9.13) と同じ形をしており、式 (9.13) との違いは  $ie_0^2 \Pi^{\mu\nu}(k)$  の (したがって  $A(k^2)$  の) 解釈と、それが全ての次数で成り立つことである。繰り込まれた電荷  $e$  を

$$e \equiv e_0 Z_3^{1/2} = e_0 [1 + e_0^2 A'(0)]^{-1/2}$$

よって定義すると (式 (9.18):  $e \equiv e_0 Z_3^{1/2} = e_0 [1 - \frac{1}{2} e_0^2 A'(0) + O(e_0^4)]$  に整合), これは

$$\frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon} e_0^2 \rightarrow \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon + e^2 \Pi_c(k^2)} e^2$$

となる。ただし  $\Pi_c(k^2)$  はここでも式 (9.15):  $A(k^2) = k^2 A'(0) + k^2 \Pi_c(k^2)$  によって定義されている。

#### 外線繰り込み

すべての摂動次数において、外線における自己エネルギーの効果は質量と電荷の繰り込みだけに限られることが証明されている。

#### 結節点補正

自己エネルギーの議論と同様に、 $ie_0^3 \Lambda^\mu(p', p)$  をすべての固有結節点グラフの総和として再定義すると、

$$e \equiv \frac{e_0}{Z_1} = e_0(1 + e_0^2 L), \quad ie_0 \gamma^\mu \rightarrow i\Gamma^\mu(p', p) = ie[\gamma^\mu + e^2 \Lambda_c^\mu(p', p)].$$

### すべての輻射補正を得る方法

自己エネルギー部分の挿入や結節点補正によってすべての輻射補正が得られるわけではない。今、グラフからすべての自己エネルギー部分と結節点補正を除くことを“簡約”と呼び、“簡約”されたグラフを“骨格グラフ”と呼ぶことにする。このとき任意の過程に対する Feynman 振幅を  $n$  次まで計算するには、以下のようにすれば良い。まず考えている過程に対応する外線を持つような、結節点が  $n$  個以下のすべての骨格グラフを描く。次いでこれらの骨格グラフに対して、伝播関数と結節点に対する補正

$$\begin{aligned} \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} &\rightarrow \frac{i}{(\not{p} - m) + e^2(\not{p} - m)\Sigma_c(p) + i\epsilon}, & (\text{第 2 のアプローチに対して}) \\ \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\epsilon} &\rightarrow \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 + i\epsilon + e^2\Pi_c(k^2)}, \\ ie_0\gamma^\mu &\rightarrow ie[\gamma^\mu + e^2\Lambda_c^\mu(p', p)] \end{aligned}$$

を施す。ここで補正による正味の電荷の繰り込み (9.64):  $e = e_0 Z_3^{1/2}$  は全次数で成り立つ。また補正後の式における  $\Sigma_c, \Pi_c, \Lambda_c^\mu$  は第一義的には  $e_0$  によって表されているけれど、これらを  $e$  によって表現できることが証明されている。最後にこれらを  $e^2$  で展開すれば、 $n$  次過程に寄与する全てのグラフを拾い出せる。

## 9.9 繰り込み可能性

正則化された理論から QED を復元するような極限操作の後にも、輻射補正は有限の値に留まることを天下一的に述べる。まず任意の内線が切断されて 2 本の外線に置き換わると収束グラフに変換されるような、基本発散グラフを定義する。他の発散はすべて基本発散から構築されるため、理論の発散を調べるには基本発散を考察すれば充分である。QED の基本発散グラフは以下の 3 種類に限られることが証明されている。

- 電子の自己エネルギー (9.1 節の図 39(a))
- 光子の自己エネルギー (9.1 節の図 39(b))
- 結節点補正 (9.1 節の図 39(c) のみならず、高次の基本発散グラフが無数に存在)

自己エネルギー部分と結節点補正を表す、すべての固有グラフの総和  $\Sigma_c, \Pi_c, \Lambda_c^\mu$  は、繰り込みによる修正の後に切断パラメーターを除いた極限で、有限に保たれることを証明できる。よって QED の予言も有限に保たれる。

有限個のパラメーター (質量、結合定数など) による予言が切断を除いても有限に保たれる場の理論は“繰り込み可能”と呼ばれる。繰り込み可能な理論では運動量の切断  $\Lambda \rightarrow \infty$  [例えば式 (9.9) で導入された切断パラメーター  $\Lambda$  は運動量の次元を持つ] の極限で結果が有限値に収束するため、実験におけるエネルギー (運動量) 尺度に比べて充分大きな有限の  $\Lambda$  を用いて得た理論予想は、 $\Lambda \rightarrow \infty$  の結果と有意な差を生じないことになる。

### 発散次数の議論

- $n$  個の結節点
- $f_i$  本 ( $b_i$  本) のフェルミオン内線 (光子内線)
- $f_e$  本 ( $b_e$  本) のフェルミオン外線 (光子外線)

を持つ基本発散グラフ  $G$  を考え、結節点における保存則によって固定されない内部運動量の数を  $d$  とおく。このグラフ  $G$  に関する Feynman 振幅の発散次数は、単純な次元の議論によれば

$$K = 4d - f_i - 2b_i \quad (9.109)$$

で与えられ [本稿次節で補足],  $G$  が基本発散グラフであるためには  $K \geq 0$  が必要である。ところで結節点に付随するデルタ関数は  $n$  個あり, そのうち 1 つは外線の 4 元運動量だけを引数に持つ (全体のエネルギー・運動量保存則を保証)。よって  $(f_i + b_i)$  個の内部運動量のうち独立な運動量の個数は

$$d = f_i + b_i - (n - 1) \quad (9.110)$$

と表される。また

$$2n = f_e + 2f_i, \quad n = b_e + 2b_i \quad (9.111)$$

の関係がある [本稿次節で補足]。よって基本発散グラフの必要条件は

$$K = 4 - \frac{3}{2}f_e - b_e \geq 0 \quad (9.112)$$

と書き直される [本稿次節で補足]。このように発散はグラフの外線の本数だけで決まり, 基本発散の可能性のあるグラフの外線本数は

$$(f_e, b_e) = (0, 2), (0, 3), (0, 4), (2, 0), (2, 1)$$

に限られる。[光子の自己エネルギーは  $(f_e, b_e) = (0, 2)$ , 電子の自己エネルギーは  $(f_e, b_e) = (2, 0)$ , 結節点補正のグラフは  $(f_e, b_e) = (2, 1)$  に該当する.]

## 9.9 について

■発散次数  $K$  の式 (9.109) について  $4d$  は  $d$  個の内部運動量  $p$  に関する積分  $\int (\prod d^4p)$  に対応する。分母にはフェルミオン伝播関数  $\frac{1}{p-m+i\varepsilon}$  に由来する運動量が  $f_i$  個, 光子伝播関数  $\frac{-g_{\alpha\beta}}{k^2+i\varepsilon}$  に由来する運動量が  $2b_i$  個現れるため, 式 (9.109):  $K = 4d - f_i - 2b_i$  が得られる。

つまり Feynman ダイアグラムに対応する運動量空間の積分が  $\int d^{\nu_1}p/p^{\nu_2}$  のように振舞うとき, 発散次数は  $K = \nu_1 - \nu_2$  で定義される。単純な次元の議論では  $K > 0$  に対して, 積分は  $p^K$  のように発散する恐れがある ( $K = 0$  の積分は対数発散)。

実際, 簡単のために  $\nu_1 = 1$  の場合を考えれば,  $K = 0, 1, 2, \dots$  の積分はそれぞれ

$$\int \frac{dp}{p}, \quad \int dp, \quad \int p dp, \quad \dots$$

となって, 対数発散, 1 次発散, 2 次発散, ……を起し得る。これが p.189 脚注 2) における「次元による議論」のことと考えられる。

■式 (9.111) について 第 14 章では QCD における同様の式 (14.78) の説明が成されている。これを基に QED の式 (9.111) を説明しよう。その際, 何らかの具体的なダイアグラムを参照するのが理解の助けになるはずである。例えば教科書 p.191 図 9.5 のダイアグラムはボゾン, フェルミオンともに外線と内線を有し, QED の Feynman 図の一般的な特徴を備えている点で理想的である。それを図 52 として本稿にも載せておく。さて, QED の各結節点は 2 本のフェルミオン線と 1 本のボゾン線に接続しているから,  $n$  個の結節点は  $2n$  本のフェルミオン線と接続している。そしていずれの結節点とも接続していないフェルミオン線は存在し

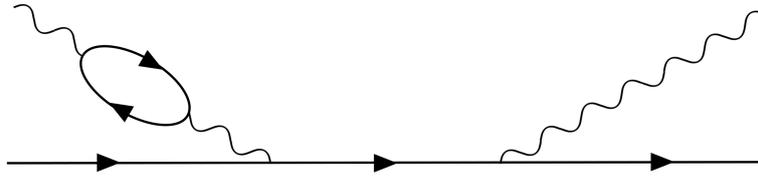


図 52 Compton を表す 4 次過程の 1 つ (教科書の図 9.5(p191))

ない. ただしここでは 2 つの結節点に共有されている  $f_i$  本の内線を重複してカウントしており, このように 1 本の内線を 2 本のフェルミオン線と数える場合には, グラフに含まれるフェルミオン線の総数は

$$2n = f_e + 2f_i$$

と表される. これが式 (9.111) の第 1 式である. 同様にグラフに含まれるボゾン線の総数は第 2 式で与えられる.

■式 (9.112) の確認

$$\begin{aligned} K &= 4d - f_i - 2b_i \quad (\because \text{式 (9.109)}) \\ &= 4\{f_i + b_i - (n - 1)\} - f_i - 2b_i \quad (\because \text{式 (9.110)}) \\ &= 3f_i + 2b_i - 4(n - 1) \\ &= 3\left(n - \frac{f_e}{2}\right) + (n - b_e) - 4(n - 1) \quad (\because \text{式 (9.111)}) \\ &= 4 - \frac{3}{2}f_e - b_e : (9.112). \end{aligned}$$

■「我々は  $(f_e, b_e) = (0, 3)$ ……図 9.6(p.191) において見ている」(p.229, l.21,22) について 図 9.6(p.191) の (c) と (d)(≡(e)) のダイアグラムからフェルミオンの外線を取り去って得られる三角グラフについて,  $(f_e, b_e) = (0, 3)$  である.

練習問題 (第 9 章)

9.2 Ward 恒等式の証明

9.5 節のノートで証明を行った.

## 第 10 章 正則化

前章では QED における輻射補正の計算が、発散するループ積分を生じることを見た。本章では単一ループの積分を、具体的に以下の 2 通りの正則化の手続きに基づいて評価する。ただし正則化の詳細に関する議論が必要となるのは第 15 章 (下巻) だけである。

- 切断法
  - 発散を、理論における短距離 (高エネルギー) の挙動に関係付けることができる。
  - 一般に適用が難しく、  
摂動の全次数にわたってゲージ不変性と Ward 恒等式を保証することが困難である。
- 次元正則化
  - 解釈は簡単ではないが、応用がやりやすい。
  - すべての摂動次数において自動的にゲージ不変性が保証され、Ward 恒等式が成り立つ。  
→ 量子色力学や Weinberg-Salam 理論のような非 Abel ゲージ理論において特に重要となる。

### 10.1 数学的な準備

#### 10.1.1 標準的な積分

ループ積分の評価において最も頻繁に遭遇する標準的な積分の式を、以下に列挙する。

$$\int \frac{d^4 k}{(k^2 - s + i\varepsilon)^n} = i\pi^2 (-1)^n \frac{\Gamma(n-2)}{\Gamma(n)} \frac{1}{s^{n-2}}, \quad n \geq 3 \quad (10.1)$$

$$\int d^4 k \frac{k^\mu}{(k^2 - s + i\varepsilon)^n} = 0, \quad n \geq 3 \quad (10.2)$$

$$\int d^4 k \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 - s + i\varepsilon)^n} = i\pi^2 (-1)^{n+1} \frac{\Gamma(n-3)}{2\Gamma(n)} \frac{g^{\mu\nu}}{s^{n-3}}, \quad n \geq 4 \quad (10.3)$$

$$\int \frac{d^4 p}{(p^2 + 2p \cdot q + t + i\varepsilon)^n} = i\pi^2 \frac{\Gamma(n-2)}{\Gamma(n)} \frac{1}{(t - q^2)^{n-2}}, \quad n \geq 3 \quad (10.4)$$

$$\int d^4 p \frac{p^\mu}{(p^2 + 2p \cdot q + t + i\varepsilon)^n} = -i\pi^2 \frac{\Gamma(n-2)}{\Gamma(n)} \frac{q^\mu}{(t - q^2)^{n-2}}, \quad n \geq 3 \quad (10.5)$$

$$\int d^4 p \frac{p^\mu p^\nu}{(p^2 + 2p \cdot q + t + i\varepsilon)^n} = i\pi^2 \frac{\Gamma(n-3)}{2\Gamma(n)} \frac{2(n-3)q^\mu q^\nu + (t - q^2)g^{\mu\nu}}{(t - q^2)^{n-2}}. \quad n \geq 4 \quad (10.6)$$

ここにガンマ関数  $\Gamma(n)$  は自然数  $n$  に対して  $\Gamma(n) = (n-1)!$  である。[ここでは  $(n-1)!$  と書く代わりに  $\Gamma(n)$  と書くことに積極的な意味はないけれど、ガンマ関数を用いて表記しておく、後に 10.3 節で導入される非整数次元の積分への一般化が見易くなる。] また右辺では  $\varepsilon = 0$  と置いてあり、これが許容されない場合には

$$s \rightarrow s - i\varepsilon, \quad t \rightarrow t + i\varepsilon$$

と戻せば良い。

### 10.1.1 について

標準的な積分の公式 (10.1)–(10.6) は実のところ、すべてが独立であるわけではなく、その導出方法は p.235 に簡単に述べられている。

式 (10.1) の  $n = 3$  の場合の式は、 $k^0$  に関する積分を複素閉路において実行し、それから  $\mathbf{k}$  に関する積分を繰り返すことによって導く。式 (10.2) は対称性から自明である。式 (10.4) と式 (10.5) は、それぞれ式 (10.1) と式 (10.2) において変数を  $k$  と  $s$  から、

$$p = k - q, \quad t = q^2 - s \quad (10.7)$$

へ変更することによって得られる。式 (10.5) を  $q_\nu$  について微分すると、式 (10.6) が導かれる。式 (10.6) において  $q = 0$  と置くと式 (10.3) になる。

ここでは以上の補足を行う。

■式 (10.1) の導出 まず p.235 の指示に従い、式 (10.1) を導出しよう。式 (10.1) の左辺は  $n = 3$  の場合、

$$\int d^3k \int dk^0 f(k^0, \mathbf{k}), \quad f(k^0, \mathbf{k}) \equiv \frac{1}{\{(k^0)^2 - \mathbf{k}^2 - s + i\varepsilon\}^3}$$

となる。 $f(k^0, \mathbf{k})$  は 3 位の極

$$k^0 = k^\pm \equiv \pm\sqrt{\mathbf{k}^2 + s - i\varepsilon} = \pm\sqrt{\mathbf{k}^2 + s} \mp i\varepsilon'$$

を持ち、

$$f(k^0, \mathbf{k}) = \frac{1}{(k^0 - k^-)^3 (k^0 - k^+)^3}$$

と表される。原点を中心として無限大の半径を持つ、複素  $k^0$  平面上の  $\text{Im}[k^0] > 0$  側の半円に沿う  $f(k^0, \mathbf{k})$  の複素積分はゼロになるため、

$$\int dk^0 f(k^0, \mathbf{k}) = 2\pi i \text{Res}[k^-]$$

である。ここで

$$\text{Res}[k^-] = \frac{1}{2!} \lim_{k^0 \rightarrow k^-} \left( \frac{d}{dk^0} \right)^2 \frac{1}{(k^0 - k^+)^3} = 6 \lim_{k^0 \rightarrow k^-} \frac{1}{(k^0 - k^+)^5} = -\frac{3}{16} \frac{1}{(\mathbf{k}^2 + s)^{5/2}}$$

なので (最後の等号では  $\varepsilon = 0$  と置いた)、

$$\begin{aligned} \int d^3k \int dk^0 f(k^0, \mathbf{k}) &= 2\pi i \frac{-3}{16} \int_0^\infty \frac{1}{(|\mathbf{k}|^2 + s)^{5/2}} \times 4\pi |\mathbf{k}|^2 d|\mathbf{k}| \\ &= -\frac{3}{2} \pi^2 i \frac{1}{s} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta \cos \theta d\theta \quad (|\mathbf{k}| = \sqrt{s} \tan \theta) \\ &= -\frac{3}{2} \pi^2 i \frac{1}{s} \int_0^1 \sin^2 \theta d(\sin \theta) \\ &= -\frac{\pi^2 i}{2} \frac{1}{s} \end{aligned}$$

となる。これは式 (10.1) 右辺において  $n = 3$  と置いたものと一致しているから、 $n = 3$  のとき式 (10.1) が成り立つ。

そこで任意の自然数  $n \geq 3$  に対して式 (10.1):

$$\int \frac{d^4 k}{(k^2 - s + i\varepsilon)^n} = i\pi^2 (-1)^n \frac{(n-3)!}{(n-1)!} \frac{1}{s^{n-2}}$$

が成り立つと仮定する. 両辺を  $s$  で微分すると,

$$\text{左辺は } n \int \frac{d^4 k}{(k^2 - s + i\varepsilon)^{n+1}}, \quad \text{右辺は } i\pi^2 (-1)^n \frac{(n-3)!}{(n-1)!} \frac{-(n-2)}{s^{n-1}}$$

となり, これらを等置して

$$\int \frac{d^4 k}{(k^2 - s + i\varepsilon)^{n+1}} = i\pi^2 (-1)^{n+1} \frac{(n-2)!}{n!} \frac{1}{s^{n-1}}$$

を得る. これは式 (10.1) において  $n$  を  $n+1$  に置き換えた式となっているから, 式 (10.1) は任意の自然数  $n \geq 3$  に対して成り立つ.

■式 (10.5) の導出 次に式 (10.5) の導出を補足する. 式 (10.2) において式 (10.7):

$$p = k - q, \quad t = q^2 - s$$

の置き換えを行うと,  $n \geq 3$  に対して

$$\int d^4 p \frac{p^\mu + q^\mu}{(p^2 + 2p \cdot q + t + i\varepsilon)^n} = 0, \quad \therefore \int d^4 p \frac{p^\mu}{(p^2 + 2p \cdot q + t + i\varepsilon)^n} = -q^\mu \int \frac{d^4 p}{(p^2 + 2p \cdot q + t + i\varepsilon)^n}$$

を得る. ここで右辺の積分が式 (10.4) で与えられることに注意すると, 式 (10.5) が導かれる.

■式 (10.6) の導出 最後に式 (10.6) の導出を補足する. 式 (10.5) の両辺を  $q^\nu$  で微分すると, 左辺は

$$-2n \int d^4 p \frac{p^\mu p^\nu}{(p^2 + 2p \cdot q + t + i\varepsilon)^n}$$

となる. 一方

$$\frac{\partial q^\mu}{\partial q_\nu} = \frac{\partial}{\partial q_\nu} (g^{\mu\lambda} q_\lambda) = g^{\mu\lambda} \delta^\nu_\lambda = g^{\mu\nu}$$

に注意すると, 右辺は

$$-i\pi^2 \frac{(n-3)!}{(n-1)!} \frac{2(n-2)q^\mu q^\nu + (t - q^2)g^{\mu\nu}}{(t - q^2)^{n-1}}$$

となる. これらを等置して

$$\int d^4 p \frac{p^\mu p^\nu}{(p^2 + 2p \cdot q + t + i\varepsilon)^n} = i\pi^2 \frac{(n-3)!}{2n!} \frac{2(n-2)q^\mu q^\nu + (t - q^2)g^{\mu\nu}}{(t - q^2)^{n-1}}, \quad n \geq 3$$

を得る.  $n \rightarrow n-1$  と置き換えて表記すれば, これは式 (10.6) に他ならない.

### 10.1.2 Feynman のパラメーター積分

通常, 扱う必要の生じる積分は, 被積分関数の分母がいくつかの 2 次因子の積を含む. 前節の積分公式を用いるには, これを被積分関数の分母が単一の 2 次因子の  $n$  乗の形となるように直さなければならない. そのために 2 次因子  $a_0, a_1, \dots$  に対して恒等式

$$\frac{1}{a_0 a_1 a_2 \cdots a_n} = \Gamma(n-1) \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \cdots \int_0^{z_{n-1}} dz_n \frac{1}{[a_0 + (a_1 - a_0)z_1 + \cdots + (a_n - a_{n-1})z_n]^{n+1}} \quad (10.12)$$

が有用となる．右辺は単一の 2 次因子  $a_0 + (a_1 - a_0)z_1 + \cdots + (a_n - a_{n-1})z_n$  の  $(n+1)$  乗を分母とする積分となっており，これは Feynman のパラメーター積分と呼ばれる．

特に  $n = 1$  の式を書くと

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dz}{[b + (a-b)z]^2}. \quad (10.10)$$

また，例えばこれを  $a$  で微分すると，

$$\frac{1}{a^2b} = 2 \int_0^1 dz \frac{z}{[b + (a-b)z]^3} \quad (10.13)$$

となることも有用である．次に (一般に相異なる) 3 つの因子に対する式を具体的に書く．

$$\frac{1}{abc} = 2 \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{1}{[a + (b-a)x + (c-b)y]^3} \quad (10.11a)$$

$$= 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dz \frac{1}{[a + (b-a)x + (c-a)z]^3}. \quad (10.11b)$$

[式 (10.11a) は一般式 (10.12) から直接的に理解でき，また] いずれの式も  $y, z$  に関して積分を行い，上式 (10.10) を利用すると証明される．最後に，修正された光子伝播関数 (219) が

$$\frac{1}{k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon} - \frac{1}{k^2 - \Lambda^2 + i\varepsilon} = - \int_{\lambda^2}^{\Lambda^2} \frac{dt}{(k^2 - t + i\varepsilon)^2} \quad (10.14)$$

と書けることを指摘しておく．

### 10.1.2 について

一般公式 (10.12) を数学的帰納法にて証明する． $n = 1$  の場合にこれが成り立つことは，式 (10.8)–(10.10):

$$\frac{1}{ab} = \frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{dt}{t^2} = \int_0^1 \frac{dz}{[b + (a-b)z]^2} \quad (t = b + (a-b)z)$$

において確認済みである．そこである自然数  $n$  に対して式 (10.12) が成り立つと仮定する．

$$A(z_1, \dots, z_n) \equiv a_0 + (a_1 - a_0)z_1 + \cdots + (a_n - a_{n-1})z_n, \quad B \equiv a_{n+1} - a_n$$

と略記すると，式 (10.12) 右辺において  $n \rightarrow n+1$  と置き換えた式は

$$(n+1)\Gamma(n-1) \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \cdots \int_0^{z_{n-1}} dz_n \int_0^{z_n} \frac{dz_{n+1}}{(A + Bz_{n+1})^{n+2}}$$

であり ( $\Gamma(n+2) = (n+1)\Gamma(n-1)$ )，新たに現れた変数  $z_{n+1}$  に関する積分は

$$\int_0^{z_n} \frac{dz_{n+1}}{(A + Bz_{n+1})^{n+2}} = - \frac{1}{(n+1)B} \left[ \frac{1}{(A + Bz_{n+1})^{n+1}} \right]_0^{z_n} = \frac{1}{(n+1)B} \left\{ \frac{1}{A^{n+1}} - \frac{1}{(A + Bz_n)^{n+1}} \right\}$$

と実行できる．ここで最右辺の  $A + Bz_n$  は，多項式  $A$  において  $a_n$  を  $a_{n+1}$  に置き換えたものになっていることに注意して数学的帰納法の仮定を用いると，上の積分は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{B}\Gamma(n+1) \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \cdots \int_0^{z_{n-1}} dz_n \left\{ \frac{1}{A^{n+1}} - \frac{1}{(A + Bz_n)^{n+1}} \right\} \\ &= \frac{1}{B} \left( \frac{1}{a_0 \cdots a_{n-1} a_n} - \frac{1}{a_0 \cdots a_{n-1} a_{n+1}} \right) \\ &= \frac{1}{a_0 \cdots a_{n-1} a_n a_{n+1}} \end{aligned}$$

となる．よって式 (10.12) において  $n \rightarrow n+1$  と置き換えた式が成り立つから，示された．

■式 (10.14) が「公式 (10.8) と同じ関係である」(10.1.2 節末尾) ことについて

$$\frac{1}{k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon} - \frac{1}{k^2 - \Lambda^2 + i\varepsilon} = \frac{\lambda^2 - \Lambda^2}{(k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon)(k^2 - \Lambda^2 + i\varepsilon)}$$

は,  $a = k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon, b = k^2 - \Lambda^2 + i\varepsilon$  とおいて公式 (10.8) を適用すると,

$$\int_{k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon}^{k^2 - \Lambda^2 + i\varepsilon} \frac{dt}{t^2} = - \int_{\lambda^2}^{\Lambda^2} \frac{dt'}{(k^2 - t' + i\varepsilon)^2}$$

と書き換えられる ( $t' = k^2 - t + i\varepsilon$ ).

## 10.2 切断法による正則化：電子質量のずれ

9.3 節において 2 次の摂動論により電子の自己エネルギーを考察した際, 切断パラメーター  $\Lambda \rightarrow \infty$  の極限では物理的な質量と裸の質量を関係付ける量  $\delta m = -e_0^2 A = -e_0^2 \Sigma(p)|_{\not{p}=m}$  が発散することを述べた. 実際, 置き換え (219):

$$\frac{1}{k^2 + i\varepsilon} \rightarrow \frac{1}{k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon} - \frac{1}{k^2 - \Lambda^2 + i\varepsilon}$$

により正則化を行った場合, 質量のずれ  $\delta m = -e_0^2 \Sigma(p)|_{\not{p}=m}$  は具体的には  $\Sigma(p)$  の式 (9.4) を用いて

$$\delta m = \frac{-ie_0^2}{(2\pi)^4} \int d^4 k \frac{\gamma^\alpha (\not{p} - \not{k} + m) \gamma_\alpha}{(p-k)^2 - m^2 + i\varepsilon} \left( \frac{1}{k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon} - \frac{1}{k^2 - \Lambda^2 + i\varepsilon} \right)$$

と表される. 10.1 節の恒等式と積分公式を用いてこれを評価すると,  $\Lambda \rightarrow \infty$  (および  $\lambda \rightarrow 0$ ) のとき

$$\delta m = \frac{3m\alpha_0}{2\pi} \ln \frac{\Lambda}{m} + O(1) \quad (10.19)$$

となり ( $\alpha_0 \equiv e_0^2/4\pi$ ),  $\Lambda$  に対して対数的に発散することを確認される.

### 10.2 節, 式の導出など

■式 (10.19) の導出

$$\delta m = i\bar{u}(\mathbf{p}) \left\{ \frac{-e_0^2}{(2\pi)^4} \int d^4 k \frac{\gamma^\alpha (\not{p} - \not{k} + m) \gamma_\alpha}{(p-k)^2 - m^2 + i\varepsilon} \left[ \frac{1}{k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon} - \frac{1}{k^2 - \Lambda^2 + i\varepsilon} \right] \right\} u(\mathbf{p}) \quad (10.15)$$

( $\because \delta m = -e_0^2 A = -e_0^2 \Sigma(p)|_{\not{p}=m}$ ,  $\Sigma(p)$  の表式 (9.1 節), 置き換え (219))

$$= \frac{ie_0^2}{(2\pi)^4} \bar{u}(\mathbf{p}) \left[ \int d^4 k \frac{2(\not{k} + m)}{k^2 - 2p \cdot k + i\varepsilon} \int_{\lambda^2}^{\Lambda^2} \frac{dt}{(k^2 - t + i\varepsilon)^2} \right] u(\mathbf{p}) \quad (10.16)$$

( $\because$  縮約の公式 (A.14b),  $\not{p}u(\mathbf{p}) = mu(\mathbf{p})$ ,  $p^2 = m^2$ , 式 (10.14))

$$= \frac{ie_0^2}{(2\pi)^4} \bar{u}(\mathbf{p}) \left[ \int_{\lambda^2}^{\Lambda^2} dt \int_0^1 dz \int d^4 k \frac{4(\not{k} + m)z}{[k^2 - 2(p \cdot k)(1-z) - tz + i\varepsilon]^3} \right] u(\mathbf{p}) \quad (10.17)$$

( $\because$  式 (10.13))

$$= \frac{me_0^2}{8\pi^2} \int_0^1 dz \int_{\lambda^2}^{\Lambda^2} dt \frac{2z - z^2}{tz + m^2(1-z)^2} \quad (\because \text{式 (10.4), (10.5)})$$

$$= \frac{m\alpha_0}{2\pi} \int_0^1 dz (2-z) \ln \frac{\Lambda^2 z + m^2(1-z)^2}{\lambda^2 z + m^2(1-z)^2} \quad (10.18)$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow \frac{m\alpha_0}{2\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} \int_0^1 dz(2-z) + O(1) \\ &\quad (\text{赤外極限 } \lambda \rightarrow 0 \text{ で発散が起きないため } \lambda = 0 \text{ と置き, } \Lambda \rightarrow \infty \text{ で対数的に発散する主要項を取り出した}) \\ &= \frac{3m\alpha_0}{2\pi} \ln \frac{\Lambda}{m} + O(1) : (10.19). \end{aligned}$$

[本稿次節の補足を併せて参照.]

## 10.2 について

■式 (10.15) について  $\Sigma(p)$  の式 (9.4) を用いると

$$\delta m = -e_0^2 \Sigma(p) \Big|_{\not{p}=m} = \frac{-ie_0^2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k}{k^2 + i\varepsilon} \frac{\gamma^\alpha (\not{p} - \not{k} + m) \gamma_\alpha}{(p-k)^2 - m^2 + i\varepsilon}$$

が得られる. ここで  $\Sigma(p)$  の式の分母において裸の質量  $m_0$  の代わりに物理的な質量  $m$  を用いているのは, 9.8 節 p.225 で宣言されているように, 最初に  $m_0$  を  $m$  に置き換え質量相殺項を相互作用ハミルトニアンに含めるアプローチを採用しているからであると考えられる. また上式最右辺では  $\not{p} = m$  を代入する操作を明記していないけれど, すぐ後で「 $\not{p}u(\mathbf{p}) = mu(\mathbf{p}), p^2 = m^2$  と置く」(p.237, 1.3) 際に  $\not{p} = m$  の関係を用いることになる. 次に光子伝播関数に由来する  $1/(k^2 + i\varepsilon)$  に正則化 (9.21) を施すことにする. さらに後の計算を容易にするためのテクニックとして, 両辺に左から  $\bar{u}_r(\mathbf{p})$  を, 右から  $u_r(\mathbf{p})$  を掛け,  $\bar{u}_r(\mathbf{p})u_r(\mathbf{p}) = 1$ :(A.28) を用いると式 (10.15) を得る.

■式 (10.16) について 公式 (A.14b) により

$$\gamma^\alpha (\not{p} - \not{k} + m) \gamma_\alpha = -2\not{p} + 2\not{k} + 4m$$

である. 次いで  $\not{p}u(\mathbf{p}) = mu(\mathbf{p})$  を用いると

$$\bar{u}(\mathbf{p}) \gamma^\alpha (\not{p} - \not{k} + m) \gamma_\alpha u(\mathbf{p}) = 2\bar{u}(\mathbf{p})(\not{k} + m)u(\mathbf{p})$$

を得る.

■式 (10.17) について  $a = k^2 - t + i\varepsilon, b = k^2 - 2p \cdot k + i\varepsilon$  として恒等式 (10.13) を用いれば良い.

■式 (10.18) について 積分公式 (10.4),(10.5) において

$$p \rightarrow k, \quad q \rightarrow -p(1-z), \quad t \rightarrow -tz$$

と置き換え,  $n = 3$  を代入すると

$$\int \frac{d^4 k}{[k^2 - 2p \cdot k(1-z) - tz + i\varepsilon]^3} = -\frac{1}{2} i\pi^2 \frac{1}{tz + (1-z)^2 m^2}, \quad (257)$$

$$\int d^4 k \frac{k^\mu}{[k^2 - 2p \cdot k(1-z) - tz + i\varepsilon]^3} = -\frac{1}{2} i\pi^2 \frac{(1-z)p^\mu}{tz + (1-z)^2 m^2}, \quad (258)$$

を得る。よって式 (10.17) において

$$\begin{aligned}\bar{u}(\mathbf{p}) \left[ \int d^4k \frac{4(\not{k} + m)z}{[k^2 - 2p \cdot k(1-z) - tz + i\varepsilon]^3} \right] u(\mathbf{p}) &= 4z\bar{u}(\mathbf{p})[\gamma_\mu(\text{式 (258)}) + m(\text{式 (257)})]u(\mathbf{p}) \\ &= -2i\pi^2 z \frac{\bar{u}(\mathbf{p})[(1-z)\not{p} + m]u(\mathbf{p})}{tz + m^2(1-z)^2} \\ &= -2i\pi^2 z \frac{(2-z)m\bar{u}(\mathbf{p})u(\mathbf{p})}{tz + m^2(1-z)^2}\end{aligned}$$

となるので式 (10.18) の 1 行目を得る。(次いで  $t$  に関する積分を実行して 2 行目の式が得られることは言うまでもない。)

■式 (10.19) について

$$\begin{aligned}\ln \frac{\Lambda^2 z + m^2(1-z)^2}{m^2(1-z)^2} &= \ln \left\{ \frac{\Lambda^2}{m^2} \frac{z}{(1-z)^2} \left( 1 + \frac{m^2(1-z)^2}{\Lambda^2 z} \right) \right\} \\ &= \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + \ln \frac{z}{(1-z)^2} + \ln \left( 1 + \frac{m^2(1-z)^2}{\Lambda^2 z} \right)\end{aligned}$$

の最右辺第 2 項は  $O(1)$  であり, 第 3 項は微小量  $\frac{m^2(1-z)^2}{\Lambda^2 z}$  による展開を考えれば  $O(m^2/\Lambda^2)$  である。

## 10.3 次元正則化

### 10.3.1 次元正則化の導入

次元正則化は発散するループ積分の次元数を修正することによって積分を有限にする方法である。ここでは例として式 (10.1):

$$\int \frac{d^4k}{(k^2 - s + i\varepsilon)^n} = i\pi^2(-1)^n \frac{\Gamma(n-2)}{\Gamma(n)} \frac{1}{s^{n-2}}$$

を取り上げる。これは  $n \geq 3$  に対して成り立つ式であって,  $n = 2$  の場合を考えると左辺の積分は対数的に発散する (右辺は  $\Gamma(0)$  が特異となる)。ここでこの関係式は,  $D$  次元空間 [ $D$  は時間も含めた次元] における式

$$\int \frac{d^Dk}{(k^2 - s + i\varepsilon)^n} = i\pi^{D/2}(-1)^n \frac{\Gamma(n-D/2)}{\Gamma(n)} \frac{1}{s^{n-D/2}}, \quad n > D/2 \quad (10.23)$$

へと一般化されることに着眼する\*46。今  $D$  を非整数値とすることを考えると, [左辺の積分の意味は明瞭でなくなるけれど] 右辺はよく定義された量となるため, 右辺を用いて左辺の積分を定義できる。そこで  $n = 2$  に対して  $D = 4$  のときに現れる積分の発散を避けるために, 微小な正のパラメーター  $\eta$  を用いて次元を  $D = 4 - \eta$  に修正する (次元正則化)。[修正された次元  $D = 4 - \eta$  は上式の条件  $n = 2 > D/2$  を満たす。]

実際に上で取り上げた積分

$$\Pi(s) \equiv \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - s + i\varepsilon)^2}$$

\*46 証明は行わない。(式 (10.4) を  $D$  次元に一般化した公式の導出は, 文献 [13, p.66](のノート) で行った。)  $D$  次元ベクトル  $k^\mu$  の“自乗”は,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = (dx^0)^2 - \sum_{i=1}^{D-1} (dx^i)^2$$

となる計量テンソル  $g_{\mu\nu}$  を用いて  $k^2 = g_{\mu\nu} k^\mu k^\nu$  と定義されている。

に対して、この次元正則化の手法を適用してみよう：

$$\Pi(s) = \int \frac{d^{4-\eta}k}{(2\pi)^{4-\eta}} \frac{1}{(k^2 - s + i\varepsilon)^2} = \frac{i}{16\pi^2} \frac{1}{(4\pi)^{-\eta/2}} \frac{\Gamma(\eta/2)}{\Gamma(2)} s^{-\eta/2}.$$

この式の物理量の次元は [(質量)<sup>-η</sup> であり、] η に、したがって空間の次元に依存している。そこで質量尺度 μ を導入して、 $\Pi(s) = \mu^{-\eta} \Pi_\eta(s)$  によって η に依らない次元を持つ

$$\Pi_\eta(s) = \frac{i}{16\pi^2} \frac{1}{(4\pi)^{-\eta/2}} \frac{\Gamma(\eta/2)}{\Gamma(2)} \left(\frac{s}{\mu^2}\right)^{-\eta/2} \quad (10.27b)$$

を定義すると、これは η → 0 の下で

$$\Pi_\eta(s) = \frac{i}{16\pi^2} \left[ \frac{2}{\eta} - \gamma + \ln(4\pi) \right] - \frac{i}{16\pi^2} \ln\left(\frac{s}{\mu^2}\right) \quad (10.30a)$$

となる (γ = 0.5772... は Euler 定数) [本稿次節で補足]。[ここで s は質量の自乗に対応するパラメーターであり、裸の値 s<sub>0</sub> に対する繰り込みにより物理的な値 s になる。] 差  $\Pi(s) - \Pi(s_0)$  に興味を持たれ、η → 0 の極限でこの差は

$$-\frac{i}{16\pi^2} \ln(s/s_0)$$

に収束する (μ<sup>-η</sup> → 1)。この結果は質量尺度 μ に依らず、[本稿で確認するように] 切断法から導いた結果と一致している。

### 10.3.1 について

#### ■切断法から導いた結果 (10.26) について

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \{\Pi_\Lambda(s) - \Pi_\Lambda(s_0)\} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{1}{(k^2 - s + i\varepsilon)^2} - \frac{1}{(k^2 - s_0 + i\varepsilon)^2} \right\}$$

の右辺における {...} 内を

$$\frac{1}{2} \int_{s_0}^s \frac{dt}{(k^2 - t + i\varepsilon)^3} = \left[ \frac{1}{(k^2 - t + i\varepsilon)^2} \right]_{s_0}^s$$

と書き換えると、

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \{\Pi_\Lambda(s) - \Pi_\Lambda(s_0)\} = \frac{1}{2(2\pi)^4} \int_{s_0}^s dt \int d^4k \frac{1}{(k^2 - t + i\varepsilon)^3}$$

となる。k に関する積分は公式 (10.1) を用いて実行することができ、

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \{\Pi_\Lambda(s) - \Pi_\Lambda(s_0)\} = \frac{1}{2(2\pi)^4} \frac{-i\pi^2}{2} \int_{s_0}^s dt \frac{1}{t} = -\frac{i}{16\pi^2} \ln(s/s_0) : (10.26)$$

を得る。このように切断因子  $(-\Lambda^2)/(k^2 - \Lambda^2)$  を除いても、差  $\Pi(s) - \Pi(s_0)$  は有限に留まる。

#### ■小さな引数に対するガンマ関数の近似式 (10.29) について η → 0 に対する公式 (10.29):

$$\Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right) = \frac{2}{\eta} - \gamma + \dots$$

の起源を簡単にまとめておく [17, pp.137–139]。複素 x 平面全体で定義された解析関数としてのガンマ関数 Γ(x) は、Weierstrass の無限乗積

$$\frac{1}{\Gamma(x+1)} = e^{\gamma x} \prod_{p=1}^{\infty} \left[ \left(1 + \frac{x}{p}\right) e^{-x/p} \right]$$

で表される。ここに

$$\gamma \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \right) = 0.5772156649 \cdots$$

は Euler 定数である。ここから小さな  $x$  に対する  $\Gamma(x)$  の近似式を見出すには、

$$\ln \Gamma(x+1) = -\gamma x + \sum_{p=1}^{\infty} \left( \frac{x}{p} - \ln \left( 1 + \frac{x}{p} \right) \right) = -\gamma x + O(x^2),$$

$$\therefore \Gamma(x+1) = e^{-\gamma x + O(x^2)} = 1 - \gamma x + O(x^2),$$

$$\therefore \Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} = \frac{1}{x} - \gamma + O(x)$$

とすれば良い。最後の式に  $x = \eta/2$  を代入すると、式 (10.29) が得られる。

■次元正則化から導いた結果 (10.30a) について 式 (10.27b) において

$$\begin{aligned} \frac{1}{(4\pi)^{-\eta/2}} \frac{\Gamma(\eta/2)}{\Gamma(2)} \left( \frac{s}{\mu^2} \right)^{-\eta/2} &= \left[ 1 + \frac{\eta}{2} \ln(4\pi) + O(\eta^2) \right] \left[ \frac{2}{\eta} - \gamma + O(\eta) \right] \left[ 1 - \frac{\eta}{2} \ln \left( \frac{s}{\mu^2} \right) + O(\eta^2) \right] \\ &= \left[ \frac{2}{\eta} - \gamma + \ln(4\pi) \right] - \ln \left( \frac{s}{\mu^2} \right) + O(\eta^2) \end{aligned}$$

である。

■質量尺度  $\mu$  の導入について  $\Pi_\eta(s)$  の式 (10.27b) における展開

$$\left( \frac{s}{\mu^2} \right)^{-\eta/2} = 1 - \frac{\eta}{2} \ln \left( \frac{s}{\mu^2} \right) + \cdots$$

から  $\mu$  を取り除いてしまうと、真数  $s/\mu^2$  が  $s$  に置き換わって質量の 2 乗の次元を持つことになり、その対数を定義できなくなる。(便宜的に次元を持つ量  $A$  の対数を考える場合にも、 $\ln A - \ln A_0 = \ln(A/A_0)$  の関係によりいつでも真数を無次元化できることが前提である。)

### 10.3.2 次元正則化に用いる一般的な技法

10.1.1 節と同様の方法で、 $D$  次元空間における式 (10.23):

$$\int \frac{d^D k}{(k^2 - s + i\varepsilon)^n} = i\pi^{D/2} (-1)^n \frac{\Gamma(n - D/2)}{\Gamma(n)} \frac{1}{s^{n-D/2}}, \quad n > D/2$$

から以下の積分公式が得られる。

$$\int d^D k \frac{k^\mu}{(k^2 - s + i\varepsilon)^n} = 0, \quad (10.32)$$

$$\int d^D k \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 - s + i\varepsilon)^n} = i\pi^{D/2} (-1)^{n+1} \frac{\Gamma(n - (D/2) - 1)}{2\Gamma(n)} \frac{g^{\mu\nu}}{s^{n-(D/2)-1}}, \quad (10.33)$$

$$\int d^D k \frac{k^2}{(k^2 - s + i\varepsilon)^n} = i\pi^{D/2} (-1)^{n+1} \frac{\Gamma(n - (D/2) - 1)}{2\Gamma(n)} \frac{D}{s^{n-(D/2)-1}}. \quad (10.34)$$

[式 (10.32) は奇関数の積分なので、式 (10.23) と無関係にゼロになる。式 (10.33) は式 (10.3) の一般化にあたる。式 (10.34) は式 (10.33) の両辺に  $g_{\mu\nu}$  を掛け、添字  $\mu, \nu$  について和をとって得られる。]

また  $D$  次元空間において

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} I$$

( $\{\ , \}$  は反交換子) を満たす  $\gamma$  行列  $\gamma^0, \gamma^1, \dots, \gamma^{D-1}$  を導入する. ただし  $\gamma$  行列は次元に応じたサイズ  $f(D) \times f(D)$  を持ち,  $I$  は  $f(D) \times f(D)$  の単位行列とする. このとき  $\gamma$  行列の反交換関係から, 縮約に関する公式

$$\gamma_\lambda \gamma^\lambda = DI, \quad \gamma_\lambda \gamma^\alpha \gamma^\lambda = -(D-2)\gamma^\alpha, \quad \gamma_\lambda \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\lambda = (D-4)\gamma^\alpha \gamma^\beta + 4g^{\alpha\beta} I \quad (10.37)$$

および対角和に関する公式

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta) &= f(D) g^{\alpha\beta}, \\ \text{Tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\delta) &= f(D) [g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} - g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} + g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma}], \\ \text{Tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta \dots \gamma^\mu \gamma^\nu) &= 0 \quad (\text{奇数個の } \gamma \text{ 行列の積に対して}) \end{aligned} \quad (10.38)$$

が得られる.

整数次元  $D$  における以上の公式を非整数次元  $D = 4 - \eta$  の場合にも用いることにする. その際, 計量テンソル (積分公式の右辺に現れる) と  $\gamma$  行列の意味は明らかでなくなるが, これらは  $\eta \rightarrow 0$  すなわち  $D \rightarrow 4$  の極限で定義されていれば充分である. そしてこの点を除けば, 非整数次元においても積分公式の右辺はよく定義されている. そこで非整数次元では, 右辺によって左辺の積分が定義されると考える.

## 10.4 真空偏極

9.6.1 節において異常磁気能率を調べた際に言及したように, 真空偏極ダイアグラムの寄与に関する式 (9.68):

$$e^2 \Pi_c(k^2) = -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dz z(1-z) \ln \left[ 1 - \frac{k^2 z(1-z)}{m^2} \right]$$

を本節で導く. [これは式 (9.69) より  $O(q^2/m^2)$  なので, 異常磁気能率の計算の際に考慮した結節点補正の寄与 (9.70) に比べて小さい.]

式 (9.8):

$$ie_0^2 \Pi^{\mu\nu}(k) = \frac{-e_0^2}{(2\pi)^4} \int d^4 p \frac{\text{Tr}[\gamma^\mu (\not{p} + \not{k} + m_0) \gamma^\nu (\not{p} + m_0)]}{[(p+k)^2 - m_0^2 + i\varepsilon][p^2 - m_0^2 + i\varepsilon]}$$

を次元正則化すると

$$ie_0^2 \Pi^{\mu\nu}(k) = \frac{-\tilde{e}_0^2 \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \int d^D p \frac{\text{Tr}[\gamma^\mu (\not{p} + \not{k} + m) \gamma^\nu (\not{p} + m)]}{[(p+k)^2 - m^2 + i\varepsilon][p^2 - m^2 + i\varepsilon]}, \quad \tilde{e}_0^2 \equiv \mu^{-\eta} e_0^2 \quad (10.39)$$

となる. [置き換え  $m_0 \rightarrow m$  および質量尺度  $\mu$  については本稿で補足する.]

- Feynman のパラメーター積分 (恒等式 (10.10))
- $D$  次元空間における  $\gamma$  行列の公式 (10.38)
- $D$  次元空間における積分公式 (10.23), (10.32-34)

を用いてこれを評価すると,

$$e_0^2 \Pi^{\mu\nu}(k) = (k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu}) \tilde{e}_0^2 \Pi(k^2), \quad (10.48)$$

$$\Pi(k^2) = \frac{1}{12\pi^2} \left\{ \frac{2}{\eta} - \gamma - \frac{f'(4)}{2} + \ln(4\pi) \right\} - \frac{1}{2\pi^2} \int_0^1 dz z(1-z) \ln \left\{ \frac{m^2 - k^2 z(1-z)}{\mu^2} \right\} + O(\eta) \quad (10.52a)$$

を得る ( $\gamma = 0.5772\dots$  は Euler 定数) [導出は下記]. 式 (9.11), 式 (9.15):

$$e_0^2 \Pi^{\mu\nu}(k) = e_0^2 [-k^2 g^{\mu\nu} \{A'(0) + \Pi_c(k^2)\} + k^\mu k^\nu B]$$

と比較すると,

$$e_0^2 \{A'(0) + \Pi_c(k^2)\} = \tilde{e}_0^2 \Pi(k^2)$$

と同定される.  $\Pi_c(0) = 0$  より  $e_0^2 A'(0) = \tilde{e}_0^2 \Pi(0)$  なので

$$e_0^2 \Pi_c(k^2) = \tilde{e}_0^2 \{\Pi(k^2) - \Pi(0)\}$$

と書き換えられ,  $\eta \rightarrow 0$  の極限で

$$e_0^2 \Pi_c(k^2) = e_0^2 \{\Pi(k^2) - \Pi(0)\} = -\frac{2\alpha_0}{\pi} \int_0^1 dz z(1-z) \ln \left[ 1 - \frac{k^2 z(1-z)}{m^2} \right]$$

となる ( $\alpha_0 \equiv e_0^2/4\pi$ ). この結果は質量尺度  $\mu$  に依らず, 最低次では  $e_0 = e$  なので冒頭に引用した目標の式 (9.68) に帰す. また  $\Pi_c(k^2)$  の式を含め, 一般に観測可能量の予言は  $f'(4)$  の値には依存しないので,  $f'(4) = 0$  と置くのが慣例となっている.

#### 10.4 節, 式の導出など

■式 (10.52a) の導出 式 (10.39) の被積分関数の分子は, 対角和の公式 (10.38) より

$$\begin{aligned} N^{\mu\nu}(p, k) &\equiv \text{Tr}[\gamma^\mu (\not{p} + \not{k} + m) \gamma^\nu (\not{p} + m)] \\ &= f(D) [(p^\mu + k^\mu) p^\nu + (p^\nu + k^\nu) p^\mu + \{m^2 - p \cdot (p + k)\} g^{\mu\nu}] \end{aligned} \quad (10.41)$$

となる [本稿次節で補足]. すると式 (10.39) 全体は

$$ie_0^2 \Pi^{\mu\nu}(k) = \frac{-\tilde{e}_0^2 \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \int_0^1 dz \int d^D p \frac{N^{\mu\nu}(p, k)}{[p^2 - m^2 + (k^2 + 2p \cdot k)z + i\varepsilon]^2} \quad (10.42)$$

(Feynman のパラメータ積分と式 (10.10) を利用)

$$= \frac{-\tilde{e}_0^2 \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \int_0^1 dz \int d^D q \frac{N^{\mu\nu}(q - kz, k)}{[q^2 + k^2 z(1-z) - m^2 + i\varepsilon]^2} \quad (q^\mu = p^\mu + zk^\mu) \quad (10.44)$$

$$\begin{aligned} N^{\mu\nu}(q - kz, k) &= f(D) ([2q^\mu q^\nu - q^2 g^{\mu\nu}] + [m^2 - k^2 z(1-z)] g^{\mu\nu} \\ &\quad + [-2z(1-z)(k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu})] + \dots) \end{aligned} \quad (10.45)$$

と書き換えられる [上式 (10.45) について本稿次節で補足]. 上式 (10.45) における  $q$  の 1 次の項「 $\dots$ 」は, 式 (10.32) により積分に寄与を持たない. 式 (10.45) における 3 つの項「 $\dots$ 」からの寄与を分けて

$$ie_0^2 \Pi^{\mu\nu}(k) = \frac{-\tilde{e}_0^2 \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} f(D) \int_0^1 dz \sum_{i=1}^3 I_i^{\mu\nu}(k, z)$$

と書くと, 各  $I_i^{\mu\nu}(k, z)$  の部分は式 (10.23), (10.32)–(10.34) を用いて

$$\begin{aligned}
I_1^{\mu\nu}(k, z) &\equiv \int d^D q \frac{[2q^\mu q^\nu - q^2 g^{\mu\nu}]}{[q^2 + k^2 z(1-z) - m^2 + i\varepsilon]^2} \\
&= \frac{-ig^{\mu\nu} \pi^{D/2} \Gamma(1 - D/2)}{[m^2 - k^2 z(1-z)]^{1-D/2}} (1 - D/2), \\
I_2^{\mu\nu}(k, z) &\equiv [m^2 - k^2 z(1-z)] g^{\mu\nu} \int d^D q \frac{1}{[q^2 + k^2 z(1-z) - m^2 + i\varepsilon]^2} \\
&= [m^2 - k^2 z(1-z)] g^{\mu\nu} \frac{i\pi^{D/2} \Gamma(2 - D/2)}{[m^2 - k^2 z(1-z)]^{2-D/2}} \\
&= -I_1^{\mu\nu}(k, z), \\
I_3^{\mu\nu}(k, z) &\equiv [-2z(1-z)(k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu})] \int d^D q \frac{1}{[q^2 + k^2 z(1-z) - m^2 + i\varepsilon]^2} \\
&= -2z(1-z)(k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu}) \frac{i\pi^{D/2} \Gamma(2 - D/2)}{[m^2 - k^2 z(1-z)]^{2-D/2}}
\end{aligned}$$

と計算できるため,

$$e_0^2 \Pi^{\mu\nu}(k) = (k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu}) \tilde{e}_0^2 \Pi(k^2), \quad (10.48)$$

$$\Pi(k^2) = \frac{2\mu^{4-D} f(D) \Gamma(2 - D/2)}{(4\pi)^{D/2}} \int_0^1 dz \frac{z(1-z)}{[m^2 - k^2 z(1-z)]^{2-D/2}} \quad (10.49)$$

が得られる\*47.

最後に  $\eta = 4 - D \rightarrow 0$  の極限をとろう.  $f(D) = f(4 - \eta) = 4 - \eta f'(4) + \dots$  と書いて式 (10.28), (10.29):

$$x^{-\eta/2} = 1 - \frac{1}{2}\eta \ln x + \dots, \quad \Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right) = \frac{2}{\eta} - \gamma + \dots$$

を利用すると, 式 (10.52a) を得る [本稿次節で補足].

## 10.4 について

■式 (10.39) における置き換え  $m_0 \rightarrow m$  について これは 9.8 節 p.225 で宣言されているように, 最初に  $m_0$  を  $m$  に置き換え, 質量相殺項を相互作用ハミルトニアンに含めるアプローチを採用していることを反映していると考えられる.

■対角和の評価 (10.41) について

$$\text{Tr}[\gamma^\mu (\not{p} + \not{k} + m) \gamma^\nu (\not{p} + m)] = \text{Tr}[\gamma^\mu (\not{p} + \not{k}) \gamma^\nu \not{p}] + m^2 \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu]$$

において

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[\gamma^\mu (\not{p} + \not{k}) \gamma^\nu \not{p}] &= f(D) (p+k)_\alpha p_\beta [g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} + g^{\mu\beta} g^{\alpha\nu}] \\
&= f(D) [(p+k)^\mu p^\nu - g^{\mu\nu} (p+k) \cdot p + (p+k)^\nu p^\mu], \\
\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] &= f(D) g^{\mu\nu}
\end{aligned}$$

である.

\*47 上式 (10.48) は

$$k_\mu \Pi^{\mu\nu}(k) = 0 \quad (10.50)$$

を満たす. これはゲージ不変性の条件となっている [本稿次節で補足].

■  $N^{\mu\nu}(q - kz, k)$  の式 (10.45) について

$$(p^\mu + k^\mu)p^\nu = \{q^\mu + (1-z)k^\mu\}(q^\nu - zk^\nu) = q^\mu q^\nu - z(1-z)k^\mu k^\nu + \dots, \\ m^2 - p \cdot (p + k) = m^2 - (q - zk) \cdot \{q + (1-z)k\} = m^2 - q^2 + z(1-z)k^2 + \dots$$

より

$$(p^\mu + k^\mu)p^\nu + (p^\nu + k^\nu)p^\mu + [m^2 - p \cdot (p + k)]g^{\mu\nu} \\ = 2g^{\mu\nu} - 2z(1-z)k^\mu k^\nu + [m^2 - q^2 + z(1-z)k^2 + \dots]g^{\mu\nu} + \dots$$

となるので式 (10.45) を得る.  $z(1-z)k^2 g^{\mu\nu}$  の項は式 (10.45)  $\{\dots\}$  内の第 2 項と第 3 項に分けられていることに注意する. 式 (10.45) のように項を分けておくと, 式 (10.47) において見るように第 1 項と第 2 項の寄与は相殺する.

■ ゲージ不変性の条件 (10.50) について  $\Pi^{\mu\nu}(k)$  の式 (10.48) が  $k_\mu \Pi^{\mu\nu}(k) = 0$ : (10.50) を満たすことはゲージ不変性の条件 (8.32) の [必要] 条件となっている. p.244 脚注 7) を補足しつつ, このことを確認する. 静的な外場  $A_e^\alpha(\mathbf{x})$  との相互作用に関する Feynman 振幅は  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_\alpha(\mathbf{k}) A_e^\alpha(\mathbf{k})$  という形を持つ. Lorenz ゲージ間のゲージ変換

$$A^\alpha(x) \rightarrow A^\alpha(x) + \partial^\alpha f, \quad f(x) = \tilde{f}(k) e^{\pm ik \cdot x}, \\ \therefore A_e^\alpha(\mathbf{k}) \rightarrow A_e^\alpha(\mathbf{k}) \pm ik^\alpha \tilde{f}(k)$$

に対してこれが不変となることを要求すると, 式 (8.32) の代わりに

$$k^\alpha \mathcal{M}_\alpha(\mathbf{k}) = 0$$

が得られる. 真空偏極ループを挿入した過程の Feynman 振幅 (から外場  $A_e^\alpha(\mathbf{k})$  を除いた部分)

$$\mathcal{M}'_\alpha(\mathbf{k}) = \mathcal{M}_\alpha(\mathbf{k}) + \mathcal{M}_\lambda(\mathbf{k}) iD_F^{\lambda\mu}(\mathbf{k}) i e^2 \Pi_{\mu\alpha}(\mathbf{k})$$

に対しても  $k^\alpha \mathcal{M}'_\alpha(\mathbf{k}) = 0$  が成り立つためには

$$k^\alpha \Pi_{\mu\alpha}(\mathbf{k}) = 0$$

でなければならない.

■ 質量尺度  $\mu$  の導入と  $\eta \rightarrow 0$  での式 (10.52a) について  $i e_0^2 \Pi^{\mu\nu}(k^2)$  における電荷 (の自乗) を  $e_0^2 = \tilde{e}_0^2 \mu^\eta$ : (10.31) と書くと,  $\eta \rightarrow 0$  のとき  $\tilde{e}_0^2$  は無次元を保ちながら  $e_0^2$  になる (10.3.1 節). ここで現れた  $\mu^\eta$  は  $\Pi(k^2)$  の式 (10.49) の被積分関数を無次元化するのに是非とも必要とされるものであり, これにより

$$\frac{1}{[\{m^2 - k^2 z(1-z)\}/\mu^2]^{\eta/2}} = 1 - \frac{\eta}{2} \ln \left\{ \frac{m^2 - k^2 z(1-z)}{\mu^2} \right\} + O(\eta^2)$$

と展開することが可能となる (真数は無次元でなければならない).

$$\begin{aligned}
\Pi(k^2) &= \frac{2\mu^\eta f(4-\eta)\Gamma(\eta/2)}{(4\pi)^{2-\eta/2}} \int_0^1 dz \frac{z(1-z)}{[m^2 - k^2 z(1-z)]^{\eta/2}} \\
&= \frac{2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dz z(1-z) [4 - \eta f'(4) + O(\eta^2)] \left[1 + \frac{\eta}{2} \ln(4\pi) + O(\eta^2)\right] \left[\frac{2}{\eta} - \gamma + O(\eta)\right] \\
&\quad \times \left[1 - \frac{\eta}{2} \ln \left\{ \frac{m^2 - k^2 z(1-z)}{\mu^2} \right\} + O(\eta^2)\right] \\
&= \frac{2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dz z(1-z) \left[4 \cdot \frac{2}{\eta} - 4\gamma + \frac{2}{\eta} \left[-\eta f'(4) + 4 \cdot \frac{\eta}{2} - 4 \cdot \frac{\eta}{2} \ln \left\{ \frac{m^2 - k^2 z(1-z)}{\mu^2} \right\}\right]\right] + O(\eta)
\end{aligned}$$

において  $\int_0^1 dz z(1-z) = 1/6$  なので式 (10.52a):

$$\Pi(k^2) = \frac{1}{12\pi^2} \left\{ \frac{2}{\eta} - \gamma - \frac{f'(4)}{2} + \ln(4\pi) \right\} - \frac{1}{2\pi^2} \int_0^1 dz z(1-z) \ln \left\{ \frac{m^2 - k^2 z(1-z)}{\mu^2} \right\} + O(\eta)$$

を得る.

## 10.5 異常磁気能率

9.6.1 節において予告したように, 電子の磁気能率への 2 次補正 (9.72):  $a_e = \alpha/2\pi$  が結節点補正から現れることを本節で説明する.  $\Lambda^\mu(p', p)$  の式 (9.6):

$$e_0^2 \Lambda^\mu(p', p) = \frac{(ie_0)^2}{(2\pi)^4} \int d^4 k \gamma^\alpha iS_F(p' - k) \gamma^\mu iS_F(p - k) \gamma^\beta iD_{F\alpha\beta}(k)$$

は, 赤外切断  $\lambda$  を導入し, [9.5 節と同様に最初に  $m_0 \rightarrow m$  と置き換えた上で] 次元正則化を行うと

$$e_0^2 \Lambda^\mu(p', p) = \frac{-i\tilde{e}_0^2 \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \int d^D k \frac{\gamma^\alpha (\not{p}' - \not{k} + m) \gamma^\mu (\not{p} - \not{k} + m) \gamma_\alpha}{(k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon)[(p' - k)^2 - m^2 + i\varepsilon][(p - k)^2 - m^2 + i\varepsilon]}, \quad (10.55)$$

$$\tilde{e}_0^2 \equiv \mu^{-\eta} e_0^2$$

となる ( $\mu$  は質量尺度).

- Feynman のパラメーター積分 (恒等式 (10.11b))
- $D$  次元空間における  $\gamma$  行列の公式 (10.37)
- $D$  次元空間における積分公式 (10.23), (10.32), (10.33)

を用いてこれを評価すると,

$$\begin{aligned}
e_0^2 \Lambda^\mu(p', p) &= e_0^2 \Lambda_0^\mu(p', p) + e_0^2 \Lambda_2^\mu(p', p), \\
e_0^2 \Lambda_0^\mu(p', p) &\equiv \frac{-2i\tilde{e}_0^2 \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dz \int d^D t \frac{\gamma^\alpha (\not{p}' - \not{t} + m) \gamma^\mu (\not{p} - \not{t} + m) \gamma_\alpha}{[t^2 - r - a^2 + i\varepsilon]^3} \\
&\rightarrow -\frac{\alpha_0}{4\pi} \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dz \frac{\gamma^\alpha (\not{p}' - \not{t} + m) \gamma^\mu (\not{p} - \not{t} + m) \gamma_\alpha}{r + a^2}, \quad (D \rightarrow 4) \\
e_0^2 \Lambda_2^\mu(p', p) &\equiv \frac{-2i\tilde{e}_0^2 \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dz \int d^D t \frac{\gamma^\alpha \not{t} \gamma^\mu \not{t} \gamma_\alpha}{[t^2 - r - a^2 + i\varepsilon]^3} \\
&= \gamma^\mu \frac{\tilde{e}_0^2}{8\pi^2} \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dz \left\{ \frac{2}{\eta} - \gamma + \ln(4\pi) - 2 - \ln \left( \frac{r + a^2}{\mu^2} \right) \right\} + O(\eta)
\end{aligned}$$

が得られる ( $\alpha_0 \equiv e_0^2/4\pi$ ,  $D = 4 - \eta$ ,  $\gamma = 0.5772 \dots$ : Euler 定数) [導出は下記]. ここに

$$r \equiv \lambda^2(1 - y - z) - y(p'^2 - m^2) - z(p^2 - m^2), \quad a^\mu \equiv yp'^\mu + zp^\mu$$

であり, また  $\Lambda_i^\mu(p', p)$  の添字  $i = 0, 2$  は被積分関数の分子における  $t$  の次数を表す. このように  $\eta \rightarrow 0$  すなわち  $D \rightarrow 4$  の極限で  $\Lambda_0^\mu$  は有限となり [ $\Lambda_0^\mu$  の表式は縮約公式を用いて簡単にできるが, 発散しない部分に興味はない], 発散は  $\Lambda_2^\mu$  における  $1/\eta$  の項のみから現れる. この  $1/\eta$  の項は式 (9.53):

$$\Lambda^\mu(p', p) = L\gamma^\mu + \Lambda_c^\mu(p', p)$$

における発散する項  $L\gamma^\mu$  に含まれる.

ここで電子の異常磁気能率を再考しよう. 静的な外場による電子の散乱過程の輻射補正に関して, Lorentz 不変性と Lorenz ゲージ条件

$$q_\mu A_e^\mu(\mathbf{q}) = 0, \quad (10.67)$$

Gordon 恒等式を考慮すると, Feynman 振幅

$$\mathcal{M} = ie_0 \bar{u}(\mathbf{p}') e_0^2 \Lambda^\mu(p', p) u(\mathbf{p}) A_{e\mu}(\mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}) \quad (10.66)$$

の最も一般的な形は

$$\mathcal{M} = ie_0 \bar{u}(\mathbf{p}') \left[ \gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i}{2m} \sigma^{\mu\nu} q_\nu F_2(q^2) \right] u(\mathbf{p}) A_{e\mu}(\mathbf{q}) \quad (10.68)$$

となることを証明し得る [本稿次節で補足]. ここで  $F_1$  と  $F_2$  は  $q^2$  の任意関数であり, 9.6.1 節ではこの  $F_2$  が  $g$  因子のずれ  $a_e \equiv \frac{g-2}{2}$  に他ならないこと,  $\alpha$  のオーダーまで計算すると  $a_e = F_2 = \alpha/2\pi$  となることを述べた.  $\Lambda_i^\mu(p', p)$  ( $i = 0, 2$ ) の表式より  $F_2$  への寄与は  $\Lambda_0^\mu(p', p)$  から生じ, 確かに 2 次補正として

$$F_2(q^2 = 0) = \frac{\alpha}{2\pi} \quad (10.70)$$

が得られる [本稿次節で導出]. ただし最低次では  $\alpha_0 = \alpha$  であることを考慮し, 最後に赤外切断  $\lambda \rightarrow 0$  の極限をとり, 保存則  $p' = p, q = 0$  (8.7 節) を要求した.

## 10.5 節, 式の導出など

### ■ $\Lambda^\mu$ の計算

$$N^\mu(p', p, k) = \gamma^\alpha (\not{p}' - \not{k} + m) \gamma^\mu (\not{p} - \not{k} + m) \gamma_\alpha$$

とおくと, 式 (10.55) は

$$\begin{aligned} e_0^2 \Lambda^\mu(p', p) &= \frac{-i\tilde{e}_0^2 \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \int d^D k \frac{N^\mu(p', p, k)}{(k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon)[(p' - k)^2 - m^2 + i\varepsilon][(p - k)^2 - m^2 + i\varepsilon]} \\ &= \frac{-i\tilde{e}_0^2 \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dz \int d^D k \frac{2N^\mu(p', p, k)}{[k^2 - 2k \cdot (p'y + pz) - r + i\varepsilon]^3} \\ &\quad (\text{Feynman のパラメーター積分 (10.11b) [本稿次節で補足]}) \\ &= \frac{-i\tilde{e}_0^2 \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dz \int d^D t \frac{2N^\mu(p', p, t+a)}{[t^2 - r - a^2 + i\varepsilon]^3} \\ &\quad (t^\mu = k^\mu - a^\mu \equiv k^\mu - (p'y + pz)^\mu) \end{aligned} \quad (10.57)$$

と書き換えられる。  $N^\mu(p', p, t+a)$  を  $t$  の異なるべきの和に分けて

$$\begin{aligned} N^\mu(p', p) &= \sum_{i=0}^2 N_i^\mu(p', p), \\ N_0^\mu(p', p) &\equiv \gamma^\alpha (\not{p}' - \not{p} + m) \gamma^\mu (\not{p} - \not{p} + m) \gamma_\alpha, \\ N_1^\mu(p', p) &\equiv -\gamma^\alpha [\not{p}' \gamma^\mu (\not{p} - \not{p} + m) (\not{p}' - \not{p} + m) \gamma^\mu \not{p}] \gamma_\alpha, \\ N_2^\mu(p', p) &\equiv \gamma^\alpha \not{p}' \gamma^\mu \not{p} \gamma_\alpha \end{aligned}$$

と書くと (引数の  $a, t$  依存性は省略),

$$\begin{aligned} e_0^2 \Lambda^\mu(p', p) &= \sum_{i=0}^2 e_0^2 \Lambda_i^\mu(p', p), \\ e_0^2 \Lambda_i^\mu(p', p) &= \frac{-i \tilde{e}_0^2 \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dz \int d^D t \frac{2N_i^\mu(p', p)}{[t^2 - r - a^2 + i\varepsilon]^3}. \end{aligned}$$

$\Lambda_1^\mu$  は被積分関数が  $t$  に関して奇なので, 式 (10.32) により消える.

発散する部分  $\Lambda_2^\mu$  は

$$e_0^2 \Lambda_2^\mu(p', p) = \frac{\tilde{e}_0^2 \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \frac{\pi^{D/2} \Gamma(2-D/2)}{\Gamma(3)} \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dz \frac{\gamma^\alpha \gamma_\sigma \gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma_\alpha}{(r+a^2)^{2-D/2}} \quad (10.64)$$

(公式 (10.33) を用いて  $t$  に関する積分を実行した)

$$= \gamma^\mu \frac{\tilde{e}_0^2}{8\pi^2} \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dz \left\{ \left( \frac{2}{\eta} - \gamma + \ln(4\pi) \right) - 2 - \ln \left( \frac{r+a^2}{\mu^2} \right) \right\} \quad (10.65)$$

$$\left( \because \text{式 (10.37), 式 (10.28)} : x^{-\eta/2} = 1 - \frac{1}{2}\eta \ln x + \dots, \text{式 (10.29)} : \Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right) = \frac{2}{\eta} - \gamma + \dots \right)$$

と計算できる [本稿次節で補足].

## 10.5 について

### ■ $\Lambda^\mu$ の式 (10.57) について

$$a = k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon, \quad b = (p' - k)^2 - m^2 + i\varepsilon, \quad c = (p - k)^2 - m^2 + i\varepsilon$$

とおき, 積分変数を  $x \rightarrow y$  と改めて Feynman のパラメーター積分の式 (10.11b) を用いれば良い.

### ■ $\Lambda_2^\mu$ の式 (10.64) について

$$\begin{aligned} \int d^D t \frac{2N_2^\mu(p', p; t)}{[t^2 - r - a^2 + i\varepsilon]^3} &= 2\gamma^\alpha \gamma_\sigma \gamma^\mu \gamma_\tau \gamma_\alpha \int d^D t \frac{t^\sigma t^\tau}{[t^2 - r - a^2 + i\varepsilon]^3} \\ &= 2\gamma^\alpha \gamma_\sigma \gamma^\mu \gamma_\tau \gamma_\alpha i\pi^{D/2} \frac{\Gamma(2-D/2)}{2\Gamma(3)} \frac{g^{\sigma\tau}}{(r+a^2)^{2-D/2}} \\ &= i \frac{\pi^{D/2} \Gamma(2-D/2)}{\Gamma(3)} \frac{\gamma^\alpha \gamma_\sigma \gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma_\alpha}{(r+a^2)^{2-D/2}}. \end{aligned}$$

式 (10.64) 右辺における  $(r+a^2)$  の前の負号は余計である (本稿では修正済み).

■  $\Lambda_2^\mu$  の式 (10.65) について  $\gamma$  行列の縮約公式 (10.37) より式 (10.64) 右辺において

$$\gamma^\alpha \gamma_\sigma \gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma_\alpha = -(D-2) \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma_\alpha = (D-2)^2 \gamma^\mu$$

なので,

$$\begin{aligned} & e_0^2 \Lambda_2^\mu(p', p) \\ &= \frac{\tilde{e}_0^2 \mu^\eta}{(2\pi)^{4-\eta}} \frac{\pi^{2-\frac{\eta}{2}} \Gamma(\eta/2)}{\Gamma(3)} \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dz \frac{(2-\eta)^2 \gamma^\mu}{(r+a^2)^{\eta/2}} \\ &= \gamma^\mu \frac{\tilde{e}_0^2 \pi^2}{2(2\pi)^4} \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dz [1 + \eta \ln(2\pi) + O(\eta^2)] \left[1 - \frac{\eta}{2} \ln \pi + O(\eta^2)\right] \left[\frac{2}{\eta} - \gamma + O(\eta)\right] \\ &\quad \times [4 - 4\eta + \eta^2] \left[1 - \frac{\eta}{2} \ln\left(\frac{r+a^2}{\mu^2}\right) + O(\eta^2)\right] \\ &= \gamma^\mu \frac{\tilde{e}_0^2}{32\pi^2} \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dz \left[4 \cdot \frac{2}{\eta} - 4\gamma + \frac{2}{\eta} \cdot \eta \left\{4 \ln(2\pi) - 4 \cdot \frac{1}{2} \ln \pi - 4 - 4 \cdot \frac{1}{2} \ln\left(\frac{r+a^2}{\mu^2}\right)\right\}\right] + O(\eta) \\ &= \gamma^\mu \frac{\tilde{e}_0^2}{8\pi^2} \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dz \left\{\frac{2}{\eta} - \gamma + \ln(4\pi) - 2 - \ln\left(\frac{r+a^2}{\mu^2}\right)\right\} + O(\eta) : (10.65) \end{aligned}$$

を得る. 質量尺度  $\mu$  の導入により, 真数  $\frac{r+a^2}{\mu^2}$  が無次元量であることが保証されている.

■ 式 (10.68), 式 (10.70) の確認 本稿では Lorentz 不変性や Gordon 恒等式の助けを借りず, 式 (10.68) を直接確かめ, 次の式 (10.70) を導出する [6, pp.408–412]. まず  $\Lambda^\mu$  の計算結果を

$$e_0^2 \Lambda^\mu(p', p) = e_0^2 \Lambda_0^\mu(p', p) + e_0^2 \Lambda_2^\mu(p', p), \quad (10.63a)$$

$$e_0^2 \Lambda_i^\mu(p', p) = \frac{-i\tilde{e}_0^2 \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dz \int d^D t \frac{2N_i^\mu(p', p)}{[t^2 - r - a^2 + i\varepsilon]^3}, \quad (10.63b)$$

$$N_0^\mu(p', p) \equiv \gamma^\alpha (\not{p}' - \not{\phi} + m) \gamma^\mu (\not{p} - \not{\phi} + m) \gamma_\alpha, \quad (10.62a)$$

$$N_2^\mu(p', p) \equiv \gamma^\alpha \not{\psi} \gamma^\mu \not{\psi} \gamma_\alpha \quad (10.62c)$$

とまとめておく.

$\Lambda_0^\mu(p', p)$  と  $\Lambda_2^\mu(p', p)$  に共通する, 式 (10.63b) の分母の因子  $t^2 - r - a^2 + i\varepsilon$  を調べよう.  $p^2 = m^2, p'^2 = m^2$  を用いると

$$r \equiv \lambda^2(1-y-z) - y(p'^2 - m^2) - z(p^2 - m^2) = \lambda^2(1-y-z), \quad a^2 = (yp' + zp)^2 = (y^2 + z^2)m^2 + 2yzp \cdot p'$$

であり, さらに

$$q^2 = (p' - p)^2 = 2m^2 - 2p \cdot p', \quad \therefore 2p \cdot p' = m^2 - \frac{q^2}{2}$$

に注意すると

$$a^2 = (y+z)^2 m^2 + yzq^2$$

と書き換えられる. 以上より分母の因子

$$t^2 - r - a^2 + i\varepsilon = \lambda^2(1-y-z) + (y+z)^2 m^2 + yzq^2 + i\varepsilon$$

は  $q^2$  の関数である.

次に式 (10.62a) で定義した,  $\Lambda_0^\mu(p', p)$  の分子の因子  $N_0^\mu(p', p)$  を調べる.  $\gamma$  行列の縮約の公式 (付録 A.2) を用いると,

$$\begin{aligned} N_0^\mu(p', p) &= \gamma^\alpha (\not{p}' - \not{a}) \gamma^\mu (\not{p} - \not{a}) \gamma_\alpha + m \{ \gamma^\alpha (\not{p}' - \not{a}) \gamma^\mu \gamma_\alpha + \gamma^\alpha \gamma^\mu (\not{p} - \not{a}) \gamma_\alpha \} + m^2 \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\alpha \\ &= -2(\not{p} - \not{a}) \gamma^\mu (\not{p}' - \not{a}) + 4m(p' + p - 2a)^\mu - 2m^2 \gamma^\mu \end{aligned} \quad (259)$$

と簡略化される.

Feynman 振幅 (10.66) において左から  $\bar{u}(p')$  が, 右から  $u(p)$  が掛かることを念頭に置き,

$$\bar{u}(p')(\not{p}' - m) = 0, \quad (\not{p} - m)u = 0 \quad (\text{付録 A.4})$$

を想起すると,

$$\begin{aligned} \text{式 (259) の左側で} \quad & \not{p}' \rightarrow m, \quad \not{p} = \not{p}' - \not{a} \rightarrow m - \not{a}, \\ \text{式 (259) の右側で} \quad & \not{p} \rightarrow m, \quad \not{p}' = \not{p} + \not{a} \rightarrow m + \not{a} \end{aligned}$$

と置き換えることが許される. よって

$$\begin{aligned} (\text{式 (259) の第 1 項}) &= -2(\not{p} - \not{a}) \gamma^\mu (\not{p}' - \not{a}) \\ &= -2\{(1-z)\not{p} - y\not{p}'\} \gamma^\mu \{(1-y)\not{p}' - z\not{p}\} \quad (\because a \equiv yp' + zp) \\ &\rightarrow -2\{(1-y-z)m - (1-z)\not{a}\} \gamma^\mu \{(1-y-z)m + (1-y)\not{a}\} \\ &= -2[(1-y-z)^2 m^2 \gamma^\mu + m(1-y-z)\{(1-y)\gamma^\mu \not{a} - (1-z)\not{a} \gamma^\mu\} - (1-y)(1-z)\not{a} \gamma^\mu \not{a}]. \end{aligned}$$

また上式 (259) の第 2 項は, 任意の 4 元ベクトル  $A^\mu$  に対して

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad \therefore \{\gamma^\mu, A\} = 2A^\mu$$

が成り立つことを用いて, あえて

$$4m(p' + p - 2a)^\mu = 2m\{(\not{p}' + \not{p} - 2\not{a})\gamma^\mu + \gamma^\mu(\not{p}' + \not{p} - 2\not{a})\}$$

と書き換えておく. すると再び式 (259) 第 1 項の計算と同様の手順を踏んで,

$$\begin{aligned} (\text{式 (259) の第 2 項}) &= 2m[\{(1-2y)\not{p}' + (1-2z)\not{p}\} \gamma^\mu + \gamma^\mu \{(1-2y)\not{p}' + (1-2z)\not{p}\}] \\ &\rightarrow 2m[\{(1-2y)m + (1-2z)(m - \not{a})\} \gamma^\mu + \gamma^\mu \{(1-2y)(m + \not{a}) + (1-2z)m\}] \\ &= 2m[\{2(1-y-z)m - (1-2z)\not{a}\} \gamma^\mu + \gamma^\mu \{2(1-y-z)m + (1-2y)\not{a}\}] \end{aligned}$$

とできる.

以上より式 (259) の  $N_0^\mu(p', p)$  は, 行列

$$\gamma^\mu, \quad \gamma^\mu \not{a}, \quad \not{a} \gamma^\mu, \quad \not{a} \gamma^\mu \not{a}$$

に比例する項で表され, その係数は全て定数である. ここで Lorenz ゲージの条件 (10.67):  $q_\mu A_e^\mu(\mathbf{q}) = 0$  を考慮しよう.  $\gamma^\mu$  と  $\not{a}$  を反交換したときのお釣りの項は

$$\{\gamma^\mu, \not{a}\} = 2a^\mu$$

である. ところが Feynman 振幅 (10.66) において  $\Lambda^\mu$  には  $A_e^\mu(\mathbf{q})$  が縮約されるので, お釣りの項は Feynman 振幅に寄与しない. よって

$$\gamma^\mu \not{a} \leftrightarrow -\not{a} \gamma^\mu, \quad \not{a} \gamma^\mu \not{a} \rightarrow -(\not{a} \not{a}) \gamma^\mu = -q^2 \gamma^\mu$$

として良い (付録 A.3 の公式  $\not{q}\not{q} = q^2$  を考慮した). さらに, 再び反交換子  $\{\gamma^\mu, \not{q}\} = 2q^\mu \rightarrow 0$  とすると

$$\not{q}\gamma^\mu = \frac{1}{2}[\not{q}, \gamma^\mu] + \frac{1}{2}\{\not{q}, \gamma^\mu\} \rightarrow \frac{1}{2}q_\nu[\gamma^\nu, \gamma^\mu] = iq_\nu\sigma^{\mu\nu}$$

となる ( $\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ ). したがって  $N_0^\mu(p', p)$  の式 (259) 全体は,  $\gamma^\mu$  または  $\sigma^{\mu\nu}$  に比例する項で表され, その係数は  $q^2$  の関数となる.

式 (10.62c) の  $N_2^\mu(p', p)$  に関しては,  $\gamma$  行列の縮約の公式 (付録 A.2) を用いると,

$$N_2^\mu(p', p) \equiv \gamma^\alpha \not{p}' \gamma^\mu \not{p} \gamma_\alpha = -2\not{p}' \gamma^\mu \not{p} = -2\not{p}'(-\not{p} \gamma^\mu + 2t^\mu) = 2t^2 \gamma^\mu - 4t^\mu \not{p}'$$

となるので,

$$\Lambda_2^\mu(p', p) \sim \int d^D t \frac{N_2^\mu(p', p)}{[t^2 - r - a^2 + i\varepsilon]^3}$$

は  $\gamma^\mu$  に比例した項を与える (係数は  $q^2$  の関数).

以上より Feynman 振幅 (10.66):  $\mathcal{M} = ie_0 \bar{u}(p') e_0^2 \Lambda^\mu(p', p) u(p) A_{e\mu}(q)$  は式 (10.68):

$$\mathcal{M} = ie_0 \bar{u}(p') \left[ \gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i}{2m} \sigma^{\mu\nu} q_\nu F_2(q^2) \right] u(p) A_{e\mu}(q)$$

の形を持つ.

次の問題は  $\sigma^{\mu\nu}$  の項を計算し, 式 (10.70) を導くことである. ここまで見たように,  $\sigma^{\mu\nu}$  の項は  $N_0^\mu(p', p)$  における  $\not{q}\gamma^\mu$  ( $\leftrightarrow -\gamma^\mu \not{q}$ ) の項のみから生じる. その係数を集めると

$$\begin{aligned} (N_0^\mu(p', p) \text{ における } \gamma^\mu \not{q} \text{ の係数}) &= 2m\{-(1-y-z)(1-y) + (1-2y)\} = -2my(y+z), \\ (N_0^\mu(p', p) \text{ における } \not{q}\gamma^\mu \text{ の係数}) &= 2m\{-(1-y-z)(1-z) + (1-2z)\} = -2mz(y+z) \end{aligned}$$

となり,  $\gamma^\mu \not{q} \rightarrow -\not{q}\gamma^\mu$  と反交換してまとめると,

$$(N_0^\mu(p', p) \text{ における } \sigma^{\mu\nu} \text{ の項}) = 2m(y+z)^2 \not{q}\gamma^\mu = 2m(y+z)^2 \cdot iq_\nu \sigma^{\mu\nu}$$

を得る. その  $e_0^2 \Lambda_0^\mu(p', p)$  への寄与は,

$$\begin{aligned} & (e_0^2 \Lambda^\mu(p', p) \text{ における } \sigma^{\mu\nu} \text{ の項}) \\ &= \frac{-i\tilde{e}_0^2 \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dz \int d^D t \frac{2 \cdot 2m(y+z)^2 \cdot iq_\nu \sigma^{\mu\nu}}{[t^2 - r - a^2 + i\varepsilon]^3} \\ &= \frac{-i\tilde{e}_0^2 \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} 2 \cdot 2m \cdot iq_\nu \sigma^{\mu\nu} \cdot \frac{i\pi^{D/2} \Gamma(3-D/2)}{2} \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dz \frac{(y+z)^2}{(r+a^2)^{3-D/2}} \quad (\because \text{公式 (10.23)}) \\ &= \frac{-i\tilde{e}_0^2 \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} 2 \cdot 2m \cdot iq_\nu \sigma^{\mu\nu} \cdot \frac{i\pi^{D/2} \Gamma(3-D/2)}{2} \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dz \frac{(y+z)^2}{[\lambda^2(1-y-z) + (y+z)^2 m^2 + yzq^2]^{3-D/2}} \\ &\rightarrow -\frac{ie_0^2}{(2\pi)^4} 2i^2 \pi^2 \frac{q_\nu \sigma^{\mu\nu}}{m} \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dz \quad (D \rightarrow 4, \lambda \rightarrow 0, q \rightarrow 0 \text{ とした}) \\ &= \frac{ie_0^2}{16\pi^2} \frac{q_\nu \sigma^{\mu\nu}}{m} \left( \because \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dz = \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{i\alpha}{4\pi} \frac{q_\nu \sigma^{\mu\nu}}{m} \left( \because \text{「最低次では } e_0 = e \text{」 (p.247), } \alpha = \frac{e^2}{4\pi} \right) \end{aligned}$$

と計算される．Feynman 振幅 (10.66) への寄与は

$$ie_0 \bar{u}(\mathbf{p}') \left[ \frac{i\alpha}{4\pi} \frac{q_\nu \sigma^{\mu\nu}}{m} \right] u(\mathbf{p}) A_{e\mu}(\mathbf{q}) \quad (\text{ただし } q = \mathbf{p}' - \mathbf{p} \rightarrow 0)$$

であり，これを式 (10.68) の  $\sigma^{\mu\nu}$  の項と比べると，

$$F_2(0) = \frac{\alpha}{2\pi} : (10.70)$$

と同定される．

## 練習問題 (第 10 章)

### 10.1 式 (10.25) から式 (10.26) の導出

10.3.1 節のノートで確認済み．

### 10.2 電子の自己エネルギーの次元正則化 (その 1)

電子の自己エネルギー (9.4) は次元正則化により

$$ie_0^2 \Sigma(p) = \frac{-\tilde{e}_0^2 \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \int d^D k \frac{\gamma^\alpha (\not{p} - \not{k} + m) \gamma^\beta}{(p-k)^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{g_{\alpha\beta}}{k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon} \quad (10.71)$$

となる．ただし  $\mu$  は質量尺度であり，赤外発散を防ぐために小さい切断パラメーター  $\lambda$  も導入してある． $\eta = 4 - D \rightarrow 0, \lambda \rightarrow 0$  の極限で

$$e_0^2 \Sigma(p) = \frac{\tilde{e}_0^2}{16\pi^2} (\not{p} - 4m) \left[ \frac{2}{\eta} - \gamma + \ln(4\pi) \right] + \tilde{e}_0^2 \Sigma_c(p), \quad (10.73a)$$

$$16\pi^2 \Sigma_c(p) = (2m - \not{p}) - 2 \int_0^1 dz [\not{p}(1-z) - 2m] \ln \left( \frac{m^2 z - p^2 z(1-z)}{\mu^2} \right) \quad (10.73b)$$

となる．[教科書の式 (10.73b) の被積分関数  $[\dots]$  内で， $m$  の係数を  $4 \rightarrow 2$  と修正した．理由は導出過程を参照．] ここで定義した  $\Sigma_c(p)$  は QED の復元操作  $\eta \rightarrow 0$  の際に有限に留まる．

■式 (10.73) の導出 教科書の誘導に従って計算を進めよう． $\gamma$  行列に関する縮約の公式 (10.37) より，式 (10.71) の被積分関数の分子は

$$\gamma^\alpha (\not{p} - \not{k} + m) \gamma^\beta g_{\alpha\beta} = Dm - (D-2)(\not{p} - \not{k})$$

となる．Feynman のパラメーター積分 (10.10) を用いると，式 (10.71) の積分は

$$\begin{aligned} & \int d^D k \frac{Dm - (D-2)(\not{p} - \not{k})}{\{(p-k)^2 - m^2 + i\varepsilon\} \{k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon\}} \\ &= \int d^D k \{Dm - (D-2)(\not{p} - \not{k})\} \int_0^1 \frac{dz}{[\{k^2 - \lambda^2 + i\varepsilon\} + \{p^2 - 2p \cdot k - m^2 + \lambda^2\} z]^2} \\ &= \int_0^1 dz \int d^D q \frac{Dm - (D-2)(\not{p} - \not{q} - \not{p}z)}{(q^2 - s + i\varepsilon)^2} \\ & \quad (q = k - pz, s = m^2 z + \lambda^2(1-z) - p^2 z(1-z)) \end{aligned}$$

と書き換えられる (これは教科書の式 (10.72) にあたる). 次に式 (10.23), 式 (10.32) を用いて  $q$  に関する積分を実行すると,

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 dz \int d^D q \frac{Dm - (D-2)(\not{p} - \not{q} - \not{p}z)}{(q^2 - s + i\varepsilon)^2} \\
&= \int_0^1 dz \{Dm - (D-2)(1-z)\not{p}\} \int d^D q \frac{1}{(q^2 - s + i\varepsilon)^2} \\
&= i\pi^{D/2} \Gamma(2 - D/2) \int_0^1 dz \frac{Dm - (D-2)(1-z)\not{p}}{s^{2-D/2}} \tag{260}
\end{aligned}$$

を得る. この式はもはや赤外発散の恐れがないので,  $s$  の中で  $\lambda = 0$  と置いて良い.

$$s = m^2 z - p^2 z(1-z).$$

式 (10.71) の積分に上式 (260) を代入して  $D = 4 - \eta$  とおき, 式 (10.28), (10.29) を用いて  $\eta$  について展開すると

$$\begin{aligned}
e_0^2 \Sigma(p) &= -\tilde{e}_0^2 \frac{1}{(4\pi)^{D/2} (4\pi)^{-\eta/2}} \Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right) \int_0^1 dz \frac{4m - 2(1-z)\not{p} + \eta\{-m + (1-z)\not{p}\}}{(s/\mu^2)^{\eta/2}} \\
&= \frac{-\tilde{e}_0^2}{16\pi^2} \left[1 + \frac{\eta}{2} \ln(4\pi) + \dots\right] \left[\frac{2}{\eta} - \gamma + \dots\right] \\
&\quad \times \int_0^1 dz [\{4m - 2(1-z)\not{p}\} + \eta\{-m + (1-z)\not{p}\}] \left[1 - \frac{1}{2}\eta \ln\left(\frac{s}{\mu^2}\right) + \dots\right]
\end{aligned}$$

となる.

$$\int_0^1 dz \{4m - 2(1-z)\not{p}\} = 4m - \not{p}, \quad \int_0^1 dz \{-m + (1-z)\not{p}\} = -\frac{1}{2}(2m - \not{p})$$

に注意しつつ,  $\eta \rightarrow 0$  において生き残る  $1/\eta$  の項と定数項までを拾い上げると,

$$\begin{aligned}
e_0^2 \Sigma(p) &= \frac{-\tilde{e}_0^2}{16\pi^2} \frac{2}{\eta} (4m - \not{p}) + \frac{-\tilde{e}_0^2}{16\pi^2} \left[ \{-\gamma + \ln(4\pi)\} (4m - \not{p}) - (2m - \not{p}) - \int_0^1 dz \{4m - 2(1-z)\not{p}\} \ln\left(\frac{s}{\mu^2}\right) \right] \\
&= \frac{\tilde{e}_0^2}{16\pi^2} (\not{p} - 4m) \left[ \frac{2}{\eta} - \gamma + \ln(4\pi) \right] + \tilde{e}_0^2 \Sigma_c(p) : (10.73a),
\end{aligned}$$

$$16\pi^2 \Sigma_c(p) = (2m - \not{p}) - 2 \int_0^1 dz [\not{p}(1-z) - 2m] \ln\left(\frac{m^2 z - p^2 z(1-z)}{\mu^2}\right) : (10.73b)$$

を得る.

### 10.3 電子の自己エネルギーの次元正則化 (その2)

前問の結果 (10.73) を 9.3 節における展開

$$e_0^2 \Sigma(p) = -\delta m + (\not{p} - m)(1 - Z_2) + (\not{p} - m)e_0^2 \Sigma_c(p)$$

と比較する. [これは式 (9.26) の両辺に  $e_0^2$  を掛け, 式 (9.28):  $e_0^2 A = -\delta m$ , 式 (9.35):  $e_0^2 B = 1 - Z_2$  を用いて得られる. 上式の  $\Sigma_c(p)$  も有限であることを要求すると,] 式 (10.73) において発散する  $1/\eta$  の項

$$\frac{\alpha_0}{4\pi} (\not{p} - m) \frac{2}{\eta} = -\frac{3\alpha_0 m}{2\pi} \frac{1}{\eta} + (\not{p} - m) \frac{\alpha_0}{2\pi}$$

は  $\delta m$  と  $Z_2$  の項に

$$\delta m \sim \frac{1}{\eta} \left( \frac{3\alpha_0 m}{2\pi} \right), \quad Z_2 \sim -\frac{1}{\eta} \left( \frac{\alpha_0}{2\pi} \right)$$

とあてがわれなければならない。

この結果は Ward 恒等式の帰結  $Z_1 = Z_2$  と整合している。実際、式 (9.53):  $\Lambda^\mu(p', p) = L\gamma^\mu + \Lambda_c^\mu(p', p)$  を次元正則化の式 (10.63), (10.65) と比較すると、発散部分  $L$  は  $\eta$  に対して

$$L \sim \frac{1}{8\pi^2} \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dz \frac{2}{\eta} = \frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{\eta}$$

のように依存する。よって  $Z_1$  も  $Z_2$  と同様、

$$Z_1 = 1 - e_0^2 L + \dots \sim -\frac{1}{\eta} \left( \frac{\alpha_0}{2\pi} \right)$$

にしたがって発散する。

## 付録 A テンソルの変換則とその周辺

ここでは 2.1 節の要約で省略した事柄について、テンソルの変換則に関する一般論と併せて少し詳しくまとめておく。これは古典論の復習であり、証明は割愛する。

### A.1 テンソル

物理学の指導原理として、どのような座標系を用いても物理法則は同じ形の方程式で記述されることが要請される (共変性の要請)。そこで物理量が座標変換に対してどのように変化するかを調べるのが有用となる。

■**テンソルの定義** 時空の座標を  $x \equiv (x^0, \dots, x^3)$  のように表記する。  $t = x^0/c$  は時間座標であり、ここでは空間座標  $(x^1, x^2, x^3)$  はデカルト座標に限らない一般座標として良い。

座標変換に伴い時空に固定した点の座標が

$$x \equiv (x^0, \dots, x^3) \rightarrow x' \equiv (x'^0, \dots, x'^3)$$

と変わるとき、値が

$$T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} \rightarrow T'^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\rho_p}} \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\sigma_q}}{\partial x'^{\nu_q}} T^{\rho_1 \dots \rho_p}_{\sigma_1 \dots \sigma_q} \quad (261)$$

と変化する量  $T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}$  を  $p$  階反変  $q$  階共変テンソルまたは  $(p, q)$  テンソル (の成分) と呼ぶ。

Einstein の規約 テンソルを定義する変換則 (261) 右辺の  $\rho_1, \dots, \sigma_1, \dots$  ように 2 度以上現れる添字については 0 から 3 までの和をとる。例えば

$$A^\mu{}_\nu B^\nu \equiv \sum_{\nu=0}^3 A^\mu{}_\nu B^\nu = \sum_{\rho=0}^3 A^\mu{}_\rho B^\rho \equiv A^\mu{}_\rho B^\rho$$

である。添字  $\mu$  と違って和をとられる添字  $\nu$  は式変形の途中で ( $\mu$  以外の) 別の文字  $\rho$  に置き換えても式の意味が変わらない。このような添字をダミー添字と呼ぶ。

テンソル場 テンソル場に対して変換則 (261) は、与えられた時空点における場の値の変化を規定する。右辺は座標  $x$  の関数であるのに対し、左辺  $T' \dots$  は同一の点を表す新しい座標  $x'$  の関数と見なされる。

特に

$$\begin{aligned} (0, 0) \text{ テンソル} &= \text{スカラー} \\ (1, 0) \text{ テンソル} &= \text{反変ベクトル} \\ (0, 1) \text{ テンソル} &= \text{共変ベクトル} \end{aligned}$$

である [4, pp.256–257] [18, pp.126–127]。以下の量は数学的に変換則が定まっている [19, pp.26–27]。

$$\begin{aligned} \text{座標の微分 } dx^\mu \text{ は反変ベクトル: } dx'^\mu &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \leftarrow \text{全微分} \\ \text{微分演算子 } \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \text{ は共変ベクトル: } \partial'_\mu &= \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \partial_\nu \leftarrow \text{合成関数の微分} \end{aligned}$$

Kronecker の記号  $\delta^\mu_\nu$  を混合テンソル ((1, 1) テンソル) とすれば, その成分が任意の座標系で同じ値を持つことが保証される [18, p.51] :

$$\delta^\mu_{\nu'} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \delta^\rho_\sigma = \delta^\mu_\nu.$$

また線形変換  $x'^\mu = a^\mu_\nu x^\nu$  は, 係数  $a^\mu_\nu$  が座標に依らなければ反変ベクトルの変換則  $x'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} x^\nu$  に他ならない (実際  $x'^\mu = a^\mu_\nu x^\nu$  を両辺  $x^\lambda$  で微分すると  $\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} = a^\mu_\nu \delta^\nu_\lambda = a^\mu_\lambda$  となる). Lorentz 変換はこの場合にあたる. ただし一般には座標  $x^\mu$  そのものが常にベクトルを形成するとは限らない.

ここで (反変) ベクトル  $\vec{V}$  の成分は座標系に依るけれども  $\vec{V}$  自体は座標系に依らない幾何学的な対象である.  $\vec{V}$  の成分  $V^\alpha$  に対する上記の変換則  $V'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} V^\beta$  はこのことと整合している. これは次のように理解できる. 各位置での座標系の基底  $\vec{e}_\alpha$  は, 座標  $x^\alpha$  が増大する方向のベクトルである. 特に (時空の内部に横たわる) 位置ベクトル  $\vec{x}$  に対して  $\partial_\alpha \vec{x}$  を基底  $\vec{e}_\alpha$  に用いると, これは共変ベクトルの変換則

$$\vec{e}'_\alpha = \partial_\alpha \vec{x} = \left( \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} \partial_\beta \right) \vec{x} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} \vec{e}_\beta$$

に従う. よって  $V^\alpha$  が反変ベクトル成分として変換されれば

$$V'^\alpha \vec{e}'_\alpha = \left( \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} V^\beta \right) \left( \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\alpha} \vec{e}_\gamma \right) = \delta^\gamma_\beta V^\beta \vec{e}_\gamma = V^\alpha \vec{e}_\alpha = \vec{V}$$

となり, どのような座標系を用いても  $V^\alpha \vec{e}_\alpha$  は同一のベクトル  $\vec{V}$  を与える [19, pp.25-26].

最後に, 上式 (261) の右辺に Jacobian が掛かった変換則

$$\mathbf{T}^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} \rightarrow \mathbf{T}'^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} = \frac{\partial(x)}{\partial(x')} \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\rho_p}} \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\sigma_q}}{\partial x'^{\nu_q}} \mathbf{T}^{\rho_1 \dots \rho_p}_{\sigma_1 \dots \sigma_q}$$

に従う量  $\mathbf{T}^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}$  を  $p$  階反変  $q$  階共変テンソル密度 (または擬テンソル) と呼ぶ [18, pp.60-62, pp.127-128]. 「密度」という名前の由来は, A.3 節で説明する. デルタ関数がスカラー密度の変換則に従うことだけはここで述べておく.

$$1 = \int \delta^4(x') d^4 x' = \int \delta^4(x) d^4 x = \int \delta^4(x) \frac{\partial(x)}{\partial(x')} d^4 x', \quad \therefore \delta^4(x') = \frac{\partial(x)}{\partial(x')} \delta^4(x).$$

■物理法則の共変性 両辺が同じ種類のテンソルで書かれた方程式  $\mathbf{T}^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} = U^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}$  の形に物理法則を表せば, テンソルの定義によりこれは両辺が同じように変換されるので座標変換に対して形を変えず, 共変性の要請を満たす [18, pp.53-54]:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}'^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} &= \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\rho_p}} \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\sigma_q}}{\partial x'^{\nu_q}} \mathbf{T}^{\rho_1 \dots \rho_p}_{\sigma_1 \dots \sigma_q} \\ &= \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\rho_p}} \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\sigma_q}}{\partial x'^{\nu_q}} U^{\rho_1 \dots \rho_p}_{\sigma_1 \dots \sigma_q} = U'^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}. \end{aligned}$$

■テンソルの和, 積, 縮約から新たなテンソルが作られること テンソルを定義する変換則 (261) から, 以下が容易に示される.

- 同じ種類のテンソルに対しては和が定義される.  
( $p, q$ ) テンソル  $\mathbf{T}^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}, U^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}$  の和

$$A^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q} \equiv T^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q} + U^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q} \quad (262)$$

は  $(p, q)$  テンソルである.

- $(p, q)$  テンソル  $T^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q}$  と  $(r, s)$  テンソル  $U^{\rho_1 \cdots \rho_r}_{\sigma_1 \cdots \sigma_s}$  の積

$$B^{\mu_1 \cdots \mu_p \rho_1 \cdots \rho_r}_{\nu_1 \cdots \nu_q \sigma_1 \cdots \sigma_s} \equiv T^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q} U^{\rho_1 \cdots \rho_r}_{\sigma_1 \cdots \sigma_s} \quad (263)$$

は  $(p+r, q+s)$  テンソルである.

- $(p, q)$  テンソル  $T^{\mu_1 \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_q}$  の添字  $\mu_i, \nu_j$  をダミー添字  $\lambda$  にして和をとる操作を縮約という.  
これにより  $(p-1, q-1)$  テンソル

$$C^{\mu_1 \cdots \mu_{i-1} \mu_{i+1} \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_{j-1} \nu_{j+1} \cdots \nu_q} \equiv T^{\mu_1 \cdots \mu_{i-1} \lambda \mu_{i+1} \cdots \mu_p}_{\nu_1 \cdots \nu_{j-1} \lambda \nu_{j+1} \cdots \nu_q} \quad (264)$$

が得られる.

このため以上の方法で新たに作られたテンソルの種類は上下の添字の個数から期待される通りのものとなる. しかし逆に, 複数の添字を持つ量がテンソルであるとは限らない. なお  $\frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu}$  が座標  $x$  に依る場合, 反変ベクトル  $V^\alpha$  に対して  $\partial_\beta V^\alpha$  を単に共変ベクトル  $\partial_\beta$  との積と見てこれを  $(1, 1)$  テンソルであると結論することができなくなる. 実際,  $\partial_\beta V^\alpha$  は

$$\partial_\beta V^\alpha = \left( \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\beta} \partial_\mu \right) \left( \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\nu} V^\nu \right) = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\beta} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\nu} \partial_\mu V^\nu + \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\beta} \left( \partial_\mu \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\nu} \right) V^\nu \quad (265)$$

と変換する [4, pp.264-265].

■商の定理 反変ベクトル  $A^\lambda$  に対して  $Q_{\mu\nu} = A^\lambda P_{\lambda\mu\nu}$  が 2 階共変テンソルとなるためには,  $P_{\lambda\mu\nu}$  が 3 階共変テンソルであれば良いことを我々は学んだ. 実はこのとき,  $P_{\lambda\mu\nu}$  は 3 階共変テンソルでなければならないことまで言うことができる.  $A, Q$  が他の勝手な種類のテンソルである場合にも, 同様の論法を適用できる (商の定理) [20, p.24].

■対称な量と反対称な量の“縮約” 一般に添字  $\alpha, \beta$  について対称な量  $A^{\alpha\beta} = A^{\beta\alpha}$  と反対称な量  $B_{\alpha\beta} = -B_{\beta\alpha}$  (テンソルでなくても良い) に対して  $A^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta}$  は

$$\begin{aligned} A^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} &= \sum_{\alpha > \beta} (A^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} + A^{\beta\alpha} B_{\beta\alpha}) \quad (\because \alpha = \beta \Rightarrow B_{\alpha\beta} = 0) \\ &= \sum_{\alpha > \beta} A^{\alpha\beta} (B_{\alpha\beta} - B_{\alpha\beta}) = 0 \end{aligned} \quad (266)$$

となって消える.

## A.2 世界間隔と計量テンソル

時空には無限に近い 2 点の世界間隔  $ds$  が定義される.  $ds$  は値が用いている座標系に依らずに時空の幾何学だけで決まる量, 従ってスカラーである. これは座標系  $\{x^\mu\}$  で測った 2 点の座標の差  $dx^\mu$  の 2 次形式

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

で表される ( $ds = \sqrt{g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}$ ). 座標の微分  $dx^\mu$  は反変ベクトルだから  $ds$  がスカラーとなるためには  $g_{\mu\nu}$  は 2 階共変テンソルでなければならない (A.1 節参照).  $g_{\mu\nu}$  を計量テンソルと呼ぶ.

反変計量テンソル  $g^{\mu\nu}$  を計量テンソル  $g_{\mu\nu}$  の逆テンソルとして定義する (以下,  $g^{\mu\nu}$  も単に計量テンソルと呼ぶ):

$$g^{\mu\alpha}g_{\alpha\nu} = \delta^\mu_\nu. \quad (267)$$

(ここで  $\delta^\mu_\nu$  は単位テンソルと見なされている. 単位行列は  $\delta^\mu_\nu$  を  $(\mu, \nu)$  成分に持つ.) テンソルの添字を上げ下げした量は  $A^\mu = g^{\mu\nu}A_\nu, A_\mu = g_{\mu\nu}A^\nu$  のように計量テンソルとの縮約で定義する [4, pp.257–258]. このとき計量テンソルとの縮約の結果得られた量も添字の位置から期待される種類のテンソルとなる (A.1 節参照).

特殊相対性理論では計量テンソルの全成分が行列の形を借りて

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

で与えられるから, 添字の上げ下げの規則は具体的には

$$A_0^1 = A^{01} = -A^0_1 = -A_{01}, \quad \text{etc.}$$

に帰す.

### A.3 固有体積要素

一般に任意の座標系で各座標が  $dx^\mu$  変化して作られる時空の体積要素は  $d^4x (\equiv dx^0 dx^1 dx^2 dx^3)$  とならない. 実際  $d^4x$  は時空の体積要素の次元を持つ保証すらない. しかし局所慣性系  $\{X^\mu\} \equiv \{cT, X, Y, Z\}$  では体積要素の表式は  $d^4X (\equiv cdT dX dY dZ)$  であり,  $J \equiv \frac{\partial(X)}{\partial(x)}$  を Jacobian として任意の座標系での体積要素の表式は  $Jd^4x$  となる.

ここで計量テンソル  $g_{\mu\nu}$  は局所慣性系での成分が

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

で与えられ, 2 階共変テンソルの変換則に従うことから, 行列  $(g_{\mu\nu})$  の行列式を  $g$  として

$$g = -J^2 < 0, \quad \therefore J = \sqrt{-g}$$

が帰結される.

以上より任意の座標系で各座標が  $dx^\mu$  変化して作られる時空の体積要素の真の体積は

$$\sqrt{-g}d^4x$$

である. これを固有体積要素と呼ぶ [21, pp.188–190]. (特殊相対性理論の範囲では, これは単に  $d^4x$  である.)

なお上式  $J = \sqrt{-g}$  は, 因子  $\sqrt{-g(x)} \left( = \frac{\partial(X)}{\partial(x)} \right)$  がスカラー密度の変換則  $\sqrt{-g'} = \frac{\partial(x)}{\partial(x')} \sqrt{-g}$  に従うことを含意している (A.1 節). したがってスカラー場  $S$  との積  $S\sqrt{-g}$  もまたスカラー密度である. これをスカラー密度と呼ぶのは, 積分

$$\int S\sqrt{-g}d^4x$$

が不変量となるからである. 任意のテンソル場  $T^{\mu\nu\dots}$  に対して  $T^{\mu\nu\dots}\sqrt{-g}$  と同じ変換則に従う量を同様にテンソル密度と呼ぶけれど (A.1 節), 積分

$$\int T^{\mu\nu\dots}\sqrt{-g}d^4x$$

をテンソルと見なせるのは, 積分範囲が小さい場合に限られることに注意しなければならない. と言うのもテンソルの変換則 (変換係数の値) は時空点ごとに異なるので, 異なる時空点でのテンソルの和は一般にテンソルとはならないからである [18, p.130] [20, p.82].

#### A.4 完全反対称テンソル $E^{\lambda\mu\nu\rho}$ , 完全反対称テンソル密度 $\mathbf{E}^{\lambda\mu\nu\rho}$

$\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}$  を局所慣性系  $\{X^\mu\}$  で  $\varepsilon^{0123} = 1$  となる添字に関して完全反対称な量とする.

このときこれを 4 階反変テンソルの変換則

$$E^{\lambda\mu\nu\rho} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial X^\alpha} \frac{\partial x^\mu}{\partial X^\beta} \frac{\partial x^\nu}{\partial X^\gamma} \frac{\partial x^\rho}{\partial X^\delta} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$$

に従って任意の座標系  $\{x^\mu\}$  に変換した量は  $E^{\lambda\mu\nu\rho} = \frac{\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}}{\sqrt{-g}}$  である [4, pp.258–259].

一方, これを 4 階反変テンソル密度の変換則

$$\mathbf{E}^{\lambda\mu\nu\rho} = \frac{\partial(X)}{\partial(x)} \frac{\partial x^\lambda}{\partial X^\alpha} \frac{\partial x^\mu}{\partial X^\beta} \frac{\partial x^\nu}{\partial X^\gamma} \frac{\partial x^\rho}{\partial X^\delta} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$$

に従って任意の座標系  $\{x^\mu\}$  に変換した量は  $\mathbf{E}^{\lambda\mu\nu\rho} = \varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}$  となり, 座標系に依らず  $\mathbf{E}^{0123} = 1$  となる [18, pp.62–63].

## 付録 B 粒子系に関する対称性と保存則

2.4 節では場の理論に関してのみ、対称性と保存則の関係を調べた。ここでは粒子系に関する対称性と保存則の関係を (古典論の水準で) まとめる (証明は割愛する)。

一般座標  $q = \{q_1, q_2, \dots\}$  で空間的な配置が指定されるような物体の系から始めよう。ラグランジアンに陽に含まれない座標  $q_i$  を循環座標と呼ぶ。簡単な場合には、系の対称性は循環座標の存在によって表される。例えば系が  $x$  方向への平行移動に関して対称であれば、ラグランジアンは  $x$  座標を陽に含まないと期待できる。一般に座標  $q_i$  に共役な一般運動量

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

を定義すると、循環座標  $q_i$  に共役な運動量  $p_i$  は保存することが分かる。実際、運動方程式 (Lagrange 方程式)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

により

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

である (最後の等号で  $q_i$  が循環座標であることを用いた) [16, p.37]。

系がある変換に関して対称性を持つためには、ラグランジアンが不変であれば十分である。しかしながら系の対称性とは運動方程式の不変性のことであって、そのためにはラグランジアンまでもが対称変換に対して不変である必要はない。実際、同一の運動方程式を与えるラグランジアンは無数にあり、ラグランジアンには座標と時間の任意関数  $f(q, t)$  の全微分  $df/dt$  を付け加えるだけの不定性がある [16, pp.4-5]。とは言え以下で見ると、いくつかの重要な保存量はラグランジアンの不変性から導かれる (もちろん実際にラグランジアンが不変であるかは、個々の系の具体的なラグランジアンに対して確かめられる)。

まず、時間並進対称性を持つ系を考える。このとき系のラグランジアンは時刻  $t$  を陽に含まず、座標  $q$  と一般速度  $\dot{q}$  を通してのみ時間に依存すると期待できる。すると運動方程式 (Lagrange 方程式) から、エネルギーと呼ばれる量

$$E = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \quad (268)$$

が保存することが導かれる [16, pp.16]。これは系のハミルトニアンを速度  $\dot{q}$  の関数として表したものに他ならない。

次に系の対称変換として、連続パラメーター  $\lambda$  によって特徴づけられる変換  $q_i \rightarrow \Phi_i(\lambda; q)$  を考える。ただしこれは恒等変換と連続的につながっており、 $\Phi(0; q) = q$  とする ( $\Phi \equiv \{\Phi_1, \Phi_2, \dots\}$ )。もしこの変換に対してラグランジアンが不変であれば、モーメント関数と呼ばれる量

$$F = \sum_i f_i p_i$$

が保存することが示される。ここに  $f_i \equiv d\Phi_i/d\lambda|_{\lambda=0}$  である。この命題を Noether の定理という [19, pp.122-123]。

特に 3 次元 Euclid 空間の質点系を考え、 $a$  番目の粒子の位置ベクトルを  $\mathbf{r}_a = (x_{1a}, x_{2a}, x_{3a})$  とする。一般座標  $q_i$  の添字はここでは、空間方向の添字  $i = 1, 2, 3$  と粒子番号  $a$  の組に対応する。粒子  $a$  の運動量は  $\mathbf{p}_a = \partial L / \partial \dot{\mathbf{r}}_a = (p_{1a}, p_{2a}, p_{3a})$  である。

系が単位ベクトル  $\mathbf{n}$  の方向に並進対称性を持つとする。  $\mathbf{n}$  方向への系の平行移動は

$$\mathbf{r}_a \rightarrow \mathbf{r}_a + \lambda \mathbf{n}$$

と書けるので  $f_{ia} = n_i$  と同定される。 よって対応する保存量は

$$F = \sum_{i,a} f_{i,a} p_{ia} = \sum_i n_i \sum_a p_{ia} = \mathbf{n} \cdot \sum_a \mathbf{p}_a$$

となる。 これは全運動量  $\mathbf{P} = \sum_a \mathbf{p}_a$  の  $\mathbf{n}$  方向成分となっている。 このように運動量とは、系の並進対称性から導かれる保存量に他ならない。

また系が単位ベクトル  $\mathbf{n}$  の周りに回転対称性を持つとする。  $\mathbf{n}$  を軸とする系の回転は、回転角を  $\theta$  として

$$\mathbf{r}_a \rightarrow \mathbf{r}_a + \theta \mathbf{n} \times \mathbf{r}_a, \quad \therefore x_{ia} \rightarrow x_{ia} + \theta \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} n_j x_{ka}$$

と表されるから ( $\varepsilon_{ijk}$  は添字に関して反対称な Levi-Civita 記号であり,  $\varepsilon_{123} = 1$ ),  $f_{ia} = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} n_j x_{ka}$  と同定される。 よって対応する保存量は

$$F = \sum_{i,a} f_{i,a} p_{ia} = \sum_{i,j,k,a} \varepsilon_{ijk} n_j x_{ka} p_{ia} = \mathbf{n} \cdot \sum_a \mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a$$

となる。 最右辺における  $\mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a$  は  $a$  番目の粒子の (軌道) 角運動量と呼ばれ、この結果は全角運動量  $\mathbf{M} = \sum_a \mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a$  の  $\mathbf{n}$  方向成分が保存することを意味している [19, p.124].

無限小の Lorentz 変換は、反対称な無限小パラメータ  $\varepsilon^{\mu\nu} (= -\varepsilon^{\nu\mu})$  を用いて

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu, \quad \delta x^\mu = x_\nu \varepsilon^{\mu\nu}$$

と表される (2.4 節の式 (39) を参照).

パラメータ  $\varepsilon^{\mu\nu}$  の意味  $x^1$  方向の等速推進に対する Lorentz 変換は

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad (\beta \equiv V/c, \gamma \equiv 1/\sqrt{1-\beta^2})$$

と表される。 小さな  $\beta$  を想定すると  $\gamma = 1 + O(\beta^2)$ ,  $\beta\gamma = \beta + O(\beta^3)$  なので、変換係数は

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\beta & 0 & 0 \\ -\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv (\delta^\mu_\nu) + (\varepsilon^\mu_\nu)$$

となる。 これは無限小パラメータ  $\varepsilon^\mu_\nu$  を  $\varepsilon^0_1 = \varepsilon^1_0 = -\beta$ , その他の  $\varepsilon^\mu_\nu = 0$  と選んだ場合に対応している。 (添字を上げると  $\varepsilon^{10} = -\varepsilon^{01} = \beta$ , その他の  $\varepsilon^{\mu\nu} = 0$ .) 同様に成分  $\varepsilon^0_2 (= \varepsilon^2_0)$ ,  $\varepsilon^0_3 (= \varepsilon^3_0)$  はそれぞれ  $x^2, x^3$  方向の等速推進に関係付けられる。 逆に無限小変換の行列の指数をとると,  $\tanh \psi = -\beta$  なる有限の “回転角”  $\psi$  を持つ Lorentz 変換の変換係数

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & \psi & 0 & 0 \\ \psi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \psi & \sinh \psi & 0 & 0 \\ \sinh \psi & \cosh \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

が得られる。

次に  $x^1x^2$  面内での空間回転は、回転角を  $\theta$  として

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

と表される。小さな  $\theta$  を想定すると、変換係数は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta & 0 \\ 0 & -\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv (\delta^\mu_\nu) + (\varepsilon^\mu_\nu)$$

となる。これは無限小パラメーター  $\varepsilon^\mu_\nu$  を  $\varepsilon^{12} = -\varepsilon^{21} = \theta$ 、その他の  $\varepsilon^\mu_\nu = 0$  と選んだ場合に対応している。(添字を上げると  $\varepsilon^{12} = -\varepsilon^{21} = -\theta$ 、その他の  $\varepsilon^{\mu\nu} = 0$ 。) 同様に成分  $\varepsilon^2_3 (= -\varepsilon^3_2)$ ,  $\varepsilon^3_1 (= \varepsilon^1_3)$  はそれぞれ  $x^2x^3$  面内,  $x^3x^1$  面内の空間回転に関係付けられる。逆に無限小変換の行列の指数をとると、有限の回転角  $\theta$  の回転行列

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta & 0 \\ 0 & -\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

が得られる。

4次元時空における回転対称性を考えれば、角運動量の相対論的な表現が得られる [4, pp.45–47] [22, p.170]. 無限小の Lorentz 変換 (39) に対するラグランジアンの不変性を要求すると、粒子系の角運動量 4 元テンソル

$$M^{\mu\nu} \equiv \sum (x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu) = -M^{\nu\mu}$$

の保存が導かれる。ただし  $\sum$  は粒子に関する和であり、ここでは粒子番号の添字  $a$  を省略している。また  $p^\mu = (\mathcal{E}/c, \mathbf{p})$  は各粒子のエネルギー  $\mathcal{E}$  と (正準) 運動量  $\mathbf{p}$  から成る 4 元運動量ベクトルである。 $M^{\mu\nu}$  の空間成分は通常の角運動量

$$M^{ij} = \varepsilon^{ijk} M_k, \quad M_k = \left[ \sum \mathbf{r} \times \mathbf{p} \right]_k$$

を与える ( $\varepsilon^{ijk}$  は添字に関して反対称な Levi-Civita 記号であり,  $\varepsilon^{123} = 1$ ).  $\mu = \nu = 0$  の時間成分は、反対称性より  $M^{00} = 0$  である。新たに現れた保存する角運動量成分

$$M^{0i} = \left[ c \sum \left( t\mathbf{p} - \frac{\mathcal{E}\mathbf{r}}{c^2} \right) \right]^i$$

の意味を解釈しよう。閉じた系は回転対称性だけでなく時間並進対称性を持つ。そこで全エネルギー  $\sum \mathcal{E}$  の保存と併せると、相対論的な慣性中心  $\mathbf{R} \equiv \frac{\sum \mathcal{E}\mathbf{r}}{\sum \mathcal{E}}$  は一様な運動をすることが分かる：

$$\mathbf{R} = \mathbf{V}t + \text{const.}, \quad \mathbf{V} = \frac{\sum c^2 \mathbf{p}}{\sum \mathcal{E}}.$$

非相対論的極限では  $\mathcal{E} \simeq mc^2$  なので ( $m$  は各粒子の質量) これらは通常の質量中心 (重心) とその速度

$$\mathbf{R} \simeq \frac{\sum m\mathbf{r}}{\sum m}, \quad \mathbf{V} \simeq \frac{\sum m\mathbf{v}}{\sum m}.$$

に移行する。

■対称性と保存則, まとめ 無限小の Lorentz 変換

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^{\mu\nu} x_\nu + \varepsilon^\mu$$

に関する対称性と保存則の関係は, 粒子系と場の系を併せて以下のようにまとめられる.

- 時空内の推進 (並進) 操作 ( $\varepsilon^\mu$ ) に関する対称性
  - 空間並進  $\rightarrow$  運動量の保存
  - 時間並進  $\rightarrow$  エネルギーの保存
- 回転操作 ( $\varepsilon^{\mu\nu}$ ) に関する対称性
  - 空間内の回転  $\rightarrow$  角運動量の保存
  - 時空内の回転, すなわち等速推進 (Lorentz ブースト)
    - $\rightarrow$  (粒子系の) 重心 (エネルギー中心) の等速度運動 (エネルギー・運動量保存則の下で)
- (ある種の) ゲージ対称性  $\rightarrow$  電荷保存則

エネルギー・運動量テンソル [4, pp.301-304]

以上では特殊相対性理論の範囲で, エネルギー・運動量テンソルの一般公式 (37) を導いた. 一般相対性理論では, 作用は

$$S = \frac{1}{c} \int \mathcal{L} \sqrt{-g} d^4x$$

という形をとる ( $\sqrt{-g}d^4x$  は固有体積要素 (本稿の付録 A.3), 慣性系で  $\sqrt{-g} = 1$ ). ただしここでの作用  $S$  は, 力学変数  $g^{\mu\nu}(x)$  を記述する項 (重力場項) を含まないものとしておく. ここで作用がスカラーであり, 無限小の座標変換

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu \quad (269)$$

に対して不変であることを要求すると\*48, 保存則

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \quad (270)$$

が導かれる (「;」は共変微分を表す). ここに  $T^{\mu\nu}$  は, 計量テンソル  $g^{\mu\nu}$  の変分  $\delta g^{\mu\nu}$  に伴う作用の変化

$$\delta S = \frac{1}{c} \int \left\{ \frac{\partial \Lambda}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial \Lambda}{\partial (\partial_\lambda g^{\mu\nu})} \delta (\partial_\lambda g^{\mu\nu}) \right\} d^4x = \frac{1}{c} \int \left\{ \frac{\partial \Lambda}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial \Lambda}{\partial (\partial_\lambda g^{\mu\nu})} \right\} (\delta g^{\mu\nu}) d^4x$$

(ただし  $\Lambda \equiv \mathcal{L} \sqrt{-g}$ ) において

$$T_{\mu\nu} \equiv \frac{2}{\sqrt{-g}} \left\{ \frac{\partial \Lambda}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial \Lambda}{\partial (\partial_\lambda g^{\mu\nu})} \right\} \quad (271)$$

で定義される対称テンソルである. 従ってこれは  $g^{\mu\nu}, \partial_\lambda g^{\mu\nu}$  による微分が  $g^{\nu\mu}, \partial_\lambda g^{\nu\mu}$  を固定して行われることを意味する.

保存則 (270) は一般座標変換 (269) に関する対称性から導かれていることを踏まえると, 上式 (271) の  $T_{\mu\nu}$  は (重力場を含まない物理系の) エネルギー・運動量テンソルを与えると期待できる (定数係数の違いはあり得るにしても). 実際に電磁場の系に対して上式 (271) に基づいて計算したエネルギー・運動量テンソルが, 平

\*48 この条件は最小作用原理から導かれる運動方程式が, 任意の座標系で成り立つことを保証する (十分条件).

平坦な時空において一般公式 (37) と等価な結果を与えることから、この解釈を正当化することができる。(上式 (271) の  $T_{\mu\nu}$  はエネルギー・運動量テンソルそのものであり、定数係数は 1 であることが同時に分かる。)

公式 (271) には最初から対称なエネルギー・運動量テンソルが得られるという利点がある。重力がない場合にもエネルギー・運動量テンソルを計算するのに、形式的に公式 (271) を利用できる。

**注意** 上式 (270):  $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$  は厳密な意味での保存則ではない。と言うのも、 $\int T^{\mu 0} \sqrt{-g} d^3x$  が保存するための連続の式は  $\partial_\nu(\sqrt{-g} T^{\mu\nu}) = 0$  であって、式 (270) ではない。これは重力場もエネルギーと運動量を担うため、重力場を除く物理系のエネルギー・運動量保存則は近似的にしか成り立たないことに関係している [4, p.313] [20, p.95].

## 付録 C 場の Lorentz 変換とスピノル・Dirac 場

本章では Lorentz 変換に対する場の変換則を論じる。スピン 1/2 の粒子を記述するスピノル場の変換則から Dirac 場を導入することが目的であり、過度に一般的な内容には踏み入らない。

### C.1 場の Lorentz 変換とスピノル (要点)

#### C.1.1 無限小変換 [10, pp.4-5]

Lorentz 変換  $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$  における変換係数は、無限小変換に対しては

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \varepsilon^{\mu}_{\nu}$$

という形をとる。ここに  $\varepsilon_{\mu\nu}$  は添字に関して反対称な無限小パラメーターである (2.4 節)。(μ, ν) 成分

$$(M_{\rho\sigma})^{\mu}_{\nu} \equiv i(\delta^{\mu}_{\rho} g_{\sigma\nu} - \delta^{\mu}_{\sigma} g_{\rho\nu}) \quad (272)$$

を持つ 4 × 4 行列  $M_{\rho\sigma} (= -M_{\sigma\rho})$  を定義すると、無限小 Lorentz 変換は

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon^{\mu}_{\nu} x^{\nu} = \left(1 - \frac{i}{2} \varepsilon^{\rho\sigma} M_{\rho\sigma}\right)^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$$

と書き直され (最右辺の 1 は 4 × 4 の単位行列), これを繰り返し合成して得られる有限の変換は

$$x'^{\mu} = \left[ \exp\left(-\frac{i}{2} \varepsilon^{\rho\sigma} M_{\rho\sigma}\right) \right]^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$$

と表される。

有限の変換と無限小変換 一般に連続変数  $\{\alpha_k\}$  によって特徴付けられ、 $\alpha_k \rightarrow 0$  で恒等変換と連続的につながっている連続変換の演算子として、unitary 演算子

$$U = e^{i\alpha_k T_k}$$

の形を考える。  $T_k$  は生成子と呼ばれ、  $U$  の unitary 性より Hermite 演算子でなければならない。具体例として量子力学における平行移動の演算子  $e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{a}/\hbar}$ , 時間発展演算子  $e^{-iHt/\hbar}$ , 空間回転の演算子  $e^{-i\mathbf{J}\cdot\mathbf{n}\phi/\hbar}$  を挙げることができる (ここでは  $\hbar$  を明示した)。無限小変換を想定すると  $U \simeq 1 + i\alpha_k T_k$  である。逆にもとの有限パラメーター  $\alpha_k$  による変換は、無限小パラメーター  $\alpha_k/N$  (ただし  $N \gg 1$ ) による変換を  $N$  回合成することで

$$\left(1 + \frac{i\alpha_k T_k}{N}\right)^N \rightarrow \exp(i\alpha_k T_k) \quad (N \rightarrow \infty)$$

と合成される [1, p.64].

行列  $M_{\rho\sigma}$  は交換関係

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = -i(g_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma} M_{\nu\rho} + g_{\nu\sigma} M_{\mu\rho}) \quad (273)$$

を満たす (確認は C.2.1 節).

“抽象的”な Lorentz 変換を

$$\hat{\Lambda} = \exp\left(-\frac{i}{2} \varepsilon^{\rho\sigma} \hat{M}_{\rho\sigma}\right) \quad (274)$$

と書いたときの“生成子”  $\hat{M}_{\rho\sigma} (= -\hat{M}_{\sigma\rho})$  は、その  $x^{\mu}$  の上での表現行列  $M_{\rho\sigma}$  と同じ交換関係

$$[\hat{M}_{\mu\nu}, \hat{M}_{\rho\sigma}] = -i(g_{\mu\rho} \hat{M}_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho} \hat{M}_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma} \hat{M}_{\nu\rho} + g_{\nu\sigma} \hat{M}_{\mu\rho}) \quad (275)$$

を満たさなければならない\*49\*50\*51.

### C.1.2 場の Lorentz 変換 [10, pp.5-6]

慣性系  $O$  から  $O'$  への Lorentz 変換  $\Lambda$  に対して, 同一の点の座標が  $x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$  と変化するものとする. 一般に  $N$  成分の場  $\varphi_i(x)$  を考えると ( $i = 1, \dots, N$ ), 2つの系  $O, O'$  で見た同一の点における場の値  $\varphi_i(x), \varphi'_i(x')$  の間には線形関係

$$\varphi'_i(x') = D(\Lambda)_i{}^j \varphi_j(x)$$

が期待される. 係数  $D(\Lambda)_i{}^j$  は Lorentz 変換  $\Lambda$  に応じて決まる  $N \times N$  行列  $D(\Lambda)$  を形成する.  $N$  成分  $\varphi_i(x)$  を縦に並べたベクトル  $\varphi(x)$  を定義すれば, 行列表記で  $\varphi'(x') = D(\Lambda)\varphi$  と書ける.

ここで  $D(\Lambda)$  は群を成すことを説明する. 同一の点の座標がそれぞれ  $x^\mu, x'^\mu, x''^\mu$  であり, 場の値がそれぞれ  $\varphi, \varphi', \varphi''$  であるような3つの慣性系  $O, O', O''$  を改めて用意し,  $O-O'$  間の Lorentz 変換を  $\Lambda_1$ ,  $O'-O''$  間の Lorentz 変換を  $\Lambda_2$  で表す. すると場の変換則は

$$\varphi''(x'') = D(\Lambda_2)\varphi'(x') = D(\Lambda_2)D(\Lambda_1)\varphi(x)$$

であり, 最右辺の係数  $D(\Lambda_2)D(\Lambda_1)$  は  $O$  から  $O''$  への Lorentz 変換  $\Lambda_2\Lambda_1$  に対する変換係数に相当する:

$$D(\Lambda_2\Lambda_1) = D(\Lambda_2)D(\Lambda_1).$$

こうして Lorentz 変換  $\Lambda$  の全体が Lorentz 群を成すのに対応して, 行列  $D(\Lambda)$  の全体もまた群を成す. そして上式を満たす行列  $D(\Lambda)$  は Lorentz 群の表現と呼ばれる.

場の変換係数  $D(\Lambda)$  は Lorentz 群の表現でなければならないため, Lorentz 群の (既約) 表現をすべて見出せば\*52, あらゆる可能な場のタイプを尽くすことができる. (Lorentz 群のどの表現に従って変換するかが, 場のタイプを決める.)

### C.1.3 Lorentz 群の表現 [10, pp.6-8]

Lorentz 変換の生成子  $\hat{M}_{\mu\nu}$  の表現を  $S_{\mu\nu} = D(\hat{M}_{\mu\nu})$  と書くと ( $N \times N$  行列), 有限 Lorentz 変換 (274):  $\hat{\Lambda} = \exp\left(-\frac{i}{2}\varepsilon^{\mu\nu}\hat{M}_{\mu\nu}\right)$  には表現行列

$$D(\hat{\Lambda}) = \exp\left(-\frac{i}{2}\varepsilon^{\mu\nu}S_{\mu\nu}\right) \quad (276)$$

\*49 Lorentz 群は原点の移動を含まない線形変換  $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$  から成る. 変換係数の行列式  $\Lambda \equiv |\Lambda^\mu{}_\nu|$  は  $\Lambda = \pm 1$  のいずれかである (付録 A.3 の式  $J^2 = -g$  は Lorentz 変換に対して  $\Lambda^2 = 1$  を意味するから). また計量テンソルの変換則  $g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma = g_{\rho\sigma}$  の  $\rho = \sigma = 0$  成分を考えると  $\Lambda^0{}_0 = \pm\sqrt{1 + (\Lambda^i{}_0)^2}$  だから,  $\Lambda^0{}_0 \geq 1$  または  $\Lambda^0{}_0 \leq -1$  である. 空間反転・時間反転を含まない Lorentz 変換は特に本義 Lorentz 変換と呼ばれ,  $\Lambda = +1$  かつ  $\Lambda^0{}_0 \geq 1$  の場合に対応する [18, pp.36-42] [10, pp.2-3].

\*50 本義 Lorentz 変換は恒等変換と連続的に繋がる群を成し, その条件  $\det(\Lambda^\mu{}_\nu) = +1$  により, この群は  $SO(3, 1)$  と書かれる. 元  $\hat{\Lambda}$  は言わば個々の Lorentz 変換の“名前”である.  $\hat{M}_{\rho\sigma}$  がある表現行列  $M_{\rho\sigma}$  と同じ交換関係を満たすのは, 群の表現がその定義により, 元と同じ掛け算則を満たすことによる.

\*51 微分演算子  $M_{\mu\nu} = x_\nu\partial_\mu - x_\mu\partial_\nu$  もまた交換関係 (275) を満たすことが確かめられるので, Lorentz 群の生成子となる [8, p.226]. これは運動量演算子  $p_\mu = i\hbar\partial_\mu$  に対して, Lorentz 対称性に付随する保存量に他ならない 4 元角運動量  $M_{\mu\nu}$  (2.4 節と付録 B) の演算子が Lorentz 変換を生成することを意味する.

\*52 既約な場の組は互いに変換し合い, その数は場の適当な線形結合を作ることで減らすことができない [2, p.91,208]. 実際ブロック対角な表現行列の既約な各ブロック  $D_i$  は, 基底の変更 (相似変換) によりさらに細かいブロックに分割することはできない. もしできたとしても, 部分表現  $D_i$  が作用するベクトル  $\mathbf{v}_i$  はその中に不変部分空間を持つことになり, 定義より可約となるからである [23, pp.5-6]. (ただし逆に可約な (すなわち不変部分空間を持つ) 行列が, 常にブロック対角な形にできる (完全可約である) とは限らないことに注意する.)

が対応する。よって Lorentz 群の表現  $D(\hat{\Lambda})$  を求めるには、 $S_{\mu\nu}$  を求めれば良い。ところが  $S_{\mu\nu}$  は  $\hat{M}_{\mu\nu}$  の交換関係 (275) と同様の交換関係を満たさなければならない。ここで  $\hat{M}_{\mu\nu}$  の各成分を

$$J_i \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\hat{M}^{jk}, \quad K_i \equiv \hat{M}_{i0}(= -\hat{M}_{0i})$$

と書いて演算子  $\mathbf{J} = (\hat{M}_{23}, \hat{M}_{31}, \hat{M}_{12})$ ,  $\mathbf{K}$  を定義すると\*53,  $\hat{M}_{\mu\nu}$  の交換関係 (275) は  $J_i, K_i$  に対する交換関係

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k, \quad [J_i, K_j] = i\varepsilon_{ijk}K_k, \quad [K_i, K_j] = -i\varepsilon_{ijk}J_k \quad (277)$$

に焼き直される (確認は C.2.2 節)。さらに新たな演算子

$$\mathbf{A} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{J} + i\mathbf{K}), \quad \mathbf{B} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{J} - i\mathbf{K})$$

を定義すると、これらは ( $\hbar$  を単位として無次元化した) 角運動量の交換関係

$$[A_i, A_j] = i\varepsilon_{ijk}A_k, \quad [B_i, B_j] = i\varepsilon_{ijk}B_k, \quad [A_i, B_j] = 0 \quad (278)$$

を満たす (確認は C.2.2 節)。よって固有値  $A, B$  は整数または半整数であり、それらの組  $(A, B)$  に応じて  $A_3, B_3$  の固有値  $a, b$  はそれぞれ  $(2A+1)$  および  $(2B+1)$  通りの値

$$a = -A, -A+1, \dots, A-1, A, \quad b = -B, -B+1, \dots, B-1, B$$

が可能である。よって固有値  $(A, B)$  で指定される Lorentz 群の表現に対応する場は  $(2A+1)(2B+1)$  成分場

$$\varphi_{a,b}^{(A,B)}(x)$$

である。これで可能な既約な場のタイプをすべて見出したことになる\*54。

#### C.1.4 $SL(2, \mathbf{C})$ スピノル [10, pp.8-9]

最も簡単な表現として  $(A, B) = (0, 1/2)$  および  $(A, B) = (1/2, 0)$  の場合を考えよう。

まず表現  $(A, B) = (0, 1/2)$  に対する場  $\varphi_{a,b}^{(A,B)}(x)$  は 2 成分である ( $a = 0, b = \pm 1/2$ )。そのような場を  $\xi_\alpha(x)$  ( $\alpha = 1, 2$ ) と表記しよう。非相対論的量子力学で学んだように、このとき  $\xi_\alpha$  の上での、 $\mathbf{A}$ -スピン、 $\mathbf{B}$ -スピンの表現は

$$D(\mathbf{A}) = 0, \quad D(\mathbf{B}) = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \quad (\boldsymbol{\sigma} : \text{Pauli 行列})$$

で与えられることになる (第 2 式は 3 本の関係式  $D(B_i) = \frac{\sigma_i}{2}$ ,  $i = 1, 2, 3$  をまとめて書いている)。ここから  $\mathbf{J}, \mathbf{K}$  の表現は

$$D(\mathbf{J}) = D(\mathbf{A}) + D(\mathbf{B}) = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}, \quad D(\mathbf{K}) = -i\{D(\mathbf{A}) - D(\mathbf{B})\} = i\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}$$

となる。有限 Lorentz 変換 (274):  $\hat{\Lambda} = \exp\left(-\frac{i}{2}\varepsilon^{\mu\nu}\hat{M}_{\mu\nu}\right)$  は、パラメーター  $\varepsilon^{\mu\nu}$  が

$$(\varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}, \varepsilon_{12}) = -\boldsymbol{\theta}, \quad (\varepsilon_{10}, \varepsilon_{20}, \varepsilon_{30}) = \boldsymbol{\omega}$$

\*53 それぞれ空間回転と等速推進 (Lorentz ブースト) を生成する。実際、付録 B で見たように、空間回転と等速推進に対する変換行列はそれぞれ、 $M_{12}$  や  $M_{01}$  を生成子とする指数で与えられる。

\*54 Lorentz 群の Lie 代数  $\{J_i, K_i\}$  の適当な線形結合をとり直すと、互いに可換な  $SU(2)$  の Lie 代数 (角運動量代数) の元  $A_i, B_i$  が得られることは、 $J_i$  と  $K_i$  の張る Lie 代数が 2 つの  $SU(2)$  の Lie 代数の直和になることを意味している。したがって  $J_i$  と  $K_i$  の生成する変換は、直積  $SU(2) \otimes SU(2)$  となる [8, p.80, pp.220-221, p.240]。

で与えられるとき,

$$\hat{\Lambda} = \exp(i\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{J} + i\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{K})$$

と書ける<sup>\*55</sup>. よって表現行列 (276):  $D(\hat{\Lambda}) = \exp\left(-\frac{i}{2}\varepsilon^{\mu\nu}D(\hat{M}_{\mu\nu})\right)$  は今の場合,  $(\alpha, \beta)$  成分

$$a_{\alpha}^{\beta} = [\exp\{i\boldsymbol{\theta} \cdot D(\mathbf{J}) + i\boldsymbol{\omega} \cdot D(\mathbf{K})\}]_{\alpha}^{\beta} = \left[\exp\left(i\boldsymbol{\theta} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} - \boldsymbol{\omega} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right)\right]_{\alpha}^{\beta} \quad (279)$$

を持つ  $2 \times 2$  行列  $a = (a_{\alpha}^{\beta})$  になる. 行列  $a$  は  $\det a = 1$  を満たす (証明は C.2.3 節). そして実数パラメーター  $\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega}$  を変化させると  $a$  は  $2 \times 2$  の複素数の行列全体を動くから,  $SL(2, \mathbf{C})$  群を成す<sup>\*56</sup>.  $(0, 1/2)$  表現における場  $\xi_{\alpha}(x)$  は Lorentz 変換に際して, この  $a_{\alpha}^{\beta}$  によって

$$\xi'_{\alpha}(x') = a_{\alpha}^{\beta} \xi_{\beta}(x) \quad (280)$$

と変換されるため,  $SL(2, \mathbf{C})$  群の  $\mathbf{2}$  スピノルと呼ばれる.

次に点付きスピノル  $\eta_{\dot{\alpha}}(\dot{\alpha} = 1, 2)$  を,  $\xi_{\alpha}$  の複素共役  $(\xi_{\alpha})^*$  と同様に変換する量として導入する. すなわち  $a^*_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \equiv (a_{\alpha}^{\beta})^*$  と表記すると,

$$(\xi'_{\alpha})^*(x') = (a_{\alpha}^{\beta})^* \xi_{\beta}^*(x) \quad \rightarrow \quad \eta'_{\dot{\alpha}}(x') = a^*_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \eta_{\dot{\beta}}(x). \quad (281)$$

この変換則に従う量  $\eta_{\dot{\alpha}}$  を  $SL(2, \mathbf{C})$  群の  $\mathbf{2}^*$  スピノルと呼ぶ. これが表現  $(A, B) = (1/2, 0)$  の場合の場であることを説明できる (理由は C.2.3 節).

非相対論的量子力学においてスピン  $1/2$  の粒子の波動関数は, 空間回転の際に  $SU(2)$  群のユニタリー・ユニモジュラー行列  $e^{-i\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}\phi/2}$  で変換される  $2$  成分スピノルであったことから類推すると, Lorentz 変換に対してスピン  $1/2$  の粒子は  $SL(2, \mathbf{C})$  群の  $\mathbf{2}$  スピノル  $\xi_{\alpha}(x)$  および  $\mathbf{2}^*$  スピノル  $\eta_{\dot{\alpha}}(x)$  によって記述されることが自然である<sup>\*57</sup>.

### C.1.5 スピノル算法 [10, pp.9–13]

■添字の上げ下げ  $2$  階反対称テンソル  $\epsilon^{\alpha\beta} \equiv \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \equiv \epsilon_{\alpha\beta} \equiv \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$  (ただし  $\epsilon^{12} = 1$ ) を不変量として導入することができる<sup>\*58</sup>. 行列表記では

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} (= i\sigma_2)$$

<sup>\*55</sup> 実際,

$$\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}\hat{M}^{\mu\nu} = (\varepsilon_{23}\hat{M}^{23} + \varepsilon_{31}\hat{M}^{31} + \varepsilon_{12}\hat{M}^{12}) + (\varepsilon_{10}\hat{M}^{10} + \varepsilon_{20}\hat{M}^{20} + \varepsilon_{30}\hat{M}^{30}) = -\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{J} - \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{K}.$$

<sup>\*56</sup>  $SL(2, \mathbf{C})$  群は  $2$  次元複素特殊線形群とも呼ばれ, 「S」は行列式が  $1$  であることを, 「L」は線形を, 「2」は  $2$  次元を, 「C」は複素数を意味する. こうして Lorentz 群  $SO(3, 1)$  は  $1$  つの方法として,  $SL(2, \mathbf{C})$  群で表現できることになる. 実際  $SL(2, \mathbf{C})$  の Lie 代数はトレースレスの  $2$  次の複素行列だから, その独立な実数成分と同じ個数 ( $6$ ) の基底として  $D(J_i) = \sigma_i/2, D(K_i) = i\sigma_i/2$  をとることができる. これらは式 (277) と同じ交換関係を満たすから, Lorentz 群と  $SL(2, \mathbf{C})$  の Lie 代数は同型である (掛け算則が  $1$  対  $1$  に対応する). したがって群の元が Lie 代数の基底 (生成子) の指数で与えられる単位元の近くでは,  $2$  つの群の構造も同じである (局所同型 [8, p.112]). ただし群の大域的な構造は異なっており, Lorentz 変換の係数  $\Lambda^{\mu}_{\nu}$  と  $a \in SL(2, \mathbf{C})$  の対応は  $1$  対  $2$  である [8, pp.217–219] [10, pp.10–11]. (これは空間回転に関して学んだように,  $SO(3)$  と  $SU(2)$  の元が  $1$  対  $2$  に対応することとアナログスである [8, p.221].)

<sup>\*57</sup> 非相対論的理論とは対照的に, Lorentz 変換に対しては粒子の密度はスカラーではあり得ないから, スピノルの変換行列にはユニタリー性の条件は課されない [2, pp.384–385].

<sup>\*58</sup> Levi-Civita 記号である. Lorentz 変換のパラメーター  $\epsilon^{\alpha\beta}$  と区別するために,  $\epsilon$  の字体を用いている.

であり，逆行列は

$$\epsilon^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \epsilon^T = -\epsilon$$

となる．スピノルの上げ下げはこれらを用いて行う<sup>\*59</sup>．まず添字を上げる規則を

$$\xi^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta} \xi_\beta, \quad \eta^{\dot{\alpha}} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \eta_{\dot{\beta}}$$

と約束する．(これは具体的には  $\xi_1 = -\xi^2, \xi_2 = \xi^1$  を意味する．) このとき上式との整合性から，添字を下げるには  $\epsilon$  の逆を用いて

$$\xi_\alpha = (\epsilon^{-1})_{\alpha\beta} \xi^\beta = -\epsilon_{\alpha\beta} \xi^\beta, \quad \eta_{\dot{\alpha}} = (\epsilon^{-1})_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \eta^{\dot{\beta}} = -\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \eta^{\dot{\beta}}$$

としなければならない(最右辺の負号に注意)．代わりに和をとる添字を，常に「左が上，右が下」で隣り合う形

$$\xi_\alpha = \xi^\beta \epsilon_{\beta\alpha}, \quad \eta_{\dot{\alpha}} = \eta^{\dot{\beta}} \epsilon_{\dot{\beta}\dot{\alpha}}$$

に書くことにすれば，負号はあらわには現れない．

■スカラー 2つの点なしスピノル  $\xi_\alpha, \Xi_\alpha$  どうし，あるいは2つの点付きスピノル  $\eta_{\dot{\alpha}}, H_{\dot{\alpha}}$  どうしのスピノル添字を縮約した量

$$\xi^\alpha \Xi_\alpha = \epsilon^{\alpha\beta} \xi_\beta \Xi_\alpha = -\xi_\beta \Xi^\beta, \quad \eta^{\dot{\alpha}} H_{\dot{\alpha}} = -\eta_{\dot{\alpha}} H^{\dot{\alpha}} \quad (282)$$

はスカラーであることを証明できる(C.2.4節参照)．

■4ベクトル 1対の点なし・点付きスピノルから4元ベクトルが作られることを説明する．

準備として4次元化したPauli行列

$$\sigma_\mu \equiv (1, \boldsymbol{\sigma}), \quad \bar{\sigma}_\mu \equiv (1, -\boldsymbol{\sigma}) \quad (283)$$

を定義する．ただし行列の成分を指定するスピノル添字は， $(\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\beta}}, (\bar{\sigma}_\mu)^{\dot{\alpha}\beta}$  を標準位置を約束する<sup>\*60</sup>． $\sigma_\mu, \bar{\sigma}_\mu$  の満たす性質もここで触れておくのが適当である：

$$\frac{1}{2} \text{tr}(\bar{\sigma}^\mu \sigma_\nu) = \delta^\mu{}_\nu, \quad (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} (\bar{\sigma}_\mu)^{\dot{\gamma}\delta} = 2\delta^\delta{}_\alpha \delta^{\dot{\gamma}}{}_{\dot{\beta}}, \quad (284)$$

$$\sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu + \sigma_\nu \bar{\sigma}_\mu = \bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu + \bar{\sigma}_\nu \sigma_\mu = 2g_{\mu\nu}. \quad (285)$$

式(284)の確認はC.2.4節で行う．式(285)は反交換関係  $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}$  からほぼ明らかである．

さて，式(279)の行列  $a$  に対して

$$\sigma_\mu \Lambda^\mu{}_\nu = a \sigma_\nu a^\dagger \quad (286)$$

が成り立つ(導出はC.2.4節)．このためスピノルの対  $\xi_\alpha, \eta_{\dot{\beta}}$  から

$$V_\mu = \xi^\alpha (\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \eta^{\dot{\beta}} = \xi_\alpha (\epsilon^T \sigma_\mu \epsilon)^{\alpha\dot{\beta}} \eta_{\dot{\beta}} = \xi_\alpha (\bar{\sigma}_\mu^T)^{\alpha\dot{\beta}} \eta_{\dot{\beta}} \quad (287)$$

という量を作ると(第2, 第3の等号についてはC.2.4節参照)，これは4元(共変)ベクトルの変換則

$$V'_\mu = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu V_\nu$$

<sup>\*59</sup> つまりテンソルの添字の上げ下げにおいて計量テンソルが果たすのと同じ役割を，スピノルに対しては反対称テンソル  $\epsilon$  が担う．

<sup>\*60</sup>  $\bar{\sigma}_\mu$  のスピノル添字を標準位置から下ろした  $(\bar{\sigma}_\mu)_{\dot{\alpha}\beta} \equiv \epsilon_{\dot{\alpha}\gamma} \epsilon_{\beta\delta} (\bar{\sigma}_\mu)^{\dot{\gamma}\delta}$  を定義すると，これは  $\sigma_\mu$  の複素共役  $[(\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\beta}}]^*$  となる．すなわちバーはもともと複素共役の意味である．

に従って変換することになる (証明は C.2.4 節).

積  $\xi_\alpha \eta_{\dot{\beta}}$  のように変換する量  $V_{\alpha\dot{\beta}}$  を点なし・点付き混合スピノルと呼ぶ. これは 4 元ベクトル  $V_\mu$  と等価である. 実際, 以上の議論は式 (287):  $V_\mu = (\bar{\sigma}_\mu^T)^{\alpha\dot{\beta}} \xi_\alpha \eta_{\dot{\beta}} = (\bar{\sigma}_\mu)^{\dot{\beta}\alpha} \xi_\alpha \eta_{\dot{\beta}}$  において  $\xi_\alpha \eta_{\dot{\beta}} \rightarrow V_{\alpha\dot{\beta}}/2$  と置き換えた

$$V_\mu = \frac{1}{2} (\bar{\sigma}_\mu)^{\dot{\beta}\alpha} V_{\alpha\dot{\beta}}, \quad \therefore V^\mu = \frac{1}{2} (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\beta}\alpha} V_{\alpha\dot{\beta}} \quad (288)$$

が 4 元ベクトルとなることを意味している (ベクトル添字  $\mu$  はもちろん計量テンソルとの縮約で上げ下げして良い). そして上式 (288) はスピノル表示  $V_{\alpha\dot{\beta}}$  (スピノル添字) をベクトル・テンソル表示  $V_\mu$  (ベクトル・テンソル添字) に移す規則を与えている. 上式 (284) の第 2 式を用いてこれを  $V_{\alpha\dot{\beta}}$  について逆に解くと,

$$V_{\alpha\dot{\beta}} = V^\mu (\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \quad (289)$$

を得る.

■  $\sigma^{\mu\nu}$  行列の導入 ここで  $2 \times 2$  の行列  $\sigma^{\mu\nu}, \bar{\sigma}^{\mu\nu}$  を

$$(\sigma^{\mu\nu})_{\alpha}{}^{\beta} \equiv \frac{i}{2} (\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu)_{\alpha}{}^{\beta}, \quad (\bar{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \equiv \frac{i}{2} (\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu)^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \quad (290)$$

で定義する. 上式のスピノル添字の位置は標準位置のスピノル添字を持つ行列  $\sigma^\mu, \bar{\sigma}^\mu$  の積から得られる通りの構造となっており, この位置を行列  $\sigma^{\mu\nu}, \bar{\sigma}^{\mu\nu}$  のスピノル添字の標準位置と約束する. また行列  $\sigma^{\mu\nu}, \bar{\sigma}^{\mu\nu}$  は Lorentz 添字  $\mu, \nu$  に関して反対称であることが見て取れる. そしてゼロでない独立な  $\sigma^{\mu\nu}$  行列は

$$(\sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12}) = \boldsymbol{\sigma}, \quad (\sigma_{10}, \sigma_{20}, \sigma_{30}) = i\boldsymbol{\sigma} \quad (291)$$

である (確認は C.2.4 節). ところがこれらはそれぞれ,  $(0, 1/2)$  表現のスピノル  $\xi_\alpha$  上での表現行列

$$D(\mathbf{J}) = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}, \quad D(\mathbf{K}) = i \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}$$

の 2 倍となっているから,  $\xi_\alpha$  の Lorentz 変換 (280) は具体的に

$$\xi'_{\alpha}(x') = a_{\alpha}{}^{\beta} \xi_{\beta}(x) = \left[ \exp \left( -\frac{i}{4} \varepsilon^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} \right) \right]_{\alpha}{}^{\beta} \xi_{\beta}(x) \quad (292)$$

と書ける (確認は C.2.4 節, つまり Lorentz 群生成子  $\hat{M}_{\mu\nu}$  の表現は  $\sigma_{\mu\nu}/2$  に同定される). また  $\eta_{\dot{\alpha}}$  の変換則 (281) より,  $\eta'^{\dot{\alpha}}(x') = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \eta_{\dot{\beta}}(x)$  の Lorentz 変換は

$$\eta'^{\dot{\alpha}}(x') = (\epsilon a^T \epsilon^T)^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \eta^{\dot{\beta}}(x) = \left[ \exp \left( -\frac{i}{4} \varepsilon^{\mu\nu} \bar{\sigma}_{\mu\nu} \right) \right]^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \eta^{\dot{\beta}}(x) \quad (293)$$

となる (確認は C.2.4 節).

## C.2 場の Lorentz 変換とスピノル (補足)

### C.2.1 無限小変換 (補足)

■ 行列  $M_{\rho\sigma}$  の交換関係 (273) の確認 行列  $M_{\rho\sigma}$  の定義式 (272):

$$(M_{\rho\sigma})^{\mu}{}_{\nu} \equiv i(\delta^{\mu}{}_{\rho} g_{\sigma\nu} - \delta^{\mu}{}_{\sigma} g_{\rho\nu})$$

より交換子  $[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}]$  の  $(\alpha, \beta)$  成分は

$$\begin{aligned}
& ([M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma})^\alpha_\beta \\
&= (M_{\mu\nu})^\alpha_\gamma (M_{\rho\sigma})^\gamma_\beta - (M_{\rho\sigma})^\alpha_\gamma (M_{\mu\nu})^\gamma_\beta \\
&= i^2 \{ (\delta^\alpha_\mu g_{\nu\rho} - \delta^\alpha_\nu g_{\mu\rho}) (\delta^\gamma_\rho g_{\sigma\beta} - \delta^\gamma_\sigma g_{\rho\beta}) - (\mu \leftrightarrow \rho, \nu \leftrightarrow \sigma) \} \\
&= - (\delta^\alpha_\mu g_{\nu\rho} g_{\sigma\beta} - \delta^\alpha_\nu g_{\mu\rho} g_{\sigma\beta} - \delta^\alpha_\nu g_{\mu\rho} g_{\sigma\beta} + \delta^\alpha_\nu g_{\mu\sigma} g_{\rho\beta}) \\
&\quad + (\delta^\alpha_\rho g_{\sigma\mu} g_{\nu\beta} - \delta^\alpha_\rho g_{\sigma\nu} g_{\mu\beta} - \delta^\alpha_\sigma g_{\rho\mu} g_{\nu\beta} + \delta^\alpha_\sigma g_{\rho\nu} g_{\mu\beta}) \\
&= g_{\mu\rho} (\delta^\alpha_\nu g_{\sigma\beta} - \delta^\alpha_\sigma g_{\nu\beta}) - g_{\nu\rho} (\delta^\alpha_\mu g_{\sigma\beta} - \delta^\alpha_\sigma g_{\mu\beta}) - g_{\mu\sigma} (\delta^\alpha_\nu g_{\rho\beta} - \delta^\alpha_\rho g_{\nu\beta}) + g_{\nu\sigma} (\delta^\alpha_\mu g_{\rho\beta} - \delta^\alpha_\rho g_{\mu\beta}) \\
&= -i \{ g_{\mu\rho} (M_{\nu\sigma})^\alpha_\beta - g_{\nu\rho} (M_{\mu\sigma})^\alpha_\beta - g_{\mu\sigma} (M_{\nu\rho})^\alpha_\beta + g_{\nu\sigma} (M_{\mu\rho})^\alpha_\beta \}
\end{aligned}$$

と計算される。これは交換関係 (273) を意味する。

### C.2.2 Lorentz 群の表現 (補足)

■演算子  $J, K$  の交換関係 (277) の導出 Lorentz 変換の生成子  $\hat{M}_{\rho\sigma}$  が満たす交換関係 (275), および演算子  $J, K$  の定義式

$$J_i \equiv \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \hat{M}^{jk}, \quad K_i \equiv \hat{M}_{i0} (= -\hat{M}_{0i})$$

を思い出そう。すると

$$\begin{aligned}
[J_i, J_j] &= \frac{1}{4} \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{jmn} [\hat{M}^{kl}, \hat{M}^{mn}] \\
&= -\frac{i}{4} \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{jmn} (g_{km} \hat{M}_{ln} - g_{lm} \hat{M}_{kn} - g_{kn} \hat{M}_{lm} + g_{ln} \hat{M}_{km}) \\
&= \frac{i}{4} \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{jmn} (\delta_{km} \hat{M}_{ln} - \delta_{lm} \hat{M}_{kn} - \delta_{kn} \hat{M}_{lm} + \delta_{ln} \hat{M}_{km}) \\
&= \frac{i}{4} \{ (\delta_{ij} \delta_{ln} - \delta_{in} \delta_{lj}) \hat{M}_{ln} + (\delta_{ij} \delta_{kn} - \delta_{in} \delta_{kj}) \hat{M}_{kn} + (\delta_{ij} \delta_{lm} - \delta_{im} \delta_{lj}) \hat{M}_{lm} + (\delta_{ij} \delta_{km} - \delta_{im} \delta_{kj}) \hat{M}_{km} \} \\
&= \frac{i}{4} \times 4 \times (-\hat{M}_{ji}) \quad (\hat{M}_{ij} \text{ は反対称}) \\
&= i \hat{M}_{ij} \\
&= i \varepsilon_{ijk} J_k, \\
[J_i, K_j] &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ikl} [\hat{M}_{kl}, \hat{M}_{j0}] \\
&= -\frac{i}{2} \varepsilon_{ikl} (g_{kj} \hat{M}_{l0} - g_{lj} \hat{M}_{k0} - g_{k0} \hat{M}_{lj} + g_{l0} \hat{M}_{kj}) \\
&= \frac{i}{2} \varepsilon_{ikl} (\delta_{kj} \hat{M}_{l0} - \delta_{lj} \hat{M}_{k0}) \\
&= \frac{i}{2} (\varepsilon_{ijl} \hat{M}_{l0} - \varepsilon_{ikj} \hat{M}_{k0}) \\
&= i \varepsilon_{ijl} \hat{M}_{l0} \\
&= i \varepsilon_{ijk} K_k, \\
[K_i, K_j] &= [\hat{M}_{i0}, \hat{M}_{j0}] \\
&= -i (g_{ij} \hat{M}_{00} - g_{0j} \hat{M}_{i0} - g_{i0} \hat{M}_{0j} + g_{00} \hat{M}_{ij}) \\
&= -i \hat{M}_{ij} \\
&= -i \varepsilon_{ijk} J_k
\end{aligned}$$

となって, 交換関係 (277) を得る。

■演算子  $A, B$  の交換関係 (278) の導出 演算子

$$\mathbf{A} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{J} + i\mathbf{K}), \quad \mathbf{B} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{J} - i\mathbf{K})$$

に対して

$$\begin{aligned} [A_i, A_j] &= \frac{1}{4}([J_i, J_j] + i[J_i, K_j] + i[K_i, J_j] + (+i)^2[K_i, K_j]), \\ [B_i, B_j] &= \frac{1}{4}([J_i, J_j] - i[J_i, K_j] - i[K_i, J_j] + (-i)^2[K_i, K_j]), \\ [A_i, B_j] &= \frac{1}{4}([J_i, J_j] - i[J_i, K_j] + i[K_i, J_j] + (+i)(-i)[K_i, K_j]) \end{aligned}$$

であり, ここに交換関係 (277):

$$[J_i, J_j] = -[K_i, K_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k, \quad [J_i, K_j] = [K_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}K_k$$

を代入すると, 式 (278):

$$[A_i, A_j] = i\varepsilon_{ijk}A_k, \quad [B_i, B_j] = i\varepsilon_{ijk}B_k, \quad [A_i, B_j] = 0$$

が得られる.

### C.2.3 $SL(2, \mathbf{C})$ スピノル (補足)

■式 (279) の行列  $a$  の行列式が 1 であることの証明 この証明は非相対論的量子力学において, 空間回転の際に 2 成分に作用する行列  $e^{-i\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}\phi/2}$  の行列式が 1 であることの確認と同様にできる. 今の場合, 行列 (279):

$$a = e^{i\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}}$$

において  $\mathbf{b} \equiv \frac{\theta + i\omega}{2}$  は複素ベクトルである. この場合にも  $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{b}^2$  は正しいので, 演算子の指数関数  $a$  は

$$a = f(\mathbf{b}^2) + i(\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma})g(\mathbf{b}^2), \quad f(\mathbf{b}^2) \equiv 1 - \frac{1}{2!}\mathbf{b}^2 + \frac{1}{4!}(\mathbf{b}^2)^2 - \dots, \quad g(\mathbf{b}^2) \equiv 1 - \frac{1}{3!}\mathbf{b}^2 + \frac{1}{5!}(\mathbf{b}^2)^2 - \dots$$

と展開される. Pauli 行列の成分

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

を思い出すと

$$a = \begin{pmatrix} f + ib_3g & i(b_1 - ib_2)g \\ i(b_1 + ib_2)g & f - ib_3g \end{pmatrix}$$

となるので, 行列式は

$$\text{deta} = f^2 + \mathbf{b}^2g^2$$

と表される. ここで複素数  $b = \sqrt{\mathbf{b}^2}$  を導入すると  $f(\mathbf{b}^2) = \cos b, g(\mathbf{b}^2) = \sin b$  となるから,

$$\text{deta} = \cos^2 b + \sin^2 b = 1$$

である.

■ $2^*$ スピノル  $\eta_{\dot{\alpha}}$  が表現  $(A, B) = (1/2, 0)$  の場である理由 C.1.4 節で述べたように,  $2^*$ スピノル  $\eta_{\dot{\alpha}}$  は表現  $(A, B) = (1/2, 0)$  の場であることを説明する. C.1.4 節の議論より, 任意の表現  $D(\mathbf{A}), D(\mathbf{B})$  に対して

$$D(\hat{\Lambda}) = \exp(i\boldsymbol{\theta} \cdot D(\mathbf{J}) + i\boldsymbol{\omega} \cdot D(\mathbf{K}))$$

であることは正しい. ところがこれは  $2^*$ スピノル  $\eta_{\dot{\alpha}}$  に対しては

$$a^*_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}} = \left[ \exp \left( -i\boldsymbol{\theta} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}^*}{2} - \boldsymbol{\omega} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}^*}{2} \right) \right]_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}}$$

なので,

$$\begin{cases} -\frac{\boldsymbol{\sigma}^*}{2} = D(\mathbf{J}) = D(\mathbf{A}) + D(\mathbf{B}) \\ i\frac{\boldsymbol{\sigma}^*}{2} = D(\mathbf{K}) = -i\{D(\mathbf{A}) + D(\mathbf{B})\} \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} D(\mathbf{A}) = -\frac{\boldsymbol{\sigma}^*}{2} \\ D(\mathbf{B}) = 0 \end{cases}$$

と同定される. ここからこれは  $(A, B) = (1/2, 0)$  の表現であると考えられる.

これは  $\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$  の代わりに, C.1.5 節で導入する  $\eta^{\dot{\alpha}} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\eta_{\dot{\beta}}$  を基本的な量と考えれば正当化できる ( $\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$  は 2 階反対称テンソルであり,  $\epsilon^{12} = 1$ ).  $2^*$ スピノル  $\eta_{\dot{\alpha}}$  の変換則 (281):  $\eta' = a^*\eta$  は, 改めてとった基本量  $\epsilon\eta = \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \end{pmatrix}$  に対しては

$$(\epsilon\eta') = (\epsilon a^* \epsilon^{-1})(\epsilon\eta)$$

となる. よって変換係数  $a^*$  の中で  $D(\mathbf{J}), D(\mathbf{K})$  は, したがって  $D(\mathbf{A}), D(\mathbf{B})$  はそれぞれ  $\epsilon D \epsilon^{-1}$  に置き換わる (無限小変換を考えよ). ところが Pauli 行列に対して直接確かめられるように

$$\epsilon(-\sigma_2^*)\epsilon^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \sigma_2, \text{ etc.} \quad \text{i.e.} \quad \epsilon(-\boldsymbol{\sigma}^*)\epsilon^{-1} = \boldsymbol{\sigma} \quad (294)$$

なので,

$$D(\mathbf{A}) \rightarrow \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}, \quad D(\mathbf{B}) \rightarrow 0$$

となる. これは  $(A, B) = (1/2, 0)$  の表現であることが明瞭である.

#### C.2.4 スピノル算法 (補足)

■同種のスピノルの縮約 (282) がスカラーであることの証明 一般に  $2 \times 2$  行列

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

に対して

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \quad \epsilon M^T \epsilon^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

なので,

$$\epsilon M^T \epsilon^T = (\det M) M^{-1} \quad (295)$$

が恒等的に成立する.

さて、(下付き添字を持つ)点なしスピノルをまとめて

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \quad \Xi = \begin{pmatrix} \Xi_1 \\ \Xi_2 \end{pmatrix}$$

と表記すると、今考えている量 (282): $\epsilon^{\alpha\beta}\xi_\beta\Xi_\alpha$  は  $\xi^T\epsilon^T\Xi$  と表される. 変換則 (280): $\xi' = a\xi$  にしたがってこれを変換すると

$$\begin{aligned} (\xi^T\epsilon^T\Xi)' &= (\xi^T a^T)\epsilon^T(a\Xi) \\ &= \xi^T(\epsilon^T\epsilon)a^T\epsilon^T(a\Xi) \\ &= \xi^T\epsilon^T(\epsilon a^T\epsilon^T)(a\Xi) \\ &= \xi^T\epsilon^T\Xi \quad (\because \text{上式 (295)} : \epsilon a^T\epsilon^T = (\det a)a^{-1}, \det a = 1) \end{aligned}$$

となるので、縮約  $\xi^\alpha\Xi_\alpha = \epsilon^{\alpha\beta}\xi_\beta\Xi_\alpha = -\xi_\beta\Xi^\beta$  はスカラーである.  $\eta^\alpha H_\alpha = -\eta_\alpha H^\alpha$  がスカラーであることも同様に理解できる.

■式 (284) の確認 第 1 式  $\frac{1}{2}\text{tr}(\bar{\sigma}^\mu\sigma_\nu) = \delta^\mu_\nu$  について、 $(\mu, \nu) = (0, 0)$  のときには両辺が 1 となるので、これは成立する. また  $\bar{\sigma}^i = -\bar{\sigma}_i = \sigma_i$  なので、 $(\mu, \nu) = (0, i), (i, 0)$  のとき左辺はいずれも  $\frac{1}{2}\text{tr}(\sigma_i) = 0$  となるから、与式は成立している. 最後に

$$\frac{1}{2}\text{tr}(\bar{\sigma}^i\sigma_j) = \frac{1}{2}\text{tr}(\sigma_i\sigma_j) = \frac{1}{2}\delta^i_j\text{tr}(1) = \delta^i_j$$

より\*61,  $(\mu, \nu) = (i, j)$  のときにも与式は成立する. 以上より第 1 式が確認できた.

第 2 式

$$(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}}(\bar{\sigma}_\mu)^{\dot{\gamma}\delta} = 2\delta^\delta_\alpha\delta^{\dot{\gamma}}_{\dot{\beta}}$$

の確認に移ろう.  $\sigma^\mu = (1, -\boldsymbol{\sigma}) = \bar{\sigma}_\mu$  より、左辺はスピノル添字の対  $\alpha, \beta$  と  $\gamma, \delta$  の入れ替えに関して対称である. 具体的には

$$\sigma^0 = \bar{\sigma}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^1 = \bar{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \bar{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \bar{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である. これらに注意すると、与式の左辺は表 4 のように成分計算される. 左辺は  $\alpha = \delta$  かつ  $\beta = \gamma$  のとき 2 であり、それ以外のときは 0 となるから、与式は成立している.

■式 (286) の導出 無限小変換の場合を考えれば充分である. すると

$$\begin{aligned} a\sigma_\nu a^\dagger &\simeq \left(1 + \frac{i}{2}\theta_k\sigma_k - \frac{1}{2}\omega_k\sigma_k\right)\sigma_\nu\left(1 + \frac{i}{2}\theta_l\sigma_l - \frac{1}{2}\omega_l\sigma_l\right) \\ &\simeq \sigma_\nu + \frac{i}{2}\theta_k[\sigma_k, \sigma_\nu] - \frac{1}{2}\omega_k\{\sigma_k, \sigma_\nu\} \end{aligned}$$

となる. ここで Pauli 行列の交換関係と反交換関係

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k, \quad \{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}$$

を思い出すと、

$$a\sigma_\nu a^\dagger \simeq \begin{cases} 1 - \omega_k\sigma_k & (\nu = 0) \\ \sigma_i - \varepsilon_{kil}\theta_k\sigma_l - \omega_i & (\nu = i) \end{cases}$$

\*61 Pauli 行列の公式  $\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$  を思い出そう.

表4  $(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}}(\bar{\sigma}_\mu)^{\dot{\gamma}\delta}$  の成分計算

	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$	$(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}}(\bar{\sigma}_\mu)^{\dot{\gamma}\delta}$	
①	1	1	1	1	$1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1)$	$= 2$
②	1	1	1	2	$1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) + 0 \cdot i + (-1) \cdot 0$	$= 0$
③	1	1	2	1	$1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) + 0 \cdot (-i) + (-1) \cdot 0$	$= 0$
④	1	1	2	2	$1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 1$	$= 0$
⑤	1	2	1	1	②に同じ	$\rightarrow 0$
⑥	1	2	1	2	$0 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) + i \cdot i + 0 \cdot 0$	$= 0$
⑦	1	2	2	1	$0 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) + i \cdot (-i) + 0 \cdot 0$	$= 2$
⑧	1	2	2	2	$0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + i \cdot 0 + 0 \cdot 1$	$= 0$
⑨	2	1	1	1	③に同じ	$\rightarrow 0$
⑩	2	1	1	2	⑦に同じ	$\rightarrow 2$
⑪	2	1	2	1	$0 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) + (-i) \cdot (-i) + 0 \cdot 0$	$= 0$
⑫	2	1	2	2	$0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + (-i) \cdot 0 + 0 \cdot 1$	$= 0$
⑬	2	2	1	1	④に同じ	$\rightarrow 0$
⑭	2	2	1	2	⑧に同じ	$\rightarrow 0$
⑮	2	2	2	1	⑫に同じ	$\rightarrow 0$
⑯	2	2	2	2	$1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1$	$= 2$

が得られる。他方、

$$\begin{aligned} \sigma_\mu \Lambda^\mu_\nu &\simeq \sigma_\mu (\delta^\mu_\nu + \varepsilon^\mu_\nu) \\ &= \begin{cases} 1 + \sigma_i \varepsilon^{i0} & (\nu = 0) \\ \sigma_i - \varepsilon^{0i} - \sigma_k \varepsilon^{ki} & (\nu = i) \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 - \omega_k \sigma_k & (\nu = 0) \\ \sigma_i - \omega_i + \varepsilon_{kil} \theta_l \sigma_k & (\nu = i) \end{cases} \end{aligned}$$

であり、最右辺において  $\varepsilon_{kil} \theta_l \sigma_k = \varepsilon_{lik} \theta_k \sigma_l = -\varepsilon_{kil} \theta_k \sigma_l$  と書き換えられる。これらを等置して式 (286):

$$\sigma_\mu \Lambda^\mu_\nu = a \sigma_\nu a^\dagger$$

を得る。

■  $V_\mu$  の式 (287) の第2, 第3の等号について まず式 (287):

$$V_\mu = \xi^\alpha (\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \eta^{\dot{\beta}} = \xi_\alpha (\epsilon^T \sigma_\mu \epsilon)^{\alpha\dot{\beta}} \eta_{\dot{\beta}} = \xi_\alpha (\bar{\sigma}_\mu^T)^{\alpha\dot{\beta}} \eta_{\dot{\beta}}$$

の第2の等号は、

$$V_\mu = \xi^\alpha (\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \eta^{\dot{\beta}} = (\epsilon^{\alpha\gamma} \xi_\gamma) (\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\beta}} (\epsilon^{\dot{\beta}\delta} \eta_\delta) = \xi_\gamma \{ \epsilon^{\alpha\gamma} (\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \epsilon^{\dot{\beta}\delta} \} \eta_\delta = \xi_\gamma (\epsilon^T \sigma_\mu \epsilon)^{\gamma\delta} \eta_\delta$$

と確かめられる。

第3の等号の確認に移ろう。既に言及した公式(294): $\epsilon(-\sigma^*)\epsilon^T = \sigma$ を両辺転置し、 $\epsilon^T = -\epsilon$ および Hermite 性  $\sigma^\dagger = \sigma$  を用いると

$$\epsilon^T \sigma \epsilon = -\sigma^T$$

を得る。これと  $\epsilon^T \sigma_0 \epsilon = \epsilon^T \epsilon = 1$  を合わせると

$$\epsilon^T \sigma_\mu \epsilon = (1, -\sigma^T) = \bar{\sigma}_\mu^T$$

とまとめられるので、確かに第3の等号が成り立っている。

■式(287)の  $V_\mu$  は4元ベクトルとして変換することの証明 ここでは点なし・点付きスピノルのいずれについても、下付き添字を持つ成分をまとめて

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$$

と表記すると、 $V_\mu = \xi_\alpha (\epsilon^T \sigma_\mu \epsilon)^{\alpha\beta} \eta_\beta$ :(287) は

$$V_\mu = \xi^T \epsilon \sigma_\mu \epsilon \eta$$

と書ける。スピノルの変換則(280): $\xi' = a\xi$ , (281): $\eta' = a^*\eta$ により、これは Lorentz 変換に際して

$$V'_\mu = (\xi^T a^T)(\epsilon^T \sigma_\mu \epsilon)(a^* \eta) = \xi^T (\epsilon^T \epsilon) a^T \epsilon^T \sigma_\mu \epsilon a^* (\epsilon^T \epsilon) \eta = \xi^T \epsilon^T (\epsilon a^T \epsilon^T) \sigma_\mu (\epsilon a^* \epsilon^T) \epsilon \eta$$

と変換する。ここで公式(295): $\epsilon M^T \epsilon^T = (\det M)M^{-1}$ を  $M = a, a^\dagger$  とおいて適用し、 $\det a = 1$ , それ故  $\det(a^\dagger) = 1$ であることを用いると、上式最右辺において

$$\epsilon a^T \epsilon^T = a^{-1}, \quad \epsilon a^* \epsilon^T = \epsilon (a^\dagger)^T \epsilon^T = (a^\dagger)^{-1}$$

となる。

$$V'_\mu = \xi^T \epsilon^T \{a^{-1} \sigma_\mu (a^\dagger)^{-1}\} \epsilon \eta. \quad (296)$$

ところで式(286)を  $\Lambda \rightarrow \Lambda^{-1}, a \rightarrow a^{-1}$  として書き下すと

$$a^{-1} \sigma_\mu (a^{-1})^\dagger = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \sigma_\nu$$

である。ここで  $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$  の Hermite 共役をとった式

$$(a^{-1})^\dagger a^\dagger = a^\dagger (a^{-1})^\dagger = 1$$

は、 $(a^{-1})^\dagger$  が  $a^\dagger$  の逆行列であることを示している。

$$(a^{-1})^\dagger = (a^\dagger)^{-1}.$$

以上より上式(296)は4元共変ベクトルの変換則

$$V'_\mu = \xi^T \epsilon^T \{(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \sigma_\nu\} \epsilon \eta = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu (\xi^T \epsilon^T \sigma_\nu \epsilon \eta) = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu V_\nu$$

になる。

■ $\sigma^{\mu\nu}$  行列の式 (291) の確認 行列  $\sigma^\mu, \bar{\sigma}^\mu, \sigma^{\mu\nu}$  の定義式 (283), (290):

$$\sigma_\mu \equiv (1, \boldsymbol{\sigma}), \quad \bar{\sigma}_\mu \equiv (1, -\boldsymbol{\sigma}), \quad (\sigma_{\mu\nu}) \equiv \frac{i}{2}(\sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu - \sigma_\nu \bar{\sigma}_\mu)$$

および Pauli 行列の交換関係  $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$  より,

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \frac{i}{2}(\sigma_i \bar{\sigma}_j - \sigma_j \bar{\sigma}_i) = -\frac{i}{2}[\sigma_i, \sigma_j] = \varepsilon_{ijk}\sigma_k, \\ \sigma_{i0} &= \frac{i}{2}(\sigma_i \bar{\sigma}_0 - \sigma_0 \bar{\sigma}_i) = i\sigma_i \end{aligned}$$

となる。これらは式 (291):

$$(\sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12}) = \boldsymbol{\sigma}, \quad (\sigma_{10}, \sigma_{20}, \sigma_{30}) = i\boldsymbol{\sigma}$$

を意味する。

■ $\xi_\alpha$  の Lorentz 変換 (292) の確認  $\xi_\alpha$  の Lorentz 変換 (280): $\xi'_\alpha(x') = a_\alpha^\beta \xi_\beta(x)$  における変換行列

$$a = [\exp\{i\boldsymbol{\theta} \cdot D(\mathbf{J}) + i\boldsymbol{\omega} \cdot D(\mathbf{K})\}]$$

に

$$D(\mathbf{J}) = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} = \frac{1}{2}(\sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12}), \quad D(\mathbf{K}) = i\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} = \frac{1}{2}(\sigma_{10}, \sigma_{20}, \sigma_{30})$$

および

$$\boldsymbol{\theta} = -(\varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}, \varepsilon_{12}), \quad \boldsymbol{\omega} = (\varepsilon_{10}, \varepsilon_{20}, \varepsilon_{30})$$

を代入すると,

$$a = \exp \left[ -\frac{i}{2} \{ (\varepsilon^{12}\sigma_{12} + \varepsilon^{23}\sigma_{23} + \varepsilon^{31}\sigma_{31}) + (\varepsilon^{10}\sigma_{10} + \varepsilon^{20}\sigma_{20} + \varepsilon^{30}\sigma_{30}) \} \right] = \exp \left( -\frac{i}{4} \varepsilon^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} \right)$$

となる。よって式 (292) が得られる。

■ $\eta^{\dot{\alpha}}$  の Lorentz 変換 (293) の確認 スピノル  $\eta_{\dot{\alpha}}$  の変換則 (280): $\eta'_{\dot{\alpha}} = a^*_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \eta_{\dot{\beta}}$  は

$$\eta'^{\dot{\alpha}} = \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \eta'_{\dot{\beta}} = \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} a^*_{\dot{\beta}\dot{\gamma}} \eta_{\dot{\gamma}} = \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} a^*_{\dot{\beta}\dot{\gamma}} (\varepsilon^T \varepsilon)_{\dot{\gamma}\dot{\delta}} \eta_{\dot{\delta}} = (\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} a^*_{\dot{\beta}\dot{\gamma}} \varepsilon^T_{\dot{\gamma}\dot{\delta}}) \varepsilon^{\dot{\delta}\dot{\epsilon}} \eta_{\dot{\epsilon}} = (\varepsilon a^* \varepsilon^T)_{\dot{\alpha}\dot{\epsilon}} \eta_{\dot{\epsilon}} = (\varepsilon a^* \varepsilon^T)_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \eta_{\dot{\beta}}$$

と書き換えられる。ここで式 (292) の行列の指数関数  $a = \exp(-\frac{i}{4}\varepsilon^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu})$  を定義する Taylor 展開を考える  
と、最右辺において

$$\varepsilon a^* \varepsilon^T = \varepsilon \left[ \exp \left( -\frac{i}{4} \varepsilon^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} \right) \right]^* \varepsilon^T = \exp \left( +\frac{i}{4} \varepsilon^{\mu\nu} (\varepsilon \sigma_{\mu\nu}^* \varepsilon^T) \right)$$

となる。さらに式 (291):

$$(\sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12}) = \boldsymbol{\sigma}, \quad (\sigma_{10}, \sigma_{20}, \sigma_{30}) = i\boldsymbol{\sigma}$$

および公式 (295) の帰結  $\varepsilon(-\boldsymbol{\sigma}^*)\varepsilon^T = \boldsymbol{\sigma}$  を思い出すと、 $\varepsilon \sigma_{\mu\nu}^* \varepsilon^T$  について

$$\begin{aligned} \varepsilon \sigma_{ij}^* \varepsilon^T &= \varepsilon_{ijk} \varepsilon \sigma_k^* \varepsilon^T = -\varepsilon_{ijk} \sigma_k = -\sigma_{ij}, \\ \varepsilon \sigma_{i0}^* \varepsilon^T &= -i \varepsilon \sigma_i \varepsilon^T = i\sigma_i = \sigma_{i0} \end{aligned}$$

である。ところが式 (291):

$$\sigma_{ij} = \varepsilon_{ijk}\sigma_k, \quad \sigma_{i0} = i\sigma_i$$

を同様に得られる関係

$$\bar{\sigma}_{ij} = \varepsilon_{ijk}\sigma_k, \quad \bar{\sigma}_{i0} = -i\sigma_i$$

と比較すると,

$$(\sigma_{ij})_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} = (\bar{\sigma}_{ij})^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}}, \quad (\sigma_{i0})_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} = -(\bar{\sigma}_{i0})^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}}$$

が見出される。よって上式は

$$(\varepsilon\sigma_{\mu\nu}^*\varepsilon^T)_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} = -(\bar{\sigma}_{\mu\nu})^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}}$$

とまとめられる。以上よりスピノル  $\eta^{\dot{\alpha}}$  の変換則 (293):

$$\eta'^{\dot{\alpha}}(x') = \left[ \exp\left(-\frac{i}{4}\varepsilon^{\mu\nu}\bar{\sigma}_{\mu\nu}\right) \right]_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} \eta^{\dot{\beta}}(x)$$

が得られる。

### C.3 Dirac 場

#### C.3.1 スピノル表示の Dirac 場と Dirac 方程式 [10, pp.23–27]

半整数のスピンを持つ粒子はフェルミオンと呼ばれる。C.1.4 節で述べたように、相対論的量子力学ではスピンの 1/2 の粒子は、変換則 (280),(281) で定義される **2** スピノルおよび **2\*** スピノルの場

$$\xi_{\alpha}(x), \quad \eta^{\dot{\alpha}}(x)$$

によって記述される。以後、これをスピノル添字の標準位置と約束する。ここで一般にこれら 2 種類のスピノルの力学 (ダイナミクス) は互いに独立ではなく、それ故、スピン 1/2 の相対論的粒子は  $\xi_{\alpha}(x)$  と  $\eta^{\dot{\alpha}}(x)$  の組

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \xi_{\alpha}(x) \\ \eta^{\dot{\alpha}}(x) \end{pmatrix}$$

で表されると考える。この 4 つの複素場  $\psi_{\alpha}(x)$  ( $\alpha = 1, 2, 3, 4$ ) を成分に持つスピノル  $\psi(x)$  を Dirac 場 (Dirac スピノル) と呼ぶ。これに対応して C.1.5 節で導入した 4 次元 Pauli 行列  $\sigma^{\mu} = (1, -\boldsymbol{\sigma})$ ,  $\bar{\sigma}^{\mu} = (1, \boldsymbol{\sigma})$  を 2 階建てにし、 $4 \times 4$  行列

$$\gamma^{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^{\mu} \\ \bar{\sigma}^{\mu} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{i.e.} \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad (297)$$

を定義する (スピノル添字の標準位置は相変わらず  $(\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\beta}}$ ,  $(\bar{\sigma}^{\mu})^{\dot{\alpha}\beta}$ )。これを Dirac (の  $\gamma$ ) 行列と呼ぶ。  $\gamma^0$  を用い、Dirac 場に随伴する場  $\bar{\psi} \equiv \psi^{\dagger}\gamma^0$  を定義する。  $\gamma$  行列は

$$\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = 2g^{\mu\nu}, \quad (298)$$

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^{\mu}\gamma^0 \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma^{0\dagger} = \gamma^0 \\ \gamma^{j\dagger} = -\gamma^j \quad (j = 1, 2, 3) \end{cases} \quad (299)$$

を満たす (確認は C.4.1 節)。ただし上式 (82) の右辺には  $4 \times 4$  の単位行列が掛かっているものと解す。また上式 (82) が  $(\gamma^0)^2 = 1$  を含意していることを覚えておくのは有用である。式 (299) は  $\gamma^0$  が Hermite であるのに対し、 $\gamma^j$  は反 Hermite であることを意味している。

$\gamma$  行列の交換関係は

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \begin{pmatrix} (\sigma^{\mu\nu})_\alpha^\beta & 0 \\ 0 & (\bar{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \end{pmatrix} \quad (300)$$

と計算される (C.4.1 節参照)\*62.

ここで

$$\gamma_5 = \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$$

を定義する. 相異なる  $\gamma$  行列は反交換することに注意すると, これは

$$\gamma_5 = \frac{i}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma$$

と書くこともできる (ここでは  $\varepsilon_{0123} = +1$ ). (教科書の式 (A.7), (A.13) を併せて参照.) 具体的には

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (301)$$

と成分計算される (確認は C.4.1 節).  $\gamma_5$  の固有値はカイラリティと呼ばれ, 2 成分スピノル  $\xi_\alpha, \eta^{\dot{\alpha}}$  はカイラリティがそれぞれ  $+1, -1$  の固有状態に対応している.

$$\gamma_5 \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = + \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 \begin{pmatrix} 0 \\ \eta^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \eta^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ \eta^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}.$$

カイラリティが  $\pm 1$  の成分への Dirac スピノル  $\psi$  の分解は, 射影演算子  $(1 \pm \gamma_5)/2$  で行われる.

$$\frac{1 + \gamma_5}{2}\psi = \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1 - \gamma_5}{2}\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}.$$

(ヘリシティ射影演算子に関する教科書の付録 A.6 を併せて参照.)

ところで  $\xi_\alpha, \eta^{\dot{\alpha}}$  スピノルの変換則 (292), (293) を合わせると, Dirac スピノル  $\psi$  は上式 (300) の  $\sigma^{\mu\nu}$  を用いて

$$\psi'(x') = \exp\left(-\frac{i}{4}\varepsilon^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\right)\psi(x) \equiv A\psi(x) \quad (302)$$

と変換されることが分かる. この行列  $A$  は

$$\bar{A}\gamma^\mu A = \Lambda^\mu_\nu\gamma^\nu, \quad \bar{A} \equiv \gamma_0 A^\dagger \gamma_0 \quad (303)$$

を満たす (証明は C.4.1 節). 上式 (302), (303) より,

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\psi}\psi \\ \bar{\psi}\gamma_5\psi \\ \bar{\psi}\gamma_\mu\psi \\ \bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi \\ \bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi \end{array} \right\} \text{はそれぞれ} \left\{ \begin{array}{l} \text{スカラー} \\ \text{擬スカラー} \\ \text{ベクトル} \\ \text{軸性ベクトル (擬ベクトル)} \\ \text{(反対称な 2 階) テンソル} \end{array} \right\} \text{として変換する} \quad (304)$$

ことが示される (証明は C.4.1 節).

次に原理として, Dirac 場の古典的な力学 (ダイナミクス) を決定するラグランジアン (密度) は次式で与えられると宣言する.

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi. \quad (305)$$

\*62 表記を区別していないが, 最左辺の  $4 \times 4$  行列  $\sigma^{\mu\nu}$  と最右辺の  $2 \times 2$  行列  $(\sigma^{\mu\nu})_\alpha^\beta$  の混同に注意する.

ここに  $m$  は粒子の質量であり、また任意の 4 元ベクトル  $A_\mu$  に対して Feynman のスラッシュ記法

$$\not{A} \equiv \gamma^\mu A_\mu$$

を導入した。式 (304) よりラグランジアン密度 (84) は Lorentz スカラーである。(このことはスピノル  $\xi_\alpha, \eta^{\dot{\alpha}}$  の変換性に立ち戻って説明することもできる (C.4.1 節)。) ここから理論の共変性が保証される。と言うのもラグランジアン密度が、したがって作用がスカラーであれば、作用の変分は座標系に依らない量なので、作用が極値 (停留値) をとる条件に他ならない運動方程式も座標系の変更によって形を変えない。

Dirac 場のラグランジアン密度 (305) から場の運動方程式として、Dirac 方程式

$$(i\not{\partial} - m)\psi = 0, \quad i(\partial_\mu \bar{\psi})\gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0 \quad (306)$$

が導かれる (導出と 2 式の等価性の確認は C.4.1 節)。この Dirac 方程式の共変性は、式 (302), (303) から直接確かめることもできる (C.4.1 節参照)。

さらに Dirac 場  $\psi, \bar{\psi}$  に共役な場

$$\pi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi)} = i\psi^\dagger, \quad \bar{\pi} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \bar{\psi})} = 0$$

を定義する\*63。

■Dirac 場に関する注意 Dirac 場はスピン 1/2 の粒子を“記述する”場であるけれど、これを 1 粒子の波動関数として解釈することはできない。実際、一時的に Dirac 場を 1 粒子の波動関数と考えるにしても、これから説明するように、次いでそれを古典的な場と見なして場の量子化を行うと (第 2 量子化)、粒子の生成・消滅を含む過程を記述する理論が得られる。

また我々は量子化に先立って Dirac 場を古典場として取り扱うけれど、これは Dirac 場に古典的対応物があることを意味しない (このため原理的に量子論は古典論を含んでいるはずであると言えど、理論の古典的極限を理解することは必ずしも容易ではない)。

実際、フェルミオン場  $\psi$  を量子化する際、これは反交換関係  $\{\psi, \psi\} = 0$  を満たす演算子と見なされる。このためフェルミオン場  $\psi$  は (そして 2 スピノル  $\xi_\alpha$  場と 2\* スピノル場  $\eta^{\dot{\alpha}}$  も) 本来、古典場としては反交換関係  $\{\psi, \psi\} = 0$  を満たす Grassmann 場として扱わなければならない。その場合には例えば Grassmann 場  $\bar{\psi}$  や  $\partial_0 \psi$  による微分は通常の変分とは異なり、左微分の約束に従って行うものとされる。これは反交換関係を用いてラグランジアン密度における  $\bar{\psi}$  や  $\partial_0 \psi$  を Grassmann 場の積の左端まで移動し、微分によってそれを除去するというものである [11, pp.81–82]\*64。しかしながら教科書第 1 巻の水準では結果的に、Dirac 場が Grassmann 場であることに特別に注意を払う必要はない。(第 2 巻では経路積分による QCD の定式化を説明する際、Dirac 場の Grassmann 場としての取り扱いにいくらか触れることになる。)

とは言え、電磁場中の粒子に対する Dirac 方程式は非相対論的極限で Schrödinger 方程式の形 (Pauli 方程式) に帰着することを示すことができ、この意味で Dirac 場の成分を波動関数と対応付けることができる。このとき同時に電子の磁気モーメントが理論的に導出される (付録 C.3.3 参照)。そして非相対論的な波動力学は

\*63 スピノル添字を明記すると、スピノルによる微分は  $\pi_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi_\alpha)} = i\psi_\alpha^\dagger, \bar{\pi}_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \bar{\psi}_\alpha)} = 0$  の意味である。

\*64 Grassmann 場としての取り扱いに移行するには、式の符号を適当に改める必要が生じる。例えば左微分の約束では  $\pi \equiv -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi)}$  と定義する必要がある (反交換関係を用いてラグランジアン密度における Grassmann 場  $\partial_0 \psi$  を Grassmann 場の積の左端まで移動させる必要があるため) [11, p.94, p.211]。他方、文献 [10, p.40] では  $\partial_0 \psi$  による微分については右微分の約束をとっている。このとき共役な場の定義式  $\pi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi)}$  には負号が現れない。

“幾何光学の極限”として古典力学を含んでいる。このように非相対論的極限を経由すれば、Dirac 理論の古典的極限を(間接的に)理解することができる(以下の図式を参照)。

	相対論	→	非相対論
量子論	○		○
			↓
古典論			○

### C.3.2 表示に依らない定式化

我々は Dirac 場の古典論を、相対論的不変性が明白な形式で導入した。しかしながらそれは、Dirac 場と  $\gamma$  行列の成分を特定する具体的な表示——スピノル表示——に依拠したものであった。具体的な表示に頼って理論を展開することは、普通は不適當である [2, p.394,p.397]。そこで Dirac 場の成分の選び方をあらかじめ決めないような一般の表示に移るには、Dirac 場と  $\gamma$  行列にユニタリー変換

$$\psi \rightarrow U\psi, \quad \gamma^\mu \rightarrow U\gamma^\mu U^\dagger$$

を施せば良い (p.259)。このとき Dirac 場の 4 成分  $\psi_\alpha$  は、スピノル表示の 4 成分の 1 次結合として再定義される。また

- Dirac 場のラグランジアン密度の表式 (84) とその (Lorentz 変換に対する) 不変性
- Dirac 方程式 (306) とその (Lorentz 変換に対する) 不変性

を始めとした付録 C.3.1 までの主要な結論は保持されることになる。 $\gamma$  行列は依然として反交換関係 (82) と “Hermite 性” の条件 (83):

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad \gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$$

を満たす<sup>\*65</sup>。一般には  $\gamma$  行列はこれらの性質を満たす  $4 \times 4$  行列として定義される。ところで質量  $m$  の相対論的な粒子を記述する場  $\phi$  は何であれ、Klein-Gordon 方程式  $(\square + m^2)\phi = 0$  を満たさなければならないと考えられる (3.1 節のノート参照)。反交換関係  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$  は Dirac 場  $\psi$  の各成分が Klein-Gordon 方程式を満たすための条件となっている (証明は C.4.2 節) [2, pp.396–397]。また第 2 式  $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$  はラグランジアン (密度) から導かれる  $\psi$  に対する Dirac 方程式と  $\bar{\psi}$  に対する随伴する方程式が等価となることを保証する (C.4.1 節)。

### C.3.3 Dirac 方程式の非相対論的極限と電子の磁気モーメント

本節では電磁場の存在下での Dirac 方程式の非相対論的極限を調べよう。Dirac 場は 4 つの成分を持つのに対し、非相対論的な場合には (スピン 1/2 の) 粒子は Pauli の 2 成分スピノルで記述される。実際、スピノル表示の Dirac 場

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \end{pmatrix}$$

はこの極限で  $\xi = \eta$  となり、独立な成分を 2 つしか持たない。このことは次のように理解できる。すなわち自由 Dirac 場を考えると、スピノル形式での Dirac 方程式

$$(\hat{p}_0 - \hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\sigma})\xi = m\eta, \quad (\hat{p}_0 + \hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\sigma})\eta = m\xi \quad (307)$$

<sup>\*65</sup> これらの性質を満たす任意の  $\gamma$  行列への変換を受け持つユニタリー行列  $U$  が存在することは、Pauli の基本定理によって保証されている。その証明は文献 [6, pp.395–399] に見られる。

(ただし  $\hat{p}_0 = i\partial_0, \hat{\mathbf{p}} = -i\nabla$ , 導出は C.4.3 節) は, 運動量  $\mathbf{p}$ , エネルギー  $E = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$  の自由粒子を表す平面波状態  $\psi \sim e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} - Et)}$  (したがって  $\hat{p}_0 \rightarrow E, \hat{\mathbf{p}} \rightarrow \mathbf{p}$ ) に対して,

$$(E - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})\xi = m\eta, \quad (E + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})\eta = m\xi$$

となる. ここで非相対論的な極限  $\mathbf{p} \rightarrow 0, E \rightarrow m$  をとると,  $\xi = \eta$  が見出される [2, pp.392–394].

そこで標準表示の Dirac 場

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \eta), \quad \chi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \eta)$$

を定義すると, この極限で  $\chi = 0$  となるため便利である. このとき Dirac 場  $\psi$  のゼロでない独立な 2 成分を  $\varphi$  が担うことになる. 場の方程式 (307) の 2 式を辺々足す, または引くと,  $\varphi, \chi$  に対する式

$$\hat{p}_0\bar{\varphi} - \hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\sigma}\chi = m\varphi, \quad -\hat{p}_0\chi + \hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\sigma}\varphi = m\chi \quad (308)$$

が得られる [2, pp.398–399].

さて, 電磁場との相互作用を導入するために Dirac 方程式において極小置換  $\partial_\mu \rightarrow D_\mu$  を行う\*66. これはもとを正せば演算子の置き換え  $\hat{p}_\mu \rightarrow \hat{p}_\mu - eA_\mu$  に他ならず, Dirac 方程式 (308) は

$$\begin{aligned} (\hat{p}_0 - e\Phi)\varphi - \boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A})\chi &= m\varphi, \\ -(\hat{p}_0 - e\Phi)\chi + \boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A})\varphi &= m\chi \end{aligned} \quad (309)$$

に置き換わる ( $\hat{p}_\mu = (\hat{p}_0, -\hat{\mathbf{p}}) = i(\partial_t, \nabla)$ ,  $A_\mu = (\Phi, -\mathbf{A})$ ). 非相対論的表式と比べて, 場の時間依存性  $e^{-iEt}$  に余計に含まれる静止エネルギー  $m$  の寄与  $e^{-imt}$  を取り除いて場  $\psi$  を再定義すると\*67, 非相対論的極限での場の方程式 (309) は  $\varphi$  に対する式

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \left[ \frac{1}{2m}(\hat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A})^2 - \frac{e}{2m}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} + e\Phi \right] \varphi \quad (310)$$

を与えることが示される ( $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  は磁束密度, 導出は C.4.3 節). これは Pauli 方程式と呼ばれ,  $-\frac{e}{2m}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}$  の項を除けば, 電磁場中の荷電粒子に関する Schrödinger 方程式と同じである. 付加的な項は磁気モーメント  $\boldsymbol{\mu}$  に付随するエネルギーの形  $-\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$  をしており (C.4.3 節参照), 磁気モーメントの演算子は

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{e}{2m}\boldsymbol{\sigma} = \frac{e}{m}\hat{\mathbf{s}} \quad (311)$$

( $\hat{\mathbf{s}} = \boldsymbol{\sigma}/2$  は電子のスピン演算子) と同定される. これは電子が大きさ

$$\mu_B = \frac{e}{2m}$$

の固有磁気モーメントを持つことを意味している\*68. 古典的な軌道運動に起因する磁気モーメントが軌道角運動量の  $e/2m$  倍であるのに対し (C.4.3 節参照), 磁気モーメント (311) はスピン角運動量の  $e/m$  倍である [2, pp.433–437].  $\mu_B$  を磁気モーメントの単位にとり,  $\hat{\boldsymbol{\mu}} = g\mu_B\hat{\mathbf{s}}$  と書いて  $g$  因子を定義すると, 式 (311) は  $g = 2$  を意味する. 磁気能率の Dirac 値 ( $-e/2m$ ) からのずれ (異常磁気能率) は, (したがって  $g$  因子の 2 からのずれは, ) 場の量子論に基づく “輻射補正” によって説明される (9.6.1 節).

\*66 こうして得られる方程式  $(i\mathcal{D} - m)\psi = 0$  はもちろん, ラグランジアン密度 (4.66) から導くことができる.

\*67 すなわち  $\psi = \psi' e^{-imt}$  と表したときの場  $\psi'$  を改めて  $\psi$  と書く.

\*68 普通の単位系では  $\mu_B = \frac{e\hbar}{2mc}$ . この量を Bohr 磁子と呼ぶ.

## C.4 Dirac 場 (補足)

### C.4.1 スピノル表示の Dirac 場と Dirac 方程式 (補足)

■式 (84) と等価な Dirac 場のラグランジアン密度 ラグランジアン密度

$$\mathcal{L}' = \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi \quad (312)$$

(ただし  $f \overleftrightarrow{\partial}_\mu g \equiv f \partial_\mu g - (\partial_\mu f) g$ ) は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi \\ &= \frac{i}{2} \{ \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - (\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu) \psi \} - m \bar{\psi} \psi \\ &= \frac{i}{2} \{ 2 \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) \} - m \bar{\psi} \psi \end{aligned}$$

と書き換えられる．ここで古典論において既に学んだように (問題 2.1), 最右辺における 4 元発散の項  $\partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi)$  は落とすことができるから, これはラグランジアン密度 (84):

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i \not{\partial} - m) \psi$$

と等価である．

■Dirac 場のラグランジアン密度 (312) が Lorentz スカラーであることの確認 式 (84) と等価なラグランジアン密度 (312):

$$\mathcal{L}' = \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi$$

が Lorentz スカラーであることを, スピノル  $\xi_\alpha, \eta^\alpha$  の変換性に立ち戻って説明する．

ラグランジアン密度 (312):

$$\mathcal{L}' = \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi$$

の第 1 項は運動項と呼ばれ, これは

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^k &\equiv \frac{i}{2} \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi \\ &= \frac{i}{2} ((\xi_\alpha)^* \quad (\eta^\alpha)^*) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \\ (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\beta} & 0 \end{pmatrix} \overleftrightarrow{\partial}_\mu \begin{pmatrix} \xi_{\dot{\beta}} \\ \eta^{\dot{\beta}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{i}{2} \left\{ (\xi_\alpha)^* (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\beta} \overleftrightarrow{\partial}_\mu \xi_{\dot{\beta}} + (\eta^\alpha)^* (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \overleftrightarrow{\partial}_\mu \eta^{\dot{\beta}} \right\} \end{aligned}$$

と書き換えられる．この項が Lorentz スカラーとなっていることは, 次のように理解できる．C.1.4 節で述べたように, 点付きスピノルの複素共役  $(\eta^\alpha)^*$  は点無しスピノル  $(\eta^*)^\alpha$  の変換性を持ち, 逆に点なしスピノルの複素共役  $(\xi_\alpha)^*$  は点付きスピノル  $(\xi^*)_{\dot{\alpha}}$  の変換性を持つ．そこで

$$(\eta^\alpha)^* = (\eta^*)^\alpha, \quad (\xi_\alpha)^* = (\xi^*)_{\dot{\alpha}}$$

と書いて右辺の量を定義することが許される．すると例えば  $\eta$  に関する項

$$(\eta^\alpha)^* (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \overleftrightarrow{\partial}_\mu \eta^{\dot{\beta}} = (\eta^\alpha)^* (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \partial_\mu \eta^{\dot{\beta}} - \{ \partial_\mu (\eta^\alpha)^* \} (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \eta^{\dot{\beta}}$$

について、右辺第1項は  $\eta^{*\alpha}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}}\partial_\mu\eta^{\dot{\beta}}$  と書ける。ここから微分演算子  $\partial_\mu$  を除いた量は、4元反変ベクトルとして変換することを C.2.4 節で証明した。微分演算子  $\partial_\mu$  を含めて同様に変換則を調べれば、全体として4元反変ベクトルと共変ベクトル  $\partial_\mu$  の縮約から作られる Lorentz スカラーの変換性が得られることが分かる。また上式第2項は第1項の複素共役となっている。

$$\{\eta^{*\alpha}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}}\partial_\mu\eta^{\dot{\beta}}\}^* = \{\partial_\mu(\eta^{\dot{\beta}})^*\}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}}^*\eta^\alpha = \{\partial_\mu(\eta^*)^\beta\}(\sigma^\mu)_{\beta\dot{\alpha}}\eta^{\dot{\alpha}} = \{\partial_\mu(\eta^{\dot{\alpha}})^*\}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}}\eta^{\dot{\beta}}.$$

(第2の等号では  $\sigma^\mu$  の Hermite 性を用いた。) さらに  $\xi$  の項についてもまったく同様に議論できるから、運動項  $\mathcal{L}^k$  全体が Lorentz スカラーである。

ラグランジアン密度 (312) の第2項は Dirac 質量項と呼ばれ、

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_D^m &\equiv -m\psi^\dagger\gamma^0\psi \\ &= -m((\xi_\alpha)^* \quad (\eta^{\dot{\alpha}})^*) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ \eta^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \\ &= -m\{(\eta^{\dot{\alpha}})^*\xi_\alpha + (\xi_\alpha)^*\eta^{\dot{\alpha}}\} \\ &= -m\{(\eta^*)^\alpha\xi_\alpha + (\xi^*)_{\dot{\alpha}}\eta^{\dot{\alpha}}\}\end{aligned}$$

と書き換えられる。最右辺は同種スピノル間の縮約となっているから、スカラーであることが明白である (C.1.5 節)。

以上より Dirac 場のラグランジアン密度 (312) は Lorentz スカラーである。

■ Dirac 行列 (297) が性質 (298), (299) を満たすことの確認 Dirac 行列 (297) に対して

$$\gamma^\mu\gamma^\nu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\nu \\ \bar{\sigma}^\nu & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu \end{pmatrix}$$

なので、4次元 Pauli 行列の性質 (285):

$$\sigma_\mu\bar{\sigma}_\nu + \sigma_\nu\bar{\sigma}_\mu = \bar{\sigma}_\mu\sigma_\nu + \bar{\sigma}_\nu\sigma_\mu = 2g_{\mu\nu}$$

を想起すると反交換関係 (298):  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g_{\mu\nu}$  を得る。

また Dirac 行列 (297) に対して

$$\gamma^{\mu\dagger} = \begin{pmatrix} 0 & (\bar{\sigma}^\mu)^\dagger \\ (\sigma^\mu)^\dagger & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\sigma}^\mu \\ \sigma^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\sigma}^\mu \\ \sigma^\mu & 0 \end{pmatrix}$$

となるので、式 (299):  $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$  が満たされる。

( $\gamma^0$ )<sup>2</sup> = 1 より、式 (299) の  $\mu = 0$  成分は  $\gamma^{0\dagger} = \gamma^0$  を意味する。また空間成分  $\mu = j = 1, 2, 3$  は

$$\gamma^{j\dagger} = \gamma^0\gamma^j\gamma^0 = \{\gamma^0, \gamma^j\}\gamma^0 - \gamma^j(\gamma^0)^2 = 2g^{0j}\gamma^0 - \gamma^j = -\gamma^j$$

となる。

■  $\gamma$  行列の交換関係 (300) の確認  $\gamma$  行列の反交換関係 (82) の導出過程で得た

$$\gamma^\mu\gamma^\nu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\nu \\ \bar{\sigma}^\nu & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu \end{pmatrix}$$

と  $\sigma^{\mu\nu}, \bar{\sigma}^{\mu\nu}$  行列の定義式 (290) により、交換関係 (300):

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \begin{pmatrix} (\sigma^{\mu\nu})_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & (\bar{\sigma}^{\mu\nu})_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \end{pmatrix}$$

を得る。

■ $\gamma_5$  の具体的な表示 (301) の確認

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma_1\sigma_2\sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{pmatrix}$$

において,  $\sigma_{ij} = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$  より

$$\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = (i\sigma_3)\sigma_3 = i$$

なので, 式 (301):

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

を得る.

■Dirac スピノルに作用する行列  $A$  の性質 (303) の導出 最初に式 (287) の  $V_\mu$  が 4 元ベクトルとして変換することを証明する際に見たように,

$$\epsilon a^T \epsilon^T = a^{-1}, \quad \epsilon a^* \epsilon^T = \epsilon (a^\dagger)^T \epsilon^T = (a^\dagger)^{-1}, \quad (a^{-1})^\dagger = (a^\dagger)^{-1}$$

および

$$a^{-1} \sigma_\mu (a^{-1})^\dagger = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \sigma_\nu$$

の関係があることを思い出しておこう.

さて, 式 (302) で定義した  $A$  の成分を  $2 \times 2$  のブロックに分けて書くと,

$$\begin{aligned} A &= \exp\left(-\frac{i}{4}\varepsilon^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\right) \quad (\text{この}\sigma_{\mu\nu}\text{は } 4 \times 4 \text{ の行列}) \\ &= \exp\left[-\frac{i}{4}\varepsilon^{\mu\nu}\begin{pmatrix} \sigma_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}_{\mu\nu} \end{pmatrix}\right] \quad (\text{この}\sigma_{\mu\nu}, \bar{\sigma}_{\mu\nu}\text{は } 2 \times 2 \text{ の行列}) \\ &= \begin{pmatrix} \exp\left(-\frac{i}{4}\varepsilon^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-\frac{i}{4}\varepsilon^{\mu\nu}\bar{\sigma}_{\mu\nu}\right) \end{pmatrix} \quad \left(\because \begin{pmatrix} \sigma_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}_{\mu\nu} \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} (\sigma_{\mu\nu})^n & 0 \\ 0 & (\bar{\sigma}_{\mu\nu})^n \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \epsilon a^T \epsilon^T \end{pmatrix} \quad (\because \text{式 (292), (293)}) \\ &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{\dagger-1} \end{pmatrix} \\ \therefore A^\dagger &= \begin{pmatrix} a^\dagger & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる. よって

$$\bar{A}\gamma_\mu A = (\gamma_0 A^\dagger \gamma_0) \gamma_\mu A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^\dagger & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\mu \\ \bar{\sigma}_\mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{\dagger-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a^{-1}\sigma_\mu a^{\dagger-1} \\ a^\dagger \bar{\sigma}_\mu a & 0 \end{pmatrix}$$

と計算できる. 最右辺の行列について, 右上のブロックは  $(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \sigma_\nu$  である. 左下のブロックについては, 式 (287) における  $\epsilon^T \sigma_\mu \epsilon = \bar{\sigma}_\mu^T$  を用いると

$$\begin{aligned} a^\dagger \bar{\sigma}_\mu a &= a^\dagger (\epsilon^T \sigma_\mu \epsilon)^T a = a^\dagger \epsilon^T \sigma_\mu^T \epsilon a = \epsilon^T (\epsilon a^\dagger \epsilon^T) \sigma_\mu^T (\epsilon a \epsilon^T) \epsilon = \epsilon^T (\epsilon a^\dagger \epsilon^T) \sigma_\mu^T (\epsilon a^\dagger \epsilon^T)^\dagger \epsilon \\ &= \epsilon^T (a^{\dagger-1})^T \sigma_\mu^T (a^{-1})^T \epsilon \end{aligned}$$

となる. これは

$$(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \bar{\sigma}_\nu = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu (\epsilon^T \sigma_\nu \epsilon)^T = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \epsilon^T \sigma_\nu^T \epsilon = \epsilon^T (a^{-1} \sigma_\mu a^{\dagger-1})^T \epsilon = \epsilon^T (a^{\dagger-1})^T \sigma_\mu^T (a^{-1})^T$$

に一致する。以上より

$$\bar{A}\gamma_\mu A = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\nu \\ \bar{\sigma}_\nu & 0 \end{pmatrix} = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \gamma_\nu, \quad \therefore \bar{A}\gamma^\mu A = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \gamma^\nu$$

を得る。

最後に  $(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = \Lambda^\mu{}_\nu$  の関係があることに注意する [10, p.2]. 実際, 計量テンソルの Lorentz 変換

$$g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma = g_{\rho\sigma}$$

の両辺に  $g^{\tau\rho}$  を掛けて  $\rho$  で和をとると,

$$\delta^\tau{}_\sigma = (g^{\tau\rho}g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho)\Lambda^\nu{}_\sigma = \Lambda_\nu{}^\tau\Lambda^\nu{}_\sigma, \quad \therefore \Lambda_\nu{}^\tau = (\Lambda^{-1})^\tau{}_\nu$$

が見出される。こうして式 (303):  $\bar{A}\gamma^\mu A = \Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu$  に到達する。

■ Dirac スピノルについて双一次の基本量に対する Lorentz 変換性 (304) の証明 Dirac スピノルの変換則 (302):  $\psi' = A\psi$  より, 共役な場は

$$\bar{\psi}' = \psi'^\dagger\gamma^0 = (A\psi)^\dagger\gamma^0 = \psi^\dagger A^\dagger\gamma^0 = (\psi^\dagger\gamma^0)(\gamma^0 A^\dagger\gamma^0) = \bar{\psi}\bar{A}$$

と変換する。ここで式 (303) の証明で確認したように

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{\dagger-1} \end{pmatrix}$$

であり, ここから  $\bar{A}$  は  $A$  の逆行列に他ならないこと

$$\bar{A} = (\gamma_0 A^\dagger \gamma_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^\dagger & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & a^\dagger \end{pmatrix} = A^{-1}$$

が導かれる。

するとまず  $\bar{\psi}\psi$  は

$$\bar{\psi}'\psi' = (\bar{\psi}\bar{A})(A\psi) = \bar{\psi}\psi$$

と変換するので, Lorentz スカラーである。

次に  $\bar{\psi}\gamma_5\psi$  は

$$\begin{aligned} \bar{\psi}'\gamma_5\psi' &= (\bar{\psi}\bar{A})\gamma_5(A\psi) \\ &= \bar{\psi}i(\bar{A}\gamma^0 A)(\bar{A}\gamma^1 A)(\bar{A}\gamma^2 A)(\bar{A}\gamma^3 A)\psi \\ &= \Lambda^0{}_\mu\Lambda^1{}_\nu\Lambda^2{}_\rho\Lambda^3{}_\sigma\bar{\psi}(i\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma)\psi \quad (\because \text{式 (303)}) \end{aligned}$$

と変換する。ここで相異なる  $\gamma$  行列は反交換するので

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$$

と書けることに気付くと,

$$\begin{aligned} \bar{\psi}'\gamma_5\psi' &= (\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\Lambda^0{}_\mu\Lambda^1{}_\nu\Lambda^2{}_\rho\Lambda^3{}_\sigma)\bar{\psi}(i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3)\psi \\ &= \det(\Lambda)\bar{\psi}\gamma_5\psi \end{aligned}$$

を得る。ところが Lorentz 変換  $x \rightarrow x'$  では

$$\det(\Lambda) \equiv \det(\Lambda^\mu{}_\nu) = \frac{\partial(x')}{\partial(x)} = \frac{\partial(x)}{\partial(x')} (= \pm 1)$$

なので、これは擬スカラーの変換則となっている。

この結果は応用しやすい公式

$$\bar{A}\gamma_5 A = \det(\Lambda^{-1})\gamma_5$$

にまとめられる。

$$\begin{aligned}\bar{\psi}'\gamma^\mu\psi' &= (\bar{\psi}\bar{A})\gamma^\mu(A\psi) \\ &= \Lambda^\mu{}_\nu(\bar{\psi}\gamma^\nu\psi), \\ \bar{\psi}'\gamma_5\gamma^\mu\psi' &= (\bar{\psi}\bar{A})\gamma_5\gamma^\mu(A\psi) \\ &= \bar{\psi}(\bar{A}\gamma_5 A)(\bar{A}\gamma^\mu A)\psi \\ &= \det(\Lambda^{-1})\Lambda^\mu{}_\nu(\bar{\psi}\gamma_5\gamma^\nu\psi), \\ \bar{\psi}'\sigma^{\mu\nu}\psi' &= (\bar{\psi}\bar{A})\frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu](A\psi) \\ &= \bar{\psi}\frac{i}{2}(\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma - \Lambda^\nu{}_\rho\Lambda^\mu{}_\sigma)\gamma^\rho\gamma^\sigma\psi \\ &= \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma\bar{\psi}\frac{i}{2}[\gamma^\rho, \gamma^\sigma]\psi \\ &= \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma(\bar{\psi}\sigma^{\rho\sigma}\psi)\end{aligned}$$

はそれぞれベクトル、擬(軸性)ベクトル、2階テンソルの変換則となっている。

■Dirac 方程式 (306) の導出 Dirac 場のラグランジアン密度 (84) に対して、Euler-Langange 方程式は Dirac 方程式 (306)

$$\begin{aligned}0 &= \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = -\frac{\partial}{\partial \bar{\psi}} \{ \bar{\psi}(i\partial - m)\psi \} = -(i\partial - m)\psi, \\ 0 &= \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = \text{partial}_\mu \left\{ \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu \psi)} (\bar{\psi}i\partial\psi) \right\} + m \frac{\partial}{\partial \psi} \bar{\psi}\psi = i(\partial_\mu \bar{\psi})\gamma^\mu + m\bar{\psi}\end{aligned}$$

を与える。例えば第 1 式は、スピノル添字  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  を明記すると、Euler-Lagrange 方程式 (33) は

$$0 = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi}_\alpha)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}_\alpha} = -\frac{\partial}{\partial \bar{\psi}_\alpha} \{ \bar{\psi}_\gamma(i\partial - m)_{\gamma\beta}\psi_\beta \} = -(i\partial - m)_{\alpha\beta}\psi_\beta$$

となる [11, pp.210–211].

これら 2 式の等価性は次のように確かめられる。まず Dirac 方程式  $i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi = 0$  の両辺の Hermite 共役をとり、式 (299): $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$  を用いると

$$0 = -i(\partial_\mu\psi^\dagger)\gamma^{\mu\dagger} - m\psi^\dagger = -i(\partial_\mu\psi^\dagger)(\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0) - m\psi^\dagger$$

となる。右から  $\gamma^0$  を掛けると、随伴する Dirac 方程式

$$i(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0$$

を得る。

■Dirac 方程式 (306) の共変性の直接的確認 式 (302):  $\psi' = A\psi$  (および  $\bar{\psi}' = \bar{\psi}\bar{A}$ ), 式 (303):  $\bar{A}\gamma^\mu A = \Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu$  より, Dirac 方程式 (306):

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi = 0, \quad i(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0$$

の第 1 式について,

$$\begin{aligned} i\gamma^\mu\partial_\mu'\psi' &= i\gamma^\mu\{(\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu\partial_\rho\}(A\psi) = i(\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu A(\bar{A}\gamma^\mu A)(\partial_\rho\psi) = i(\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu A(\Lambda^\mu{}_\sigma\gamma^\sigma)(\partial_\rho\psi) \\ &= A(i\gamma^\rho\partial_\rho\psi) \end{aligned}$$

となる. よって第 1 式は Lorentz 変換に対して共変的である.

$$i\gamma^\mu\partial_\mu'\psi' - m\psi' = A(i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi) = 0.$$

同様に第 2 式について,

$$\begin{aligned} i(\partial_\mu'\bar{\psi}')\gamma^\mu &= i\{(\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu\partial_\rho\}(\bar{\psi}\bar{A})\gamma^\mu = i(\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu(\partial_\rho\bar{\psi})(\bar{A}\gamma^\mu A)\bar{A} = i(\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu(\partial_\rho\bar{\psi})(\Lambda^\mu{}_\sigma\gamma^\sigma)\bar{A} \\ &= \{i(\partial_\rho\bar{\psi})\gamma^\rho\}\bar{A} \end{aligned}$$

となるので, 第 2 式も Lorentz 変換に対して共変的である.

$$i(\partial_\mu'\bar{\psi}')\gamma^\mu + m\bar{\psi}' = \{i(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu + m\bar{\psi}\}\bar{A} = 0.$$

#### C.4.2 表示に依らない定式化 (補足)

■ $\gamma$  行列の反交換関係 (82) が Dirac 場に対する Klein-Gordon 方程式を保証することの確認 Dirac 方程式  $i\gamma^\mu\partial_\mu\psi = m\psi$  の両辺に左から  $i\gamma^\nu\partial_\nu$  を掛けると,

$$(i\gamma^\nu\partial_\nu)(i\gamma^\mu\partial_\mu)\psi = m(i\gamma^\nu\partial_\nu)\psi = m^2\psi$$

となる. 最左辺において  $\partial_\nu\partial_\mu$  は添字  $\nu, \mu$  に関して対称なので, 積  $\gamma^\nu\gamma^\mu$  の対称部分だけが最左辺に対して寄与を持つ:

$$-\frac{1}{2}\{\gamma^\nu, \gamma^\mu\}\partial_\nu\partial_\mu\psi = m^2\psi.$$

反交換関係 (82):  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$  により, これは Klein-Gordon 方程式

$$(\square + m^2)\psi = 0$$

になる.

#### C.4.3 Dirac 方程式の非相対論的極限と電子の磁気モーメント (補足)

■スピノル表示で Dirac 方程式が式 (307) になることの確認 スピノル表示の Dirac 場と  $\gamma$  行列

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

に対して Dirac 方程式  $(i\partial\!\!\!/ - m)\psi = 0$  を具体的に書き下すと,

$$\begin{aligned} i\partial\!\!\!/ - m &= i\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\partial_0 + \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}\partial_i\right\} - m\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m & i(\partial_0 - \sigma_i\partial_i) \\ i(\partial_0 + \sigma_i\partial_i) & -m \end{pmatrix}, \\ \therefore \begin{cases} -m\xi + i(\partial_0 - \sigma_i\partial_i)\eta = 0 \\ i(\partial_0 + \sigma_i\partial_i)\xi - m\eta = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

となる. これは式 (307) に他ならない.

■Pauli 方程式 (310) の導出  $\psi \rightarrow \psi e^{-imt}$  と改めると, 場の方程式 (309) は

$$(i\partial_t - e\Phi)\varphi = \boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A})\chi, \quad (313)$$

$$(i\partial_t - e\Phi + 2m)\chi = \boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A})\varphi \quad (314)$$

となる. 第 1 近似として上式 (314) 左辺の括弧内で  $2m$  だけを残すと,

$$\chi = \frac{1}{2m} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A})\varphi$$

を得る. これは非相対論的極限 (粒子の力学的運動量  $|\mathbf{p} - e\mathbf{A}| \ll m$ ) で  $|\chi| \ll |\varphi|$  となることと整合している. これを式 (313) に代入すると,  $\varphi$  だけを含む方程式

$$(i\partial_t - e\Phi)\varphi = \frac{1}{2m} (\boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A}))^2 \varphi \quad (315)$$

が得られる. ここで  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  を任意の 3 次元ベクトルとして (演算子であっても良い), Pauli 行列の公式

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

が成り立つことを思い出そう [1, p.223]. これを  $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \hat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A} \equiv \hat{\mathbf{f}}$  として適用すると

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{f}})^2 = \hat{\mathbf{f}}^2 + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\mathbf{f}} \times \hat{\mathbf{f}})$$

であり,

$$(\hat{\mathbf{f}} \times \hat{\mathbf{f}})\varphi = -e(\hat{\mathbf{p}} \times \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \hat{\mathbf{p}})\varphi$$

の右辺括弧内における  $\hat{\mathbf{p}} = -i\nabla$  は  $\mathbf{A}$  と  $\varphi$  の両方に作用するため,

$$\begin{aligned} (\hat{\mathbf{f}} \times \hat{\mathbf{f}})\varphi &= -e\{(\hat{\mathbf{p}} \times \mathbf{A})\varphi + (\hat{\mathbf{p}}\varphi) \times \mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\hat{\mathbf{p}}\varphi)\} \\ &= ie\mathbf{B}\varphi \quad (\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}) \end{aligned}$$

となることに注意すると,

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A}))^2 \varphi = \{(\hat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A})^2 - e\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}\} \varphi$$

を得る. これを上式 (315) に代入すると, Pauli 方程式 (310) が導かれる.

■古典的な軌道運動と結びついた磁気モーメントの, 磁場との相互作用エネルギー ここでは光速  $c$  を明記し,  $m, e$  をそれぞれ任意の粒子の質量と電荷とする. (少なくとも局所的には) 一様な磁場 (磁束密度)  $\mathbf{B}$  を仮定すると, これはベクトル・ポテンシャル  $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{r}$  を持つので, 荷電粒子系のラグランジアンには孤立系の場合と比べて付加的な項

$$\begin{aligned} L_B &= \sum \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \sum \frac{e}{c} \left\{ \left( \frac{1}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{r} \right) \cdot \mathbf{v} \right\} = \sum \frac{e}{2c} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{B} = \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}, \\ \boldsymbol{\mu} &\equiv \frac{1}{2c} \sum e \mathbf{r} \times \mathbf{v} : \text{磁気モーメント} \end{aligned}$$

が現れる. これは磁場と磁気モーメントの相互作用エネルギーが  $-\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$  で与えられることを意味する. 特に 1 粒子系の磁気モーメントは

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{e}{2mc} \mathbf{M}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{r} \times (m\mathbf{v})$$

と書くことができ, (軌道) 角運動量の非相対論的な表式  $\mathbf{M}$  との比は  $e/2mc$  である [4, pp.119–120].

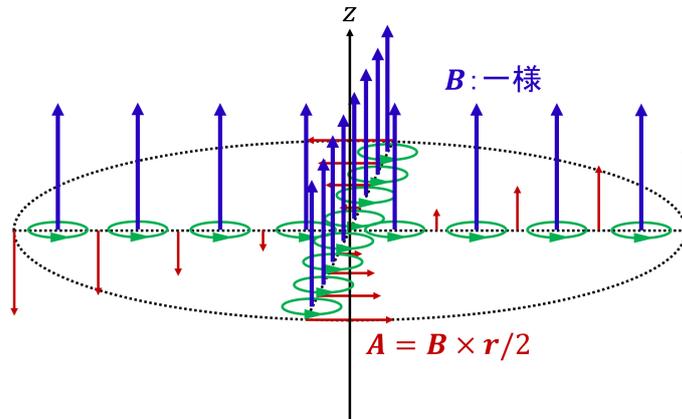


図 53 一様磁場  $\mathbf{B}$  のベクトル・ポテンシャル  $\mathbf{A} = \mathbf{B} \times \mathbf{r}/2$  の渦を緑色で表している。

ベクトル・ポテンシャル  $\mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{r}$  について この  $\mathbf{A}$  が一様な磁束密度  $\mathbf{B}$  を導くことは、

$$\left[ \nabla \times \left( \frac{1}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{r} \right) \right]_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \partial_j (\varepsilon_{klm} B_l x_m) = \frac{1}{2} (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) B_j \delta_{jm} = \frac{1}{2} (3B_i - B_i) = B_i$$

と確かめられる。視覚的には図 53 のようにイメージできる (磁場の方向を  $z$  軸にとって描いた)。

## 教科書の付録 A

教科書の付録 A では、Dirac 方程式に関係する主要な結果の紹介・導出を行っている。これについて本稿で既に説明済みの事項との重複をなるべく避け、簡単にノートをとっておく。

### A.1 Dirac 方程式

特筆 (p.250, 1.1,2): “この付録では、末尾の A.8 節を除き、以下に示す性質はすべて式 (A.4)–(A.6) だけに基づく帰結であり、 $\gamma$  行列の表示の選び方には依存しない。”

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \text{ は性質} \quad \{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0, \quad (\gamma^5)^2 = 1, \quad \gamma^{5\dagger} = \gamma^5 \quad (316)$$

を満たす。ただし  $\mu = 0, 1, 2, 3$  であり、ギリシア文字は 5 を表すことは決してないものとする。

$i, j, k$  に 1, 2, 3 を巡回的 (サイクリック) な順序で充てると、 $\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$  に対して

$$\sigma^{ij} = -\gamma^0\gamma^5\gamma^k \quad (317)$$

が成り立つ。

■ $\gamma^5$  の満たす性質 (316) の証明  $\gamma$  行列の表示に依らない性質

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad \gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$$

に基づいて次のように証明できる。

まず第 1 式  $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$  について、 $\gamma^\mu$  は  $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$  において自分自身と等しい行列  $\gamma^\mu$  とは交換する (すり抜ける) のに対し、それ以外の 3 つの  $\gamma$  行列とは反交換するから、

$$\gamma^\mu\gamma^5 = \gamma^\mu(i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3) = -\gamma^5\gamma^\mu, \quad \therefore \{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0.$$

次に第 2 式  $(\gamma^5)^2 = 1$  について、相異なる  $\gamma$  行列は反交換し、また

$$(\gamma^0)^2 = 1, \quad (\gamma^i)^2 = -1 \quad (i \text{ で和をとらない})$$

となることから、

$$(\gamma^5)^2 = i^2(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3)(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3) = -(\gamma^0)^2(\gamma^1)^2(\gamma^2)^2(\gamma^3)^2 = 1$$

を得る。

最後に第 3 式  $\gamma^{5\dagger} = \gamma^5$  は、 $\gamma^0$  が Hermite であり  $\gamma^i$  が反 Hermite であることに注意して

$$\gamma^{5\dagger} = -i\gamma^{3\dagger}\gamma^{2\dagger}\gamma^{1\dagger}\gamma^{0\dagger} = i\gamma^3\gamma^2\gamma^1\gamma^0 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \gamma^5$$

と確かめられる。

■ $\sigma^{ij}$  の表式 (317) の証明 相異なる  $\gamma$  行列は反交換するので、 $i \neq j$  に対して

$$[\gamma^i, \gamma^j] = \gamma^i\gamma^j - \gamma^j\gamma^i = 2\gamma^i\gamma^j, \quad \therefore \sigma^{ij} = \frac{i}{2}[\gamma^i, \gamma^j] = i\gamma^i\gamma^j$$

である。他方,

$$-\gamma^0\gamma^5\gamma^k = -i\gamma^0(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3)\gamma^k = -i\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^k = \begin{cases} i\gamma^2\gamma^3 & (k=1) \\ i\gamma^3\gamma^1 & (k=2) \\ i\gamma^1\gamma^2 & (k=3) \end{cases}$$

であり (第3の等号は  $(\gamma^k)^2 = -1$  ( $k$  で和をとらない) による), これらを等置して式 (317):

$$\sigma^{ij} = -\gamma^0\gamma^5\gamma^k$$

を得る。

## A.2 縮約の公式

$\gamma$  行列の反交換関係から, 以下の (縮約の) 公式が導かれる。

$$\gamma_\lambda\gamma^\lambda = 4, \quad (318)$$

$$\gamma_\lambda\gamma^\alpha\gamma^\lambda = -2\gamma^\alpha, \quad (319)$$

$$\gamma_\lambda\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\lambda = 4g^{\alpha\beta}, \quad (320)$$

$$\gamma_\lambda\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\lambda = -2\gamma^\gamma\gamma^\beta\gamma^\alpha, \quad (321)$$

$$\gamma_\lambda\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta\gamma^\lambda = 2(\gamma^\delta\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma + \gamma^\gamma\gamma^\beta\gamma^\alpha\gamma^\delta). \quad (322)$$

ここに4元ベクトル  $A, B, \dots$  を“縮約”すると

$$\gamma_\lambda A \gamma^\lambda = -2A,$$

$$\gamma_\lambda A B \gamma^\lambda = 4A \cdot B,$$

$$\gamma_\lambda A B C \gamma^\lambda = -2C B A$$

$$\gamma_\lambda A B C D \gamma^\lambda = 2(D A B C + C B A D)$$

が得られる。

■公式 (318)–(322) の導出 これらの公式は“縮約”されている2つの  $\gamma$  行列に挟まれた行列の個数が1つ少ない公式へと帰着させることで, 逐次的に導くことができる。実際, まず反交換関係  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$  の両辺に  $g_{\mu\nu}$  を掛け,  $\mu, \nu$  について和をとると, 最初の公式 (318):  $\gamma_\mu\gamma^\mu = 4$  を得る。これを用いて,

$$\begin{aligned} \gamma_\lambda\gamma^\alpha\gamma^\lambda &= -\gamma_\lambda\gamma^\lambda + \gamma_\lambda\{\gamma^\alpha, \gamma^\lambda\} \\ &= -4\gamma^\alpha + \gamma_\lambda 2g^{\alpha\lambda} \quad (\because \text{式 (318)}) \\ &= -2\gamma^\alpha : (319), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_\lambda\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\lambda &= -\gamma_\lambda\gamma^\alpha\gamma^\lambda\gamma^\beta + \gamma_\lambda\gamma^\alpha 2g^{\beta\lambda} \\ &= 2\{\gamma^\alpha, \gamma^\beta\} \quad (\because \text{式 (319)}) \\ &= 4g^{\alpha\beta} : (320), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_\lambda\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\lambda &= -\gamma_\lambda\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\lambda\gamma^\gamma + \gamma_\lambda\gamma^\alpha\gamma^\beta 2g^{\gamma\lambda} \\ &= -4g^{\alpha\beta}\gamma^\gamma + 2\gamma^\gamma\gamma^\alpha\gamma^\beta \quad (\because \text{式 (320)}) \\ &= -4g^{\alpha\beta}\gamma^\gamma + 2\gamma^\gamma(-\gamma^\beta\gamma^\alpha + 2g^{\alpha\beta}) \\ &= -2\gamma^\gamma\gamma^\beta\gamma^\alpha : (321), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_\lambda \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\delta \gamma^\lambda &= -\gamma_\lambda \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\lambda \gamma^\delta + \gamma_\lambda \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma 2g^{\delta\lambda} \quad (\because \text{式 (321)}) \\ &= 2(\gamma^\delta \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma + \gamma^\gamma \gamma^\beta \gamma^\alpha \gamma^\delta) : (322)\end{aligned}$$

とできる。

■反対称因子  $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$  の縮約公式 (A.14c) について

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = - \begin{vmatrix} \delta_\mu^\alpha & \delta_\nu^\alpha & \delta_\rho^\alpha & \delta_\sigma^\alpha \\ \delta_\mu^\beta & \delta_\nu^\beta & \delta_\rho^\beta & \delta_\sigma^\beta \\ \delta_\mu^\gamma & \delta_\nu^\gamma & \delta_\rho^\gamma & \delta_\sigma^\gamma \\ \delta_\mu^\delta & \delta_\nu^\delta & \delta_\rho^\delta & \delta_\sigma^\delta \end{vmatrix}$$

の両辺は添字  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  および  $\mu, \nu, \rho, \sigma$  について反対称であり,  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (\mu, \nu, \rho, \sigma) = (0, 1, 2, 3)$  のとき左辺は  $-1$  であり, 右辺もまた単位行列の行列式の符号を入れ替えたものなので  $-1$  となり, 両辺の値は一致する。よって任意の添字の組合せについて上式が成立する。同様に

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\mu\nu\rho\delta} = - \begin{vmatrix} \delta_\mu^\alpha & \delta_\nu^\alpha & \delta_\rho^\alpha \\ \delta_\mu^\beta & \delta_\nu^\beta & \delta_\rho^\beta \\ \delta_\mu^\gamma & \delta_\nu^\gamma & \delta_\rho^\gamma \end{vmatrix}$$

を理解できる。ここからさらに添字を縮約すると, 公式 (A.14c):

$$\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \varepsilon_{\alpha\beta\sigma\tau} = -2(\delta_\sigma^\mu \delta_\tau^\nu - \delta_\tau^\mu \delta_\sigma^\nu), \quad \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\nu} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\tau} = -6\delta_\tau^\nu, \quad \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = -24$$

が得られる [4, p.20].

なお最後の式  $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = -24$  はそれ自体で理解することもできる。すなわち  $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$  の反対称性より左辺は添字の相異なる  $4! = 24$  個の項の和であり, その各々は  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$  が  $(0, 1, 2, 3)$  の偶置換か奇置換のいずれかである。

- 偶置換の場合  $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = +1, \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = -1$
- 奇置換の場合  $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = -1, \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = +1$

なので, 24 個の項はすべて  $(\pm 1)(\mp 1) = -1$  に等しい。よって  $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = -24$  である。

### A.3 対角和の公式

特に有用となる,  $\gamma$  行列の積のトレースに対する公式 (A.16), (A.17)(p.251) について触れておく。  $\gamma$  行列を定義付ける反交換関係 (82):  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$  だけから次のことが導かれる。

まず, 奇数個の  $\gamma$  行列  $\gamma^\alpha, \gamma^\beta, \dots, \gamma^\mu, \gamma^\nu$  の積のトレースはゼロになる:

$$\text{tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta \dots \gamma^\mu \gamma^\nu) = 0. \quad (323)$$

また偶数個の  $\gamma$  行列の積に対するトレースの公式としては, 本稿の理解には次の 2 つを挙げておけば十分である:

$$\text{tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta) = 4g^{\alpha\beta}, \quad (324)$$

$$\text{tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\delta) = 4(g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} - g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} + g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma}). \quad (325)$$

トレースを評価する際には, 次の関係も有用である ( $A, B$  は任意の 4 元ベクトル)。

$$A\cancel{B} = A \cdot B - i\sigma^{\alpha\beta} A_\alpha B_\beta = 2A \cdot B - \cancel{B}A. \quad (326)$$

この公式の特例として,

$$\begin{aligned} AA &= A^2, \\ AB &= -BA \quad (A \cdot B = 0 \text{ のとき}) \end{aligned} \quad (327)$$

が成り立つ.

16.6.1 節 (p.448) で利用する公式

$$\text{Tr}(\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\delta) = -4i \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \quad (328)$$

を追記しておく.

■ $\gamma$  行列の積のトレースに対する公式 (導出)  $\gamma$  行列の積のトレースに対する公式 (323),(324),(325) を導こう.

証明の準備として次のことに注意する. まず任意の  $n \times n$  行列  $U, V$  に対して

$$\text{tr}(UV) = \sum_i \sum_j U_{ij} V_{ji} = \sum_j \sum_i V_{ji} U_{ij} = \text{tr}(VU) \quad (329)$$

である. また

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$$

を導入すると, これは

$$\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0 \quad (\mu = 0, 1, 2, 3), \quad (330)$$

$$(\gamma^5)^2 = 1 \quad (331)$$

を満たす (pp.250–251).

実際,  $\gamma^5$  が  $\gamma^\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ) と反交換すること (330):  $\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$  は次のように理解できる. すなわち  $\gamma$  行列  $\gamma^\mu$  は自分自身とは交換し, 反交換関係 (82):  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$  により異なる  $\gamma$  行列  $\gamma^\nu$  ( $\nu \neq \mu$ ) とは反交換する. このことを用いて積  $\gamma^\mu \gamma^5$  における  $\gamma^\mu$  を  $\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$  の右側に移動すると  $\gamma^\mu \gamma^5 = -\gamma^5 \gamma^\mu$  となる.

さらに式 (331):  $(\gamma^5)^2 = 1$  について,  $\gamma$  行列の反交換関係 (82):  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$  によれば異なる  $\gamma$  行列どうしは反交換するので

$$\begin{aligned} (\gamma^5)^2 &= (i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3)(i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3) \\ &= \dots \\ &= i^2(\gamma^0)^2(\gamma^1)^2(\gamma^2)^2(\gamma^3)^2 \end{aligned}$$

となる. ここで再び反交換関係 (82):  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$  を考えると, これは

$$(\gamma^0)^2 = 1, \quad (\gamma^i)^2 = -1 \quad (i = 1, 2, 3)$$

を意味するので式 (331):  $(\gamma^5)^2 = 1$  を得る.

以上を踏まえ, 奇数個の  $\gamma$  行列の積  $\gamma^\alpha \gamma^\beta \dots \gamma^\mu \gamma^\nu$  のトレースがゼロになること (323):

$$\text{tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta \dots \gamma^\mu \gamma^\nu) = 0$$

を証明する.

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta \cdots \gamma^\mu \gamma^\nu) &= \mathrm{tr}[(\gamma^5)^2 \gamma^\alpha \gamma^\beta \cdots \gamma^\mu \gamma^\nu] & (\because \text{式 (331)}) \\ &= \mathrm{tr}(\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\beta \cdots \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5) & (\because \text{式 (329)})\end{aligned}$$

の最右辺の積  $\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\beta \cdots \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5$  において, 反交換関係 (330) を用いて左端の  $\gamma^5$  を右端の  $\gamma^5$  の左隣まで移動すると,  $\gamma^\alpha \gamma^\beta \cdots \gamma^\mu \gamma^\nu$  は奇数個の  $\gamma$  行列の積だから

$$\begin{aligned}\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\beta \cdots \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5 &= -\gamma^\alpha \gamma^\beta \cdots \gamma^\mu \gamma^\nu (\gamma^5)^2 \\ &= -\gamma^\alpha \gamma^\beta \cdots \gamma^\mu \gamma^\nu & (\because \text{式 (331)})\end{aligned}$$

となる. よって

$$\mathrm{tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta \cdots \gamma^\mu \gamma^\nu) = -\mathrm{tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta \cdots \gamma^\mu \gamma^\nu), \quad \therefore \mathrm{tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta \cdots \gamma^\mu \gamma^\nu) = 0 : (323)$$

を得る (pp.252-253).

2 個の  $\gamma$  行列の積に対するトレースの公式 (324) の証明に移ろう.  $\gamma$  行列の反交換関係 (82) は, 正確には  $4 \times 4$  の単位行列  $I$  を用いて

$$\{\gamma^\alpha, \gamma^\beta\} = 2g^{\alpha\beta} I$$

と書ける. よって両辺のトレースをとり

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\{\gamma^\alpha, \gamma^\beta\} &= \mathrm{tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta) + \mathrm{tr}(\gamma^\beta \gamma^\alpha) = 2\mathrm{tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta), & (\because \text{式 (329)}) \\ \mathrm{tr} I &= 4\end{aligned}$$

に注意すると公式 (324):  $\mathrm{tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta) = 4g^{\alpha\beta}$  を得る.

後の公式 (325) の証明の見通しを良くするため, 以上の証明を次のように書き換えられることに注意する. まず恒等式 (329) により

$$\mathrm{tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta) = \mathrm{tr}(\gamma^\beta \gamma^\alpha)$$

である. ここで右辺において

$$\gamma^\beta \gamma^\alpha = -\gamma^\alpha \gamma^\beta + \{\gamma^\alpha, \gamma^\beta\} = -\gamma^\alpha \gamma^\beta + 2g^{\alpha\beta} I \quad (\because \text{式 (82)})$$

と書き換えると再び公式 (324) が導かれる.

同様に 4 個の  $\gamma$  行列の積に対するトレースの公式 (325) を証明できる. 実際, 恒等式 (329) により

$$\mathrm{tr}[\gamma^\alpha (\gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\delta)] = \mathrm{tr}[(\gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\delta) \gamma^\alpha]$$

である. ここで右辺の積  $(\gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\delta) \gamma^\alpha$  において, 反交換関係 (82) を用いて右端の  $\gamma^\alpha$  を左端に戻すと

$$\begin{aligned}(\gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\delta) \gamma^\alpha &= -\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\delta + \{\gamma^\alpha, \gamma^\beta\} \gamma^\gamma \gamma^\delta - \gamma^\beta \{\gamma^\alpha, \gamma^\gamma\} \gamma^\delta + \gamma^\beta \gamma^\gamma \{\gamma^\alpha, \gamma^\delta\} \\ &= -\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\delta + 2g^{\alpha\beta} \gamma^\gamma \gamma^\delta - 2g^{\alpha\gamma} \gamma^\beta \gamma^\delta + 2g^{\alpha\delta} \gamma^\beta \gamma^\gamma\end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\delta) &= g^{\alpha\beta} \mathrm{tr}(\gamma^\gamma \gamma^\delta) - g^{\alpha\gamma} \mathrm{tr}(\gamma^\beta \gamma^\delta) + g^{\alpha\delta} \mathrm{tr}(\gamma^\beta \gamma^\gamma) \\ &= 4(g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} - g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} + g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma}) : (325) & (\because \text{式 (324)} : \mathrm{tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta) = 4g^{\alpha\beta})\end{aligned}$$

を得る.

■式 (326) の証明

$$\sigma^{\alpha\beta} A_\alpha B_\beta = \frac{i}{2} [\gamma^\alpha, \gamma^\beta] A_\alpha B_\beta = \frac{i}{2} (A\beta - \beta A)$$

より, 式 (326) は

$$A\beta = A \cdot B + \frac{1}{2} (A\beta - \beta A) = 2A \cdot B - \beta A$$

を意味する. ところが  $\{\gamma^\alpha, \gamma^\beta\} = 2g^{\alpha\beta}$  の両辺を  $A_\alpha B_\beta$  と縮約すると

$$A\beta + \beta A = 2A \cdot B$$

となるから, 上式は成り立っている.

■式 (328) の導出 まず  $\gamma^\alpha, \gamma^\beta, \gamma^\gamma, \gamma^\delta$  が相異なる場合を考えると, それらは反交換するので対角和  $\text{Tr}(\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\delta)$  は添字  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  について完全反対称となる. よって

$$\text{Tr}(\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\delta) = \text{const} \times \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$$

とおける. 右辺の係数は  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (0, 1, 2, 3)$  の場合を考えると,

$$\begin{aligned} \text{const} &= \text{Tr}(\gamma^5 \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3) \\ &= i \text{Tr}(\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3) \\ &= i \text{Tr}((\gamma^0)^2 (\gamma^1)^2 (\gamma^2)^2 (\gamma^3)^2) \\ &= -4i \quad (\because (\gamma^0)^2 = 1, (\gamma^i)^2 = -1) \end{aligned}$$

と定まる. よって式 (328):

$$\text{Tr}(\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\delta) = -4i \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$$

が成立する.

次に行列  $\gamma^\alpha, \gamma^\beta, \gamma^\gamma, \gamma^\delta$  の中に, 互いに等しいものがある場合を考える. 例えば  $\alpha = \gamma$  とし,  $\gamma$  行列の反交換関係より  $(\gamma^\alpha)^2 = g^{\alpha\alpha}$  であることを思い出すと

$$\text{Tr}(\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\delta) = -g^{\alpha\alpha} \text{Tr}(\gamma^5 \gamma^\beta \gamma^\delta) = 0$$

となる ( $\alpha$  について和をとらない). よってこのような場合にも式 (328) は正しい.

## A.4 平面波状態

4.2 節のノートを併せて参照. 正/負エネルギー解の  $u, v$ -スピノルは

$$\bar{u}_r(\mathbf{p})(\not{\mathbf{p}} - m) = 0, \quad \bar{v}_r(\mathbf{p})(\not{\mathbf{p}} + m) = 0 \quad (332)$$

を満たす.

スピノルの正規直交関係 (91):

$$u_r^\dagger(\mathbf{p}) u_s(\mathbf{p}) = v_r^\dagger(\mathbf{p}) v_s(\mathbf{p}) = \frac{E_{\mathbf{p}}}{m} \delta_{rs}, \quad u_r^\dagger(\mathbf{p}) v_s(-\mathbf{p}) = 0$$

から

$$\bar{u}_r(\mathbf{p}) u_s(\mathbf{p}) = -\bar{v}_r(\mathbf{p}) v_s(\mathbf{p}) = \delta_{rs}, \quad \bar{u}_r(\mathbf{p}) v_s(\mathbf{p}) = \bar{v}_r(\mathbf{p}) u_s(\mathbf{p}) = 0 \quad (333)$$

が導かれる.

また  $u, v$ -スピノルは “完全性の条件”

$$\sum_{r=1}^2 [u_{r\alpha}(\mathbf{p})\bar{u}_{r\beta}(\mathbf{p}) - v_{r\alpha}(\mathbf{p})\bar{v}_{r\beta}(\mathbf{p})] = \delta_{\alpha\beta} \quad (334)$$

を満たす.

■式 (332) の導出 式 (A.25)(あるいは式 (89)):

$$(\not{\mathbf{p}} - m)u_r(\mathbf{p}) = 0, \quad (\not{\mathbf{p}} + m)v_r(\mathbf{p}) = 0$$

の両辺の Hermite 共役をとり, 式 (4.16)(あるいは式 (299)):  $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$  を代入し, 両辺に右から  $\gamma^0$  を掛けると式 (332):

$$\bar{u}_r(\mathbf{p})(\not{\mathbf{p}} - m) = 0, \quad \bar{v}_r(\mathbf{p})(\not{\mathbf{p}} + m) = 0$$

を得る.

■スピノルの直交関係 (333) の導出 式 (333) はユニタリー変換に対して不変だから, 特定の表示で証明できれば十分である. そこでスピノル表示

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

を利用する. 証明は静止系 ( $\mathbf{p} = 0$ ) を経由して行うことができる.

$$u_r(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} u_r^A(\mathbf{p}) \\ u_r^B(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \quad v_r(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} v_r^A(\mathbf{p}) \\ v_r^B(\mathbf{p}) \end{pmatrix}$$

と書くと, 静止系 ( $\mathbf{p} = 0$ ) では

$$\begin{aligned} 0 &= (\not{\mathbf{p}} - m)u_r = (m\gamma^0 - m)u_r = m \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} u_r = m \begin{pmatrix} -u_r^A + u_r^B \\ u_r^A - u_r^B \end{pmatrix}, \\ 0 &= (\not{\mathbf{p}} + m)v_r = (m\gamma^0 + m)v_r = m \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} v_r = m \begin{pmatrix} v_r^A + v_r^B \\ v_r^A + v_r^B \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるから,  $u_r^A = u_r^B \equiv U_r, v_r^A = -v_r^B \equiv V_r$  とできる.

これを踏まえ, まず第 1 式

$$\bar{u}_r(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p}) = -\bar{v}_r(\mathbf{p})v_s(\mathbf{p}) = \delta_{rs}$$

を導出しよう. 正規直交関係 (91) の第 1 式

$$u_r^\dagger(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p}) = v_r^\dagger(\mathbf{p})v_s(\mathbf{p}) = \frac{E_{\mathbf{p}}}{m}\delta_{rs}$$

は静止系では

$$2U_r^\dagger U_s = 2V_r^\dagger V_s = \delta_{rs}$$

となる. ところが静止系では

$$\bar{u}_r u_s = 2U_r^\dagger U_s, \quad \bar{v}_r v_s = -2V_r^\dagger V_s$$

と計算されるから,

$$\bar{u}_r u_s = \delta_{rs}, \quad \bar{v}_r v_s = -\delta_{rs}$$

でなければならない。ところが左辺の  $\bar{\psi}\psi$  という形の積は Lorentz スカラーであることを、我々は既にスピノルの変換則に基づいて証明してある (式 (304) の箇所を参照)。よって任意の座標系で

$$\bar{u}_r(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p}) = -\bar{v}_r(\mathbf{p})v_s(\mathbf{p}) = \delta_{rs}$$

が成立する (右辺の  $\delta_{rs}$  における  $r, s$  は Lorentz 添字ではないことに注意)。

同様に第 2 式

$$\bar{u}_r(\mathbf{p})v_s(\mathbf{p}) = \bar{v}_r(\mathbf{p})u_s(\mathbf{p}) = 0$$

も示される。実際、静止系において

$$\bar{u}_r v_s = -U_r^\dagger V_s + U_r^\dagger V_s = 0, \quad \bar{v}_r u_s = V_r^\dagger U_s - V_r^\dagger U_s = 0$$

は既に自動的に満たされており、これを再び任意の座標系に移せば良い。

■  $u, v$ -スピノルに対する完全性の条件 (334) の説明・導出 任意のスピノルの  $\mathbf{p}$  成分は、 $u, v$ -スピノルを用いて

$$\Psi(\mathbf{p}) = \sum_r \{ \Psi_r^{(u)}(\mathbf{p}) u_r(\mathbf{p}) + \Psi_r^{(v)}(\mathbf{p}) v_r(\mathbf{p}) \} \quad (335)$$

と展開できる。実際、スピノルの正規直交関係 (333) により展開係数を

$$\Psi_r^{(u)} = \bar{u}_r \Psi, \quad \Psi_r^{(v)} = -\bar{v}_r \Psi \quad (336)$$

と定めることができる (煩わしい引数  $\mathbf{p}$  を省略した)。この事実は、完全性の条件 (334) として表すことができる。それを示すために、展開係数の表式 (336) をもとの式 (335) に代入して

$$\Psi = \sum_r \{ (\bar{u}_r \Psi) u_r - (\bar{v}_r \Psi) v_r \}$$

と書く。あるいはスピノル添字を明記すると

$$\Psi_\alpha = \sum_r (\bar{u}_{r\beta} \Psi_\beta u_{r\alpha} - \bar{v}_{r\beta} \Psi_\beta v_{r\alpha}) = \left[ \sum_r (\bar{u}_{r\beta} u_{r\alpha} - \bar{v}_{r\beta} v_{r\alpha}) \right] \Psi_\beta$$

となるので、最右辺において式 (334):

$$\sum_r (u_{r\alpha} \bar{u}_{r\beta} - v_{r\alpha} \bar{v}_{r\beta}) = \delta_{\alpha\beta}$$

が成り立つ。

## A.5 エネルギー射影演算子

演算子

$$\Lambda^\pm(\mathbf{p}) = \frac{\pm \not{p} + m}{2m} \quad (337)$$

は正エネルギー解と負エネルギー解を射影する性質を持つため、エネルギー射影演算子と呼ばれる。実際、

$$\not{p} u_r(\mathbf{p}) = m u_r(\mathbf{p}), \quad \not{p} v_r(\mathbf{p}) = -m v_r(\mathbf{p}), \quad \bar{u}_r(\mathbf{p}) \not{p} = m \bar{u}_r(\mathbf{p}), \quad \bar{v}_r(\mathbf{p}) \not{p} = -m \bar{v}_r(\mathbf{p})$$

を用いると,

$$\begin{aligned}\Lambda^+(\mathbf{p})u_r(\mathbf{p}) &= u_r(\mathbf{p}), & \Lambda^-(\mathbf{p})v_r(\mathbf{p}) &= v_r(\mathbf{p}), \\ \bar{u}_r(\mathbf{p})\Lambda^+(\mathbf{p}) &= \bar{u}_r(\mathbf{p}), & \bar{v}_r(\mathbf{p})\Lambda^-(\mathbf{p}) &= \bar{v}_r(\mathbf{p}),\end{aligned}\tag{338}$$

$$\begin{aligned}\Lambda^+(\mathbf{p})v_r(\mathbf{p}) &= \Lambda^-(\mathbf{p})u_r(\mathbf{p}) = 0, \\ \bar{v}_r(\mathbf{p})\Lambda^+(\mathbf{p}) &= \bar{u}_r(\mathbf{p})\Lambda^-(\mathbf{p}) = 0\end{aligned}\tag{339}$$

が成り立つ. また式 (327):  $\not{p}\not{p} = p^2 (= m^2)$  より, 射影演算子の冪等性\*69

$$[\Lambda^\pm(\mathbf{p})]^2 = \Lambda^\pm(\mathbf{p})$$

および

$$\Lambda^\pm(\mathbf{p})\Lambda^\mp(\mathbf{p}) = 0, \quad \Lambda^+(\mathbf{p}) + \Lambda^-(\mathbf{p}) = 1$$

が満たされる. 完全性の関係 (334) を用いると, 射影演算子の便利な表式

$$\Lambda_{\alpha\beta}^+(\mathbf{p}) = \sum_{r=1}^2 u_{r\alpha}(\mathbf{p})\bar{u}_{r\beta}(\mathbf{p}), \quad \Lambda_{\alpha\beta}^-(\mathbf{p}) = -\sum_{r=1}^2 v_{r\alpha}(\mathbf{p})\bar{v}_{r\beta}(\mathbf{p})\tag{340}$$

が導かれる.

■エネルギー射影演算子の表式 (340) の導出 完全性の関係 (334) より式 (340):

$$\begin{aligned}\Lambda_{\alpha\beta}^\pm(\mathbf{p}) &= \Lambda_{\alpha\gamma}^\pm(\mathbf{p})\delta_{\gamma\beta} \\ &= \Lambda_{\alpha\gamma}^\pm(\mathbf{p}) \sum_{r=1}^2 [u_{r\gamma}(\mathbf{p})\bar{u}_{r\beta}(\mathbf{p}) - v_{r\gamma}(\mathbf{p})\bar{v}_{r\beta}(\mathbf{p})] \\ &= \begin{cases} \sum_r u_{r\alpha}(\mathbf{p})\bar{u}_{r\beta}(\mathbf{p}) & (\text{複号の+に対して}) \\ -\sum_r v_{r\alpha}(\mathbf{p})\bar{v}_{r\beta}(\mathbf{p}) & (\text{複号の-に対して}) \end{cases}\end{aligned}$$

を得る. 最後の等号は射影演算子の性質 (338), (339) による.

## A.6 ヘリシティ射影演算子・スピン射影演算子

我々は固有方程式 (90):

$$\sigma_{\mathbf{p}}u_r(\mathbf{p}) = (-1)^{r+1}u_r(\mathbf{p}), \quad \sigma_{\mathbf{p}}v_r(\mathbf{p}) = (-1)^r v_r(\mathbf{p}), \quad r = 1, 2$$

を満たす  $u, v$ -スピノルを導入した. これは  $u_1(\mathbf{p})$  がヘリシティ正の,  $u_2(\mathbf{p})$  がヘリシティ負の正エネルギー電子 (Dirac 粒子) を表すことを意味している.

参考——スピノル  $v_r(\mathbf{p})$  の空孔理論による解釈 場の量子論は多粒子系の理論と捉えて初めて無矛盾な理論となるけれど, 負エネルギー状態  $v_r(\mathbf{p})$  についても単一粒子理論の枠内で解釈することができる. 例えば  $v_1(\mathbf{p})$  は運動量が  $-\mathbf{p}$  の負エネルギー電子を表しており,  $\sigma_{\mathbf{p}}v_1(\mathbf{p}) = -v_1(\mathbf{p})$  よりスピンは  $-\mathbf{p}$  と平行なので, ヘリシティは正である. 空孔理論の観点では, この負エネルギー電子の欠如は運動量  $\mathbf{p}$ , ヘリシティ正の陽電子に対応する.

\*69 一般に射影は1度行くと, その後で何度射影を繰り返しても結果は変わらない.

さて、上式 (90) により演算子

$$\Pi^\pm(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}(1 \pm \sigma_{\mathbf{p}})$$

は正/負のヘリシティ解を射影することが分かる。

$$\Pi^+(\mathbf{p})u_r(\mathbf{p}) = \delta_{1r}u_r(\mathbf{p}), \quad \Pi^+(\mathbf{p})v_r(\mathbf{p}) = \delta_{2r}v_r(\mathbf{p}), \quad \Pi^-(\mathbf{p})u_r(\mathbf{p}) = \delta_{2r}u_r(\mathbf{p}), \quad \Pi^-(\mathbf{p})v_r(\mathbf{p}) = \delta_{1r}v_r(\mathbf{p}).$$

実際、 $\Pi^\pm(\mathbf{p})$  は性質

$$[\Pi^\pm(\mathbf{p})]^2 = \Pi^\pm(\mathbf{p}), \quad \Pi^\pm(\mathbf{p})\Pi^\mp(\mathbf{p}) = 0, \quad \Pi^+(\mathbf{p}) + \Pi^-(\mathbf{p}) = 1 \quad (\text{複号同順}) \quad (341)$$

$$[\Lambda^\pm(\mathbf{p}), \Pi^\pm(\mathbf{p})] = 0 \quad (\text{複号任意}) \quad (342)$$

を満たし、上式 (341) より互いに直交する状態への射影演算子となっている。

質量がゼロの Dirac 粒子に対してヘリシティ射影演算子は

$$\Pi^\pm(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5) \quad (343)$$

で与えられる。

スピン射影演算子については省略する。

■式 (341) の導出  $\sigma_{\mathbf{p}}^2 = 1$  を証明しさえすれば十分である。この目的のためには、 $\sigma^{ij}$  の式 (317) が便利である。これを用いると

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathbf{p}} &= \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{|\mathbf{p}|} = \frac{p^k}{|\mathbf{p}|} (-\gamma^0 \gamma^5 \gamma^k), \\ \therefore \sigma_{\mathbf{p}}^2 &= \frac{p^k p^l}{|\mathbf{p}|^2} (\gamma^0 \gamma^5 \gamma^k) (\gamma^0 \gamma^5 \gamma^l) = -\frac{p^k p^l}{|\mathbf{p}|^2} (\gamma^0)^2 (\gamma^5)^2 \gamma^k \gamma^l = -\frac{p^k p^l}{|\mathbf{p}|^2} \gamma^k \gamma^l \end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} p^k \gamma^k &= \not{p} - p^0 \gamma^0, \\ \therefore (p^k \gamma^k)^2 &= \not{p}^2 - p^0 \{\not{p}, \gamma^0\} + (p^0)^2 (\gamma^0)^2 \\ &= p^2 + (p^0)^2 - p^0 p_\mu \cdot 2g^{0\mu} \quad (\because \text{式 (327)} : \not{p}^2 = p^2) \\ &= p^2 - (p^0)^2 \\ &= -|\mathbf{p}|^2 \end{aligned}$$

なので、 $\sigma_{\mathbf{p}}^2 = 1$  を得る。

■式 (342) の導出 ここでは  $\sigma_{\mathbf{p}}$  の表式として  $\sigma^{ij}$  の式 (317) を利用する代わりに、

$$\sigma_{\mathbf{p}} = \frac{p^i}{|\mathbf{p}|} \left( \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \sigma^{jk} \right) = \frac{ip^i}{4|\mathbf{p}|} \varepsilon_{ijk} [\gamma^j, \gamma^k] = \frac{ip^i}{2|\mathbf{p}|} \varepsilon_{ijk} \gamma^j \gamma^k$$

と書こう。すると

$$[\Lambda^+(\mathbf{p}), \Pi^\pm(\mathbf{p})] = \frac{\pm 1}{4m} [\not{p}, \sigma_{\mathbf{p}}], \quad [\Lambda^-(\mathbf{p}), \Pi^\pm(\mathbf{p})] = \frac{\mp 1}{4m} [\not{p}, \sigma_{\mathbf{p}}]$$

において

$$[\not{p}, \sigma_{\mathbf{p}}] = \frac{ip^i}{2|\mathbf{p}|} \varepsilon_{ijk} [\not{p}, \gamma^j \gamma^k]$$

であり, 右辺の

$$[\not{p}, \gamma^j \gamma^k] = p_\mu (\{\gamma^\mu, \gamma^j\} \gamma^k - \gamma^j \{\gamma^\mu, \gamma^k\}) = 2p_\mu (g^{\mu j} \gamma^k - \gamma^j g^{\mu k}) = 2(p^j \gamma^k - p^k \gamma^j)$$

は  $\varepsilon_{ijk}$  と同様,  $j, k$  について反対称なので

$$[\not{p}, \sigma_{\mathbf{p}}] = 2i \frac{p^i}{|\mathbf{p}|} \varepsilon_{ijk} p^j \gamma^k$$

となる. 添字  $i, j$  について  $p^i p^j$  は対称であり,  $\varepsilon_{ijk}$  は反対称なので, これはゼロになる. よって式 (342):

$$[\Lambda^\pm(\mathbf{p}), \Pi^\pm(\mathbf{p})] = 0 \quad (\text{複号任意})$$

が成立する.

■質量ゼロの極限におけるヘリシティ演算子の表式 (343) の理由  $m = 0$  の極限では  $p_0 = |\mathbf{p}|$  であり,  $w_r(\mathbf{p})$  を  $u_r(\mathbf{p}), v_r(\mathbf{p})$  のいずれかとすると式 (89):

$$(\not{p} - m)u_r(\mathbf{p}) = 0, \quad (\not{p} + m)v_r(\mathbf{p}) = 0$$

は次のようになる.

$$\gamma^0 |\mathbf{p}| w_r(\mathbf{p}) = -\gamma^k p_k w_r(\mathbf{p}) = \gamma^k p^k w_r(\mathbf{p}).$$

左から  $\gamma^5 \gamma^0$  をかけて式 (317):  $\sigma^{ij} = -\gamma^0 \gamma^5 \gamma^k$  を用いると,

$$\gamma^5 w_r(\mathbf{p}) = \sigma_{\mathbf{p}} w_r(\mathbf{p})$$

を得る. よって  $m = 0$  の極限ではヘリシティ射影演算子  $\Pi^\pm(\mathbf{p}) = (1 \pm \sigma_{\mathbf{p}})/2$  の役割を, 演算子 (343):  $(1 \pm \gamma_5)/2$  が果たす.

## A.7 相対論的な性質

■式 (A.58) について 最右辺の第 2 項においてダミー添字  $\mu, \nu$  を入れ替え, 第 3 項において反対称性  $\varepsilon_{\nu\mu} = -\varepsilon_{\mu\nu}$  を利用すると 1 行前の表式に戻る.

■式 (A.59):  $S^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \gamma^\mu \gamma^\nu$  について これが p.258 一番下の式  $[S^{\mu\nu}, \gamma^\lambda] = \gamma^\mu g^{\lambda\nu} - \gamma^\nu g^{\lambda\mu}$  の解であることは, 次のように示される.

$$[S^{\mu\nu}, \gamma^\lambda] = \frac{1}{2} \{(\gamma^\mu \gamma^\nu) \gamma^\lambda - \gamma^\lambda (\gamma^\mu \gamma^\nu)\} = \frac{1}{2} (\gamma^\mu \{\gamma^\nu, \gamma^\lambda\} - \{\gamma^\lambda, \gamma^\mu\} \gamma^\nu) = \gamma^\mu g^{\lambda\nu} - \gamma^\nu g^{\lambda\mu}.$$

■Dirac 場の Lorentz 変換 (A.60) について ここでは,  $\psi \rightarrow S\psi$  が Dirac 変換を不変にするときの性質

$$\begin{aligned} \gamma^\nu &= \Lambda^\nu_\mu S \gamma^\mu S^{-1} : (\text{A.49}) \\ \Leftrightarrow [S^{\mu\nu}, \gamma^\lambda] &= \gamma^\mu g^{\lambda\nu} - \gamma^\nu g^{\lambda\mu} \quad (\text{p.258, 一番下}) \end{aligned}$$

(Lorentz 変換  $\Lambda_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu}, S = 1 + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} S^{\mu\nu}$  に対し) を満たす  $S^{\mu\nu}$ , したがって  $S$  を見つけたものとして説明されている.

式 (A.60) は次のように確かめられる.

$$1 - \frac{i}{4} \varepsilon_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} = 1 + \frac{1}{8} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] = 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu) = 1 + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} \left( \frac{1}{2} \gamma^\mu \gamma^\nu \right) = S.$$

第 3 の等号は  $\varepsilon_{\mu\nu}$  の反対称性による.

## 練習問題

### A.1 Dirac 場の双一次共変量の変換性 (A.53) の確認

本稿の付録 C で証明済み.

### A.2 Gordon 恒等式 (A.80) の証明

読者の便宜のために Gordon 恒等式をここに書いておく.

$$2m\bar{u}_s(\mathbf{p}')\gamma^\mu u_r(\mathbf{p}) = \bar{u}_s(\mathbf{p}')[(p' + p)^\mu + i\sigma^{\mu\nu}(p' - p)_\nu]u_r(\mathbf{p}). \quad (\text{A.80})$$

導出は 9.5 節のノートにて行った.

## 参考文献

- [1] J.J.Sakurai, 2017, 現代の量子力学 (上)(桜井明夫訳), 株式会社吉岡書店, 京都.
- [2] L.D. ランダウ, E.M. リフシッツ, 2019, 量子力学 ランダウ=リフシッツ物理学小教程 (好村滋洋, 井上健男訳), 株式会社筑摩書房, 東京.
- [3] W.N. コッティンガム, D.A. グリーンウッド, 2013, 素粒子標準模型入門 (樺沢宇紀訳), 丸善出版株式会社, 東京.
- [4] エリ・デ・ランダウ, イェ・エム・リフシッツ, 2015, ランダウ=リフシッツ理論物理学教程 場の古典論 (原書第 6 版)(恒藤敏彦, 広重徹訳), 東京図書株式会社, 東京.
- [5] J.J. サクライ, 2013, 上級量子力学 第 I 巻 輻射と粒子 (樺沢宇紀訳), 丸善プラネット株式会社, 東京.
- [6] J.J. サクライ, 2010, 上級量子力学 第 II 巻 共変な摂動論 (樺沢宇紀訳), 丸善プラネット株式会社, 東京.
- [7] J.J.Sakurai, 2014, 現代の量子力学 (下)(桜井明夫訳), 株式会社吉岡書店, 京都.
- [8] 佐藤光, 2019, 群と物理, 丸善出版株式会社, 東京.
- [9] B. ツヴィーバツハ, 2018, 初級講座 弦理論《発展編》(樺沢宇紀訳), 丸善プラネット株式会社, 東京.
- [10] 九後汰一郎, 2018, 新物理学シリーズ 23 ゲージ場の量子論 I, 株式会社培風館.
- [11] 杉田勝実ほか, 2005, 経路積分と量子電磁力学 [POD 版], 森北出版株式会社, 東京.
- [12] ファインマンほか, 2012, ファインマン物理学 II (富山小太郎訳), 株式会社岩波書店, 東京.
- [13] M. ストーン, 2012, 量子場の物理〔新装版〕(樺沢宇紀訳), 丸善プラネット株式会社, 東京.
- [14] 並木美喜雄, 大場一郎, 1997, 散乱の量子力学, 株式会社岩波書店, 東京, 8-12.
- [15] ゴールドスタインほか, 2008, 古典力学 (上) 原著第 3 版 (矢野忠ほか訳), 株式会社吉岡書店, 京都.
- [16] エリ・デ・ランダウ, イェ・エム・リフシッツ, 2013, ランダウ=リフシッツ理論物理学教程 力学 (増訂第 3 版)(広重徹, 水戸巖訳), 東京図書株式会社, 東京.
- [17] 小野寺嘉孝, 2014, 物理のための応用数学, 株式会社裳華房, 東京.
- [18] 内山龍雄, 2014, 相対性理論 物理テキストシリーズ 8, 株式会社岩波書店, 東京.
- [19] 山本義隆, 中村孔一, 2013, 朝倉物理学大系 1 解析力学 I, 株式会社朝倉書店, 東京.
- [20] P.A.M. ディラック, 2012, 一般相対性理論 (江沢洋訳), 株式会社筑摩書房, 東京.
- [21] シュッツ, 2010, 第 2 版シュッツ 相対論入門 (江里口良治, 二間瀬敏史訳), 丸善株式会社, 東京.
- [22] B. ツヴィーバツハ, 2013, 初級講座 弦理論《基礎編》(樺沢宇紀訳), 丸善プラネット株式会社, 東京.
- [23] H. ジョージアイ, 2010, 物理学におけるリー代数——アイソスピンから統一理論へ—— (原著第 2 版) (九後汰一郎訳), 株式会社吉岡書店, 京都.