

シュッツ 『相対論入門』

本稿は相対性理論の教科書

シュッツ, 2010, 第2版シュッツ 相対論入門 (江里口良治, 二間瀬敏史訳), 丸善株式会社, 東京
についての要約と補足を行ったノートである。
なお本稿の他にも理論物理の各種ノートを以下のページで公開している。

<http://everything-arises-from-the-principle-of-physics.com/>

1 特殊相対論

1.1 特殊相対論の基本原則

代数的な観点に先がけて幾何学的観点を学ぶ。

特殊相対論は次の 2 つの基本的な仮説から導き出される。

相対性原理 どんな実験も観測者の絶対速度を測ることはできない。

- $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v} - \mathbf{V}$ に対して Newton の法則 $\mathbf{F} = m d\mathbf{v}/dt$ は不変 (Galilei の相対論原理)。

光速の不変性 すべての慣性系において光速の測定値は $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ 。

- Galilei の速度の合成則を捨てた。
- 特殊相対論
 - 慣性系の物理, 重力場のないときにだけ適用
- 一般相対論
 - 非慣性系を含む物理, 重力場を扱う

1.1 について

「幾何学に深入りしてもあまり役に立たないからそれはやめにする; 方程式を扱う方がやさしい」と Feynman が述べていることは興味深い [1, p.239].

1.2 慣性観測者の定義

慣性系は以下の 3 つの性質を満たす。

- 空間の 2 点 P_1, P_2 の距離は時間によらない。
- 空間の各点に附随した無数の時計は時間合わせができ, 同じ割合で進む。
- 任意の時刻 $t = (\text{一定})$ の空間の幾何学は Euclid 幾何学である。

まずはこのような慣性系を作れるものと仮定する。

ある事象を慣性系で見た時間とは, その事情が起きたときにその位置にある時計が指していた時刻のことである。

1.3 新しい単位系

自然単位系 $c = 1$ 。

1.4 時空図

要約を省略する。

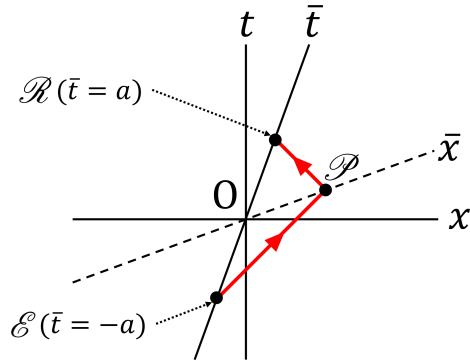


図1 座標系 \mathcal{O} の時空図から見た \bar{t} 軸, \bar{x} 軸の位置

1.5 別の観測者による座標系

座標系 \mathcal{O} (座標 t, x) から見て x 軸方向に速度 v で動いている座標系 $\bar{\mathcal{O}}$ (座標 \bar{t}, \bar{x}) を考える.
座標系 \mathcal{O} の時空図から見た \bar{t} 軸, \bar{x} 軸の位置は以下のように分かる (図1 参照).

- \bar{t} 軸
原点 $\bar{x} = 0$ の軌跡 $x = vt$ として得られる.
- \bar{x} 軸
任意の a に対し $\bar{t} = -a$ に $\bar{x} = 0$ で放出された光は $\bar{t} = 0$ で $\bar{x} = a$ に達する.
そこで光が反射されたとすると $\bar{t} = a$ で $\bar{x} = 0$ に戻る.
よって $\mathcal{E}(\bar{t} = -a, \bar{x} = 0)$ を通る傾き 45 度の直線と,
 $\mathcal{R}(\bar{t} = a, \bar{x} = 0)$ を通る傾き -45 度の直線の交点として, \bar{x} 軸上の点 $\mathcal{P}(\bar{t} = 0, \bar{x} = a)$ が得られる.

\bar{x} 軸 ($\bar{t} = 0$) と x 軸 ($t = 0$) は平行でない (同時の概念の崩壊).

1.5 について

■ 「四つの角はすべて, $\tan^{-1}|v|$ に等しい」 (p.11, l.8) について \mathcal{O} の時空図で見た \bar{x} 軸の傾きを次のように求めることができる. 図 1.4(p.10) の点 \mathcal{E}, \mathcal{R} の系 \mathcal{O} における座標は

$$t = \pm T, \quad x = \pm vT$$

とおける. このとき直線 $\mathcal{E}\mathcal{P}$, $\mathcal{R}\mathcal{P}$ の方程式はそれぞれ

$$t = x + (v - 1)T, \quad t = -x + (v + 1)T$$

となる. これらを連立すると交点 \mathcal{P} の座標

$$t = vT, \quad x = T$$

が得られるので, 点 \mathcal{P} と原点を結ぶ直線に他ならない \bar{x} 軸は

$$x = \frac{1}{v}t$$

で与えられる.

1.6 間隔の不変性

2つの事象間の間隔を

$$\Delta s^2 = -(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$$

によって定義すると、光の世界線上にある2点について $\Delta s^2 = 0$ であり、光速の不変性より

$$\Delta s^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \bar{s}^2 = 0$$

となる。ここで座標の関係が線形であると仮定すると

$$\Delta \bar{s}^2 = \phi(\mathbf{v}) \Delta s^2$$

が示される。さらに

ある系で同時な2つの事象は、それらを結ぶ線に直交する方向に動いている全ての系でも同時であることが確かめられるため、2つの系の相対速度に直交する棒を考えると

$$(\bar{\mathcal{O}} \text{での棒の長さ})^2 = \phi(\mathbf{v})(\mathcal{O} \text{での棒の長さ})^2 \quad (1)$$

となる。棒は速度に直交しており、その長さは速度の方向にはよらないから(相対性原理)

$$\phi(\mathbf{v}) = \phi(v), \quad v \equiv |\mathbf{v}|$$

である。そこで $\bar{\mathcal{O}}$ から見て速度 $-\mathbf{v}$ で動いている座標系 $\bar{\mathcal{O}}$ を考えると、これは \mathcal{O} に一致し、

$$\Delta s^2 = \Delta \bar{s}^2 = \phi(v) \Delta \bar{s}^2 = [\phi(v)]^2 \Delta s^2, \quad \therefore \phi(v) = \pm 1$$

を得る。式(1)より $\phi(v) = 1$ でなければならないから

- 間隔は座標系によらない: $\Delta \bar{s}^2 = \Delta s^2$.
- 2つの系の相対速度に直交する棒の長さは、どちらの系で測っても同じである。

$$\begin{aligned} \Delta s^2 > 0 &\Rightarrow 2つの事象は空間的に離れている, \\ \Delta s^2 < 0 &\Rightarrow 2つの事象は時間的に離れている, \\ \Delta s^2 = 0 &\Rightarrow 2つの事象は光的・ヌルの離れている \end{aligned}$$

と言う。 Δs^2 は不変量だから、これらは座標系によらない性質である。

非相対論において時空は未来と過去に2分割されるのに対し、特殊相対論では時空は光円錐により絶対未来、絶対過去、絶対的な非因果的領域に3分割される。

1.6 について

■「図から(図を立体的にみることができれば) \mathcal{A} と \mathcal{B} で……わかる」(p.14, 1.7~1.9) について 図 1.7(p.14) を $t-x$ 面, $t-y$ 面内で見た様子を図 2 に示す。

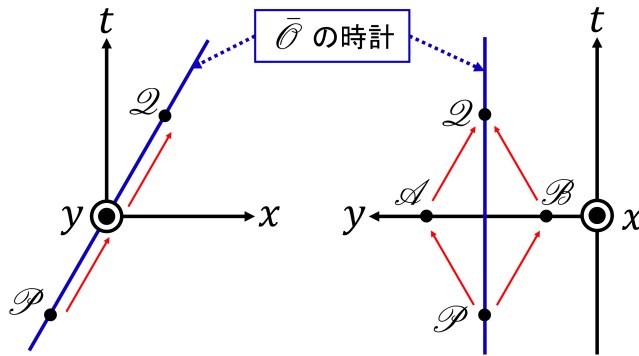


図2 教科書の図1.7(p.14)を $t-x$ 面, $t-y$ 面内で見た様子

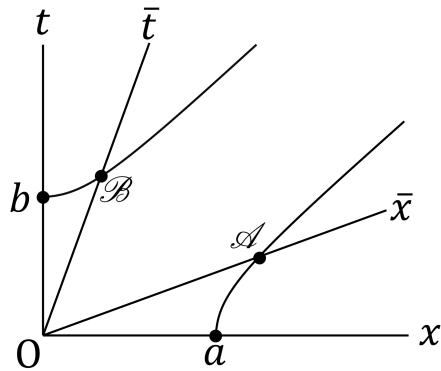


図3 不変双曲線を用いた \bar{x} 軸と \bar{t} 軸の目盛付け

1.7 不変双曲線

\mathcal{O} の時空図において次のように $\bar{\mathcal{O}}$ の座標軸の目盛付けができる(図3参照). 双曲線 $-t^2 + x^2 = a^2$ は間隔の不変性より曲線 $-\bar{t}^2 + \bar{x}^2 = a^2$ に一致するから, その \bar{x} 軸との交点 \mathcal{A} は目盛り $\bar{x} = a$ を持つ. 双曲線 $-t^2 + x^2 = -b^2$ は間隔の不変性より曲線 $-\bar{t}^2 + \bar{x}^2 = -b^2$ に一致するから, その \bar{t} 軸との交点 \mathcal{B} は目盛り $\bar{t} = b$ を持つ.

双曲線 $-\bar{t}^2 + \bar{x}^2 = a^2$ 上の任意の点 \mathcal{P} における接線は, $\mathcal{O}\mathcal{P}$ を時間軸 t に持つような座標系における双曲線 $-t^2 + x^2 = a^2$ の, t 軸との交点 \mathcal{P} における接線だから, 同時の線 $t = a$ である(図4参照).

1.7 について

p.19において双曲線の式の a, b が無次元量 $a = 2, b = 1$ にとられているけれど, a, b はともに(長さ) = (時間)の次元を持った量である.

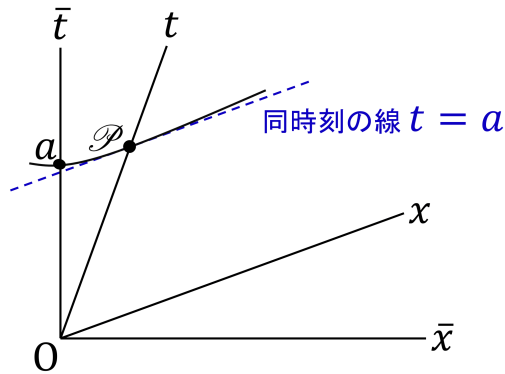


図4 \mathcal{O} の同時刻の線は，双曲線の接線

1.8 重要な結果

■時間の遅れ \mathcal{O} に対して運動する座標系 $\bar{\mathcal{O}}$ の原点に固定された時計が座標時間 $\Delta\bar{t}$ を刻んだとき (これを事象 \mathcal{B} とする), この時計と同じ位置にある \mathcal{O} の時計と \mathcal{O} の原点にある時計の読みの差を Δt とする. 時空図から

$$\Delta\bar{t} = \sqrt{1-v^2}\Delta t$$

が読み取れる (時間の遅れ). また今は事象 \mathcal{B} と原点の間の固有時間 τ を, その両方の事象を実際に通過する時計によって刻まれた時間として定義する.

$$\Delta\tau = \sqrt{1-v^2}\Delta t.$$

■ローレンツ収縮 時空図から Lorentz 収縮

$$\bar{l} = l\sqrt{1-v^2}$$

を読み取れる.

■相対論は誤り? 系 \mathcal{O} の x 軸方向に速度 v で運動する系 $\bar{\mathcal{O}}$ を考える. \mathcal{O} から見て $\bar{\mathcal{O}}$ の時計がゆっくりと進むなら, [対称性より] $\bar{\mathcal{O}}$ から見て \mathcal{O} の時計がゆっくりと進むことになり, これは一見するとパラドックスである.

しかし $\bar{\mathcal{O}}$ の原点に固定された時計と読み比べるために \mathcal{O} は2つの時計を必要とするから, 実験は非対称である (図5参照). $\bar{\mathcal{O}}$ の原点の時計が $\bar{t} = T$ を示すのと $\bar{\mathcal{O}}$ において同時の瞬間, \mathcal{O} の2つの時計は異なる時刻を示し, 同時化されていない (図6参照). さらにこのとき \mathcal{O} の原点に固定された時計の読み $t = T\sqrt{1-v^2}$ を $\bar{\mathcal{O}}$ の時計の読み $\bar{t} = T$ と比較すると, 確かに \mathcal{O} の時計が遅れている (図6参照).

同時性の概念は座標系によるが, 特定の座標系の中では首尾一貫して用いることができる.

上の議論は時計の物理的構成によらないから, あらゆる物理現象が“ゆっくり”進む.

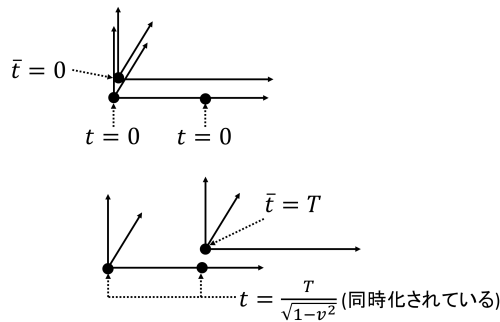


図5 系 O における同時

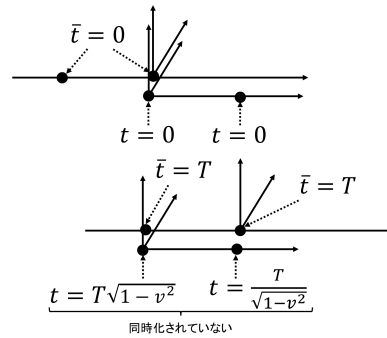


図6 系 \bar{O} における同時

1.8 について

■「事象 B は O では座標 $t = 1/\sqrt{1-v^2}$ をもつ」(1.8, 1.2,3) について 点 B は双曲線 $-t^2 + x^2 = a^2$ (教科書では $a = 1$: 無次元) と直線 $x = vt$ の交点であり, 2式から x を消去して

$$t = \frac{a}{\sqrt{1-v^2}}$$

を得る.

■事象 C の座標 (p.23, 1.1,3) 点 C は双曲線 $-t^2 + x^2 = l^2$ すなわち

$$-t^2 + x^2 = l^2$$

および \bar{x} 軸

$$t = vx$$

の交点であり, 2式を連立して点 C の座標

$$x = x_C = \frac{l}{\sqrt{1-v^2}}, \quad t = t_C = \frac{vl}{\sqrt{1-v^2}}$$

を得る.

■Lorentz 収縮と Minkowski 図 Lorentz 収縮の式 (1.11) は図7の各部分の長さを赤色で示したように考えて

$$l = l_0 \cos \theta - l_0 \sin \theta \tan \theta = l_0 \sqrt{1-\beta^2} \quad (\tan \theta = \beta)$$

とした結果に一致する. ただしここでは x' 軸上の目盛り l_0 を系 O の時空図上の長さとして用いていることになる.

■「簡単な計算から, それは $t = (1-v^2)^{1/2}$ であり」(p.25, 1.7,8) について \bar{O} の同時の線 $\mathcal{B}\mathcal{C}$ (図 1.14(教科書 p.25) の点線) は双曲線の接線であり (1.7 節), \bar{x} 軸に平行だから傾き v を持つ. よってその式は

$$t = vx + t_C$$

とおける. 点 B の座標

$$t = \frac{T}{\sqrt{1-v^2}}, \quad x = \frac{vT}{\sqrt{1-v^2}}$$

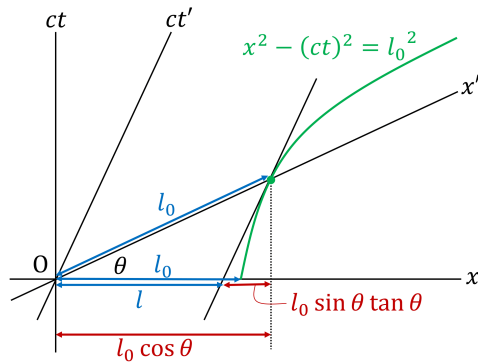


図7 Lorentz 収縮と Minkowski 図

を代入すると (教科書では $T = 1$: 無次元)

$$t_{\mathcal{L}} = \sqrt{1 - v^2} T$$

を得る.

1.9 ローレンツ変換

系 \mathcal{O} の x 軸方向に速度 v で運動する系 $\bar{\mathcal{O}}$ を考える (ブースト). [2 つの系の軸は互いに平行であり, 時刻 $t = 0, \bar{t} = 0$ にそれぞれの原点が一致していたものとする.] x 軸に垂直な長さが \mathcal{O} と $\bar{\mathcal{O}}$ とで同じになる (1.6 節参照) ような線形変換

$$\bar{t} = \alpha t + \beta x, \quad \bar{x} = \gamma t + \sigma x, \quad \bar{y} = y, \quad \bar{z} = z$$

に対して

- 間隔の不変性 $-(\Delta\bar{t})^2 + (\Delta\bar{x})^2 = -(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2$
 - \bar{t} 軸 ($\bar{x} = 0$): $vt - x = 0$, \bar{x} 軸 ($\bar{t} = 0$): $vx - t = 0$
 - 事象 $(\bar{t}, \bar{x}) = (0, a), (a, 0)$ を光の経路で繋げること

を要求して

$$\bar{t} = \frac{t - vx}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad \bar{x} = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad \bar{y} = y, \quad \bar{z} = z$$

を得る.

1.9 について

■ 「ここから容易に $\alpha = \sigma$ が導かれる」 (p.28, 1.5,6) について 2 事象の座標の差をとり, 2 事象が光の経路によって繋がっていることに注意して $\Delta x = -\Delta t$ を代入すると

$$\begin{cases} a = \alpha(\Delta t - v\Delta x) = \alpha\Delta t(1 + v) \\ -a = \sigma(\Delta x - v\Delta t) = -\sigma\Delta t(1 + v) \end{cases} \quad \therefore \alpha = \sigma.$$

■「簡単な計算の後、次式が得られる。 $\alpha = \pm 1/\sqrt{1-v^2}$ (p.28, 1.11,12) について

$$\begin{aligned} -(\Delta\bar{t})^2 + (\Delta\bar{x})^2 &= \alpha^2\{-(\Delta t - v\Delta x)^2 + (\Delta x - v\Delta t)^2\} \\ &= \alpha^2(1-v^2)\{-(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2\} \end{aligned}$$

なので、 $\alpha = \pm 1/\sqrt{1-v^2}$ とすれば間隔の不変性が満たされる。

1.10 速度の合成則

粒子の速度の x 成分を W' , \bar{x} 成分を W とする。

$$\text{Lorentz 変換} \quad \rightarrow \quad \text{速度の合成則} \quad W' = \frac{W+v}{1+Wv}$$

- $|v| \leq 1, |W| \leq 1 \Rightarrow |W'| \leq 1$.
- $|v| \ll 1, |W| \ll 1 \Rightarrow |W'| = W+v$: 非相対論的な合成則。

1.10 について

■ Lorentz 変換 \rightarrow 時間の遅れ, Lorentz 収縮 「ローレンツ変換は、時間の遅れやローレンツ収縮などの標準的な公式を導くのに必要なすべての情報を含んでいる」(1.10 節, 1.1,2) について、次のようにすれば良い [2, pp.18-19].

時間の遅れ はじめ系 \mathcal{O} と系 $\bar{\mathcal{O}}$ の原点は一致しており、それぞれの原点の時計はともに $t=0, \bar{t}=0$ を示していたものとする。系 $\bar{\mathcal{O}}$ の原点に固定された時計が時刻 \bar{t} を示すという事象が、系 \mathcal{O} から見て時刻 t に位置 x で起こったとする。このとき系 $\bar{\mathcal{O}}$ の原点の位置は $x=vt$ と表されるから、Lorentz 変換の式により時間の遅れの式 (1.8):

$$\bar{t} = \frac{t - v(vt)}{\sqrt{1-v^2}} = t\sqrt{1-v^2}$$

を得る。

Lorentz 収縮 系 \mathcal{O} で見て時刻 t に棒の両端が $x=a, b(>a)$ にあるという 2 事象が、系 $\bar{\mathcal{O}}$ ではそれぞれ位置 $\bar{x}=\bar{a}, \bar{b}(>\bar{a})$ に起こるとする。このとき $\bar{b}-\bar{a}=l$ とおけて、Lorentz 変換の式により

$$\bar{a} = \frac{a-vt}{\sqrt{1-v^2}}, \quad \bar{b} = \frac{b-vt}{\sqrt{1-v^2}}, \quad \therefore l = \bar{b}-\bar{a} = \frac{b-a}{\sqrt{1-v^2}}$$

となるので、Lorentz 収縮の式 (1.11):

$$b-a = l\sqrt{1-v^2}$$

を得る。

■ Lorentz 変換の式の微分をとること p.29 では粒子が系 \mathcal{O} で見て時間 Δt のうちに Δx だけ変位するのを系 $\bar{\mathcal{O}}$ で見ると、時間 $\Delta\bar{t}$ のうちに $\Delta\bar{x}$ だけ変位するものとしている。このとき比 $W' = \Delta x/\Delta t$, $W = \Delta\bar{x}/\Delta\bar{t}$ はそれぞれの系での粒子の速度になり、微小量の間に

$$\Delta x = \frac{\Delta\bar{x} + v\Delta\bar{t}}{\sqrt{1-v^2}}, \quad \Delta t = \frac{\Delta\bar{t} + v\Delta\bar{x}}{\sqrt{1-v^2}}$$

の関係 (1.10 節, 1.8,9 の式) が成り立つ。

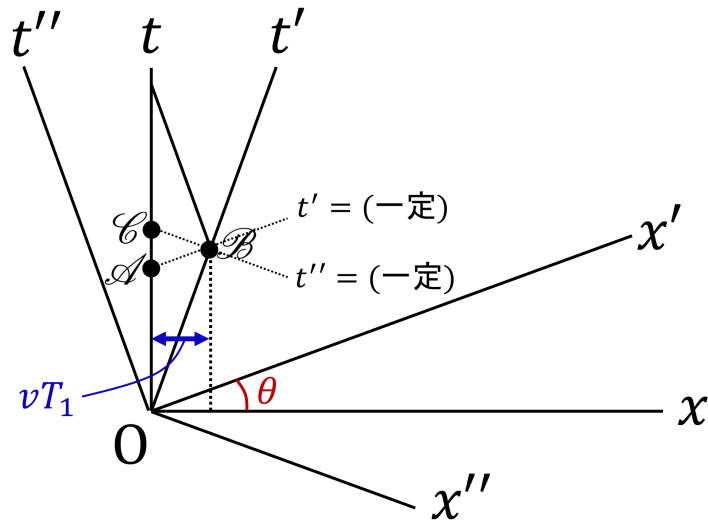


図 8 地球固定系 (t, x) で見たロケットの運動. ロケットの往路の共動座標系を (t', x') , 復路の共動座標系を (t'', x'') とする.

1.11 パラドックスと物理的直観

要約を省略する.

1.12 文献

要約を省略する.

1.13 付録：双子の“パラドックス”分析

ロケットが折り返す直前のロケットの時計の読みを T_2 とすると, 地球固定系では地球の時計はそれと同時に

$$T_1 = \frac{T_2}{\sqrt{1-v^2}}$$

を示すから, ロケットの時計が遅れる. 一方, ロケット固定系では地球の時計はそれと同時に

$$t_1 = T_2 \sqrt{1-v^2}$$

を示すから, 一見すると, ロケットが地球に帰着すると地球の時計が遅れているように思われるかもしれない. しかし実際にはロケットが折り返す瞬間, 地球の時計は時空図 8 において \mathcal{A} から \mathcal{C} まで読みが進むため, ロケットの時計が遅れるという最初の結論と矛盾しない. 往路と復路でのロケットの共動座標系で, 折り返し点 \mathcal{B} と同時と見なされる事象 \mathcal{A} , \mathcal{C} が異なることに気付かなければならない.

1.13 について

双子のパラドックスについては文献 [2, pp.20-27] に詳しい. 補足として簡単にこれをまとめよう.

ロケット系から見た折り返しにおける地球の時計の進みは図 8 より

$$\overline{\mathcal{A}\mathcal{C}} = 2vT_1 \tan \theta = 2v^2T_1$$

と計算される.

ここでこの地球の時計の進みは, ロケット固定系において折り返し時に現れる重力場による, ロケット側の時計の遅れとして理解できることを述べる. まず地球固定系で見てロケットが時間 $\Delta T_1 (\rightarrow 0)$ のうちに加速度 a で折り返すものとし, 折り返しにおけるロケットの時計の進みを $\Delta \tau_2$ とすると

$$2v = a\Delta T_1, \\ \Delta \tau_2 = \int_0^{\Delta T_1} \sqrt{1 - (v - at)^2} dt = \Delta T_1(1 + O(v^2)) \simeq \Delta T_1$$

である.

次にロケット固定系で見た, 折り返しの間の地球の時計の進みを $\Delta \tau_1$ とする. この系では重力場 a が現れ, 地球はロケットの位置より $\Delta \phi = a \times vT_1$ だけ高い重力ポテンシャルを持つ. 一般相対性理論によれば

$$\Delta \tau_1 = \Delta \tau_2(1 + \Delta \phi)$$

なので, ロケット系から見た折り返しにおける地球の時計の進みは

$$\Delta \tau_1 \simeq \Delta T_1(1 + \Delta \phi) = \Delta T_1(1 + avT_1) = \Delta T_1 + 2v^2T_1 \rightarrow 2v^2T_1$$

となる. これは上で得た結果に一致する.

地球固定系で見たロケットの折り返しにおける加速運動は重力によるものではないから, 上の議論を適用してロケットの時計が進むと結論することはできない.

■数値計算 「数値的にはダイアナの 14 歳に対してアルテミスは 50 歳, 年をとる」(p.32, 略解) について,

$$T_2 = 7 \text{ 年}, \quad v = 0.96, \quad \therefore 2T_1 = 2 \frac{T_2}{\sqrt{1 - v^2}} = 50 \text{ 年}.$$

2 特殊相対論におけるベクトル解析

2.1 ベクトルの定義

ベクトルの正確な定義はのちに与えることにして、ここではベクトルを、座標変換によって変換される座標そのものと同じ変換性をもつ成分の集まりとする。すなわちベクトル \vec{A} 自体は座標系に依らない幾何学的対象であり、その系 \mathcal{O} における成分を

$$(A^0, A^1, A^2, A^3) = \{A^\alpha\}$$

と書くと、これは

$$A^{\bar{\alpha}} = \Lambda^{\bar{\alpha}}_{\beta} A^{\beta} \equiv \sum_{\beta=0}^3 \Lambda^{\bar{\alpha}}_{\beta} A^{\beta}$$

と変換される。各成分は変換によって足し合わされるため、すべてが同じ次元をもたなくてはならない。例えば2つの事象を結ぶ変位 $\Delta\vec{x}$ はベクトルである。

- ダミーの添字 → 式変形の途中で他の文字に置き換えられる。
- フリーな添字 → すべてを残さず付け換えなければならない。

2.2 ベクトル代数

■基底ベクトル 任意の系 \mathcal{O} における基底ベクトル $\{\vec{e}_\alpha\}$ を、その座標系における成分が

$$(\vec{e}_\alpha)^\beta = \delta_\alpha^\beta$$

となるベクトルとして定義する (すなわち \vec{e}_α は第 α 成分が1であり、その他の成分がゼロである)。これを用いて任意のベクトル \vec{A} は

$$\vec{A} = A^\alpha \vec{e}_\alpha$$

と表される。

■基底ベクトルの変換

$$\vec{A} = A^\alpha \vec{e}_\alpha = A^{\bar{\alpha}} \vec{e}_{\bar{\alpha}} \quad (2)$$

においてベクトル成分が変換則 $A^{\bar{\alpha}} = \Lambda^{\bar{\alpha}}_{\beta} A^{\beta}$ に従うことから基底ベクトルの変換則

$$\vec{e}_\alpha = \Lambda^{\bar{\beta}}_{\alpha} \vec{e}_{\bar{\beta}}$$

が得られる。なお異なる系 $\bar{\mathcal{O}}, \mathcal{O}$ における基底 $\{\vec{e}_{\bar{\alpha}}\}, \{\vec{e}_\alpha\}$ は一般に異なり、ベクトル成分 $\{A^{\bar{\alpha}}\}, \{A^\alpha\}$ も互いに異なるから、式 (2.12) はダミー添字の付け換えによって得られるものではないことに注意する。

■具体的な例 系 \mathcal{O} の x 軸方向に等速推進する系 $\bar{\mathcal{O}}$ を考える。系 \mathcal{O} の基底 $\vec{e}_\alpha = \Lambda^{\bar{\beta}}_{\alpha} \vec{e}_{\bar{\beta}}$ は $\bar{\mathcal{O}}$ の時空図において、系 \mathcal{O} の座標軸の方向に一致することを確かめられる。

■逆変換

$$\begin{aligned} \text{基底の変換則 } \vec{e}_\alpha &= \Lambda^{\bar{\beta}}_\alpha(\mathbf{v})\vec{e}_{\bar{\beta}}, & \vec{e}_{\bar{\beta}} &= \Lambda^\gamma_{\bar{\beta}}(-\mathbf{v})\vec{e}_\gamma \\ \Rightarrow \vec{e}_\alpha &= \Lambda^{\bar{\beta}}_\alpha(\mathbf{v})\Lambda^\gamma_{\bar{\beta}}(-\mathbf{v})\vec{e}_\gamma, & \text{ベクトル成分の変換則 } A^{\bar{\gamma}} &= \Lambda^{\bar{\gamma}}_\beta(\mathbf{v})A^\beta, & A^\beta &= \Lambda^{\bar{\alpha}}_\beta(-\mathbf{v})A^{\bar{\alpha}} \\ \Rightarrow A^{\bar{\gamma}} &= \Lambda^{\bar{\gamma}}_\beta(\mathbf{v})\Lambda^{\bar{\alpha}}_\beta(-\mathbf{v})A^{\bar{\alpha}} \end{aligned}$$

より行列 $[\Lambda^\gamma_{\bar{\beta}}(-\mathbf{v})]$ は $[\Lambda^{\bar{\beta}}_\alpha(\mathbf{v})]$ の逆行列でなければならない:

$$\Lambda^{\bar{\beta}}_\alpha(\mathbf{v})\Lambda^\gamma_{\bar{\beta}}(-\mathbf{v}) = \delta^\gamma_\alpha.$$

なおこの記法において要素 $\Lambda^{\bar{\alpha}}_\beta(\mathbf{v})$ と $\Lambda^\alpha_{\bar{\beta}}(\mathbf{v})$ は同じものであり、添字の上のバーは座標系の立場の違いを明らかにする名称にすぎない。

2.2 について

「具体的な例」(pp.48-49) について,

$$\vec{e}_0 = \gamma\vec{e}_{\bar{0}} - v\gamma\vec{e}_{\bar{1}}, \quad (\text{p.48 下 2 行})$$

の系 $\bar{\mathcal{O}}$ での成分 $(\gamma, -v\gamma, 0, 0)$ は $\bar{t}^2 - \bar{x}^2 = 1$ を満たすため、図 2.1(p.49) の \vec{e}_0 は不変双曲線 $\bar{t}^2 - \bar{x}^2 = 1$ 上にある (1 は単位長さ)。これは \vec{e}_0 が確かに単位ベクトルであることを意味する。

2.3 四元速度

粒子の四元速度 \vec{U} を、粒子の瞬間的共動慣性系の基底ベクトル \vec{e}_0 と定義する。
これは粒子の世界線に接している。

2.4 四元運動量

粒子の質量を m として四元運動量 $\vec{p} = m\vec{U}$ を定義する。慣性系 \mathcal{O} での時間成分 p^0 をエネルギー E と呼ぶ。粒子が x 方向に速度 v で運動しているような系 \mathcal{O} において

$$\begin{aligned} \vec{U} &= \frac{1}{(1-v^2)^{1/2}}(1, 0, 0, 0) \simeq (1, v, 0, 0), \\ \vec{p} &\simeq \left(m + \frac{1}{2}mv^2, mv, 0, 0 \right) \end{aligned}$$

なので (近似は $v \ll 1$ のとき)、四元速度、四元運動量という名称は妥当である。

■四元運動量の保存 四元ベクトル \vec{p} の保存を相対論的な保存則と仮定する。このときエネルギー保存則において、質量を含めて扱わなくてはならないことになる。

図 9 において系 \mathcal{O} の時刻一定の線 $t = 0$ における運動量は

$$(\text{衝突 } \mathcal{A} \text{ の後の運動量}) + (\text{衝突 } \mathcal{B} \text{ の前の運動量})$$

であるのに対し、系 $\bar{\mathcal{O}}$ の時刻一定の線 $\bar{t} = 0$ における運動量は

$$(\text{衝突 } \mathcal{A} \text{ の前の運動量}) + (\text{衝突 } \mathcal{B} \text{ の後の運動量})$$

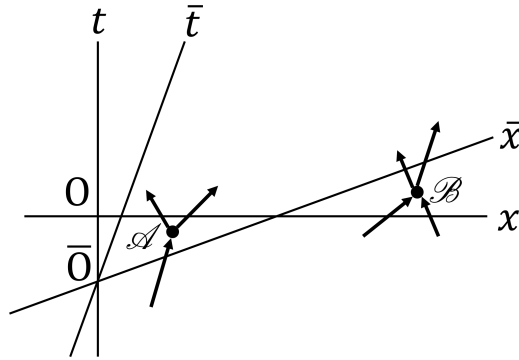


図9 図 2.3(p.55) を改変

である。これらの成分は異なるけれど、各衝突 \mathcal{A} と \mathcal{B} のそれぞれで運動量が保存されることから、これらが同一のベクトル \vec{p} を与えることが保証される。

■ゼロ運動量系 全運動量の空間成分がゼロとなる系 [1 粒子の系に対してはその瞬間的共動慣性系に他ならない]。

2.5 スカラー積

- ベクトル \vec{A} の大きさ

$$\vec{A}^2 \equiv -(A^0)^2 + (A^1)^2 + (A^2)^2 + (A^3)^2.$$

- $\vec{A}^2 \geq 0$ とは限らない。
- $\vec{A}^2 = 0$ となる \vec{A} はヌルベクトルという。これは必ずしもゼロベクトルではない。

- 2つのベクトル \vec{A}, \vec{B} のスカラー積

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \equiv -A^0 B^0 + A^1 B^1 + A^2 B^2 + A^3 B^3.$$

- $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ のとき \vec{A} と \vec{B} は直交しているという。

間隔 $\Delta s^2 = \Delta \vec{x}^2$ は不変量 (スカラー), ベクトル \vec{A} は $\Delta \vec{x}$ と同じ成分の変換則に従う

- \vec{A}^2 は不変量 (スカラー)
- $\vec{A} \cdot \vec{B}$ は不変量 (スカラー).

任意の系 $\bar{\mathcal{O}}$ の基底ベクトルは正規直交性

$$\vec{e}_{\bar{\alpha}} \cdot \vec{e}_{\bar{\beta}} = \eta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} : \text{メトリックテンソル}$$

を満たす。 \vec{e}_0 と \vec{e}_1 は系 \mathcal{O} の時空図において光線の道筋 $x = t$ によって 2 等分されるから、直線 $x = t$ を 2 等分線に持つ (tx 面内の) 2 つのベクトルは直交している。

2.6 応用

- 粒子 (光子を除く, 2.7 節参照) の変位 $d\vec{x}$ は時間的ベクトル
→ 粒子の固有時間 $d\tau$, $d\tau^2 \equiv -ds^2 = -d\vec{x} \cdot d\vec{x} > 0$.
- $d\vec{x}/d\tau$ は世界線の接ベクトルで

$$\left(\frac{d\vec{x}}{d\tau}\right)^2 = -1$$

を満たし, 粒子の四元速度に一致する:

$$\frac{d\vec{x}}{d\tau} = \vec{U}.$$

- 四元加速度 $d\vec{U}/d\tau$

$$\vec{U} \cdot \vec{U} = -1 \quad \rightarrow \quad \text{直交性} \quad \vec{U} \cdot \frac{d\vec{U}}{d\tau} = 0.$$

■エネルギーと運動量

$$-E^2 + \mathbf{p}^2 = \vec{p} \cdot \vec{p} = -m^2.$$

観測者の系の基底ベクトルを \vec{e}_0 とすると観測者の四元速度は $\vec{U}_{\text{obs}} \equiv \vec{e}_0$ なので, 観測者の観測する粒子のエネルギーは

$$\bar{E} = \vec{p} \cdot \vec{U}_{\text{obs}}$$

と計算できる.

2.7 光子

- 光子の世界線に沿って $d\tau^2 = -d\vec{x} \cdot d\vec{x} = 0$
→ 光子の四元速度を $d\vec{x}/d\tau$ として定義できない
- 光速の不変性
→ 光子の共動座標系はない
→ 光子の四元速度を共動座標系の \vec{e}_0 として定義できない

■四元運動量

- 光子の四元運動量 \vec{p} は (E, \mathbf{p}) を成分に持つベクトル. これは粒子の世界線に平行なヌルベクトルなので

$$\vec{p} \cdot \vec{p} = 0, \quad \therefore |\mathbf{p}| = E.$$

- $\nu = E/h$ は \vec{p} の成分として変換 → Doppler 効果.

■質量ゼロの粒子 光子は質量ゼロである: $m^2 = -\vec{p} \cdot \vec{p} = 0$. $m \neq 0$ の粒子は光の速度に達しえない.

2.7 について

■「静止質量」という用語 (例えば p.63 の小見出し) について 相対論的な運動方程式を得る 1 つの手法に, 非相対論的な運動方程式における質量を「相対論的質量」

$$m(\mathbf{v}) = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2}}$$

に置き換えるというものがある [1, pp.218-220]. ここに m_0 は $\mathbf{v} = 0$ のときの質量 $m(0)$ だから静止質量と呼べる.

一方で質量の概念を変更する代わりに, 加速度における座標時間 dt を固有時間に置き換えても相対論的な運動方程式が得られる. これは加速度の四元加速度成分への置き換え

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} \rightarrow \frac{d^2 x^i}{d\tau^2}$$

を意味している (加速度 $\frac{d^2 x^i}{dt^2}$ は Lorentz 変換に対してベクトル成分として変換しない). そこで力を四元力と呼ばれる反変ベクトル F^μ の成分と見なして相対論的な力学の基礎方程式を

$$m \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = F^\mu$$

と書けば, これは両辺がベクトル成分だから座標変換に対する共変性が明白である (一般に両辺が同じ種類のテンソルから成る方程式は, テンソルを定義する成分の変換則により座標変換に対して共变的である). 四元ベクトルの関係式への運動方程式の修正はこの点において「相対論的質量」を導入する方法よりも優れており, このような見方を採れば「静止質量」という用語を持ち出す必要はなくなる.

シュツン『相対論入門』

3 特殊相対論におけるテンソル解析

3.1 マトリックテンソル

ベクトル \vec{A}, \vec{B} から座標系によらないスカラー積

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A^\alpha A^\beta \vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta = A^\alpha A^\beta \eta_{\alpha\beta} \text{ が作れる.}$$

$$(\because \vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta = \eta_{\alpha\beta} = \begin{cases} -1 (\alpha=\beta=0) \\ 1 (\alpha=\beta \neq 0) \\ 0 (\alpha \neq \beta) \end{cases} \text{ : (2.27)})$$

3.1 について (復習)

ベクトルには \vec{A} のように矢印をつける。→ (2.6)

$\vec{A} \cdot \vec{B}$ は4元内積で時間成分に負号をつける。→ (2.26)

$\vec{A} \cdot \vec{B}$ が座標系によらない証明 → (2.26) を含む段落

3.2 テンソルの定義

◆ タイプ (n) のテンソル

N 個のベクトルから実数 n の線形な関数

マトリックテンソル g を $g(\vec{A}, \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B}$ で定義する。

g は \vec{A}, \vec{B} から実数 $\vec{A} \cdot \vec{B}$ の関数で

$$\text{線形性} \left\{ \begin{aligned} (\alpha_1 \vec{A}_1 + \alpha_2 \vec{A}_2) \cdot \vec{B} &= \alpha_1 \vec{A}_1 \cdot \vec{B} + \alpha_2 \vec{A}_2 \cdot \vec{B} \\ \vec{A} \cdot (\beta_1 \vec{B}_1 + \beta_2 \vec{B}_2) &= \beta_1 \vec{A} \cdot \vec{B}_1 + \beta_2 \vec{A} \cdot \vec{B}_2 \end{aligned} \right.$$

を満たすから (2) テンソル

★ $g(\vec{A}, \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B}$ は座標系によらない値

★ \vec{A}, \vec{B} は任意の n 個の特定の N 個のベクトル

系0での (n) タイプのテンソルの成分は0の基準ベクトル

$\{\vec{e}_\alpha\}$ を変数にしたときの関数の値

例 g の成分は $g(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta) = \vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta = \eta_{\alpha\beta}$

3.2 について

本書ではテンソルをその成分 $T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_m}$ の変換則

$$T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_m} = \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial x^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\mu_n}}{\partial x^{\nu_n}} T^{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}_{\rho_1 \rho_2 \dots \rho_m} = \Lambda^{\mu_1}_{\lambda_1} \dots \Lambda^{\mu_n}_{\lambda_n} (\Lambda^{-1})^{\rho_1}_{\nu_1} \dots (\Lambda^{-1})^{\rho_m}_{\nu_m} T^{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}_{\rho_1 \rho_2 \dots \rho_m} \text{ で定義される.}$$

3.3 (1) テンソル: -形式

-形式 (コベクトル, 共変ベクトル)

p.74 タイプ (1) のテンソル $\tilde{P}: \vec{A} \mapsto \tilde{P}(\vec{A})$

一般性質 \tilde{P} の和と実数倍を定義

→ \vec{A} の N 個のベクトル空間の n 対 N 個の空間を作る。

\vec{A} と \tilde{P} の縮約

$$\tilde{P}(\vec{A}) = \tilde{P}(A^\alpha \vec{e}_\alpha) = A^\alpha \tilde{P}(\vec{e}_\alpha) = A^\alpha P_\alpha$$

テンソル \tilde{P} の線形性 テンソル \tilde{P} の成分 $P_\alpha = \tilde{P}(\vec{e}_\alpha)$

ここで $\vec{e}_\beta = \Lambda^\alpha_\beta \vec{e}_\alpha$

→ $P_\beta = \Lambda^\alpha_\beta P_\alpha$ (基底で同じ変換則)

だから、マトリックテンソルの助けを借りて \tilde{P} を

不変量 $A^\alpha P_\alpha$ を作れたことになる。

p.76

基底形式

成分が $P_\alpha = \tilde{P}(\vec{e}_\alpha)$ の -形式 \tilde{P} を基底 $\tilde{\omega}^\alpha$ で

$\tilde{P} = P_\alpha \tilde{\omega}^\alpha$ と展開できたとする

$$P_\alpha A^\alpha = \tilde{P}(\vec{A}) = P_\alpha \tilde{\omega}^\alpha(\vec{A}) = P_\alpha \tilde{\omega}^\alpha(A^\beta \vec{e}_\beta)$$

$$= P_\alpha A^\beta \tilde{\omega}^\alpha(\vec{e}_\beta)$$

よ $\tilde{\omega}^\alpha$ の成分 $\tilde{\omega}^\alpha(\vec{e}_\beta) = \delta^\alpha_\beta$: (3.12)

幾何学的意味を語っていない

→ $\tilde{\omega}^\alpha$ は $\{\vec{e}_\beta\}$ で決まる $\{\vec{e}_\beta\}$ に対する基底

他の基底 $\{\vec{e}'_\beta\}$ をもつ系でも (3.12) が成立つには

$$\tilde{\omega}^\alpha = \Lambda^\beta_\alpha \tilde{\omega}'^\beta \text{ (ベクトルの成分の変換則)} : (3.13)$$

補足

実際、基底 \vec{e}_β を変換すると同時に $\tilde{\omega}^\alpha$ をその逆に変換すれば $\tilde{\omega}^\alpha(\vec{e}_\beta)$ の値は不変にとどまる

$$\tilde{\omega}'^\alpha(\vec{e}'_\beta) = \Lambda^\gamma_\alpha \tilde{\omega}^\gamma(\Lambda^\delta_\beta \vec{e}_\delta) = \Lambda^\gamma_\alpha (\Lambda^\delta_\beta \tilde{\omega}^\gamma(\vec{e}_\delta))$$

$$= \Lambda^\gamma_\alpha (\Lambda^\delta_\beta \delta^\gamma_\delta) = \Lambda^\gamma_\alpha (\Lambda^\delta_\beta \delta^\gamma_\delta) = \delta^\alpha_\beta$$

p.78

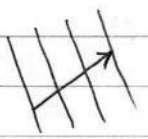
-形式の描像

-形式 空間をスライスする表面

+形式もベクトルに作用させて得られる値

..... ベクトルが置く表面の枚数

表面の間隔が狭いほど大きい



2.3 続き p.78

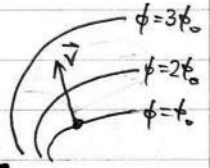
関数の勾配は1形式である

世界線上の粒子の位置 $x(t)$ でのスカラー場 $\phi(x(t))$ の変化率 $\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha} U^\alpha$ $\vec{U} = \frac{dx}{dt}$

そこで1形式 $\tilde{d}\phi: \vec{U} \mapsto \tilde{d}\phi[\vec{U}] = \frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha} U^\alpha$ を考え、これを ϕ の勾配と呼ぶ。

補足 $\left[\begin{aligned} \tilde{d}\phi \text{ の成分は } (\tilde{d}\phi)_\alpha &\equiv \tilde{d}\phi[\vec{e}_\alpha] = \frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha} (\vec{e}_\alpha)^\beta \\ &= \frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha} \delta_\alpha^\beta = \frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha} \\ (\vec{e}_\alpha \text{ 方向へ単位長に進んだときの } \phi \text{ の変化)} \end{aligned} \right]$

$\phi(x)$ を決めると等高線を描ける。
1形式として勾配 $\tilde{d}\phi$ を考えよ



\vec{v} の縮約 $\tilde{d}\phi[\vec{v}] = \frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha} v^\alpha$ は
補足 $[\vec{v}$ 変位する間の ϕ の増加量、おおよそ]
 \vec{v} が貫く等高線(表面)の枚数である。

$(\tilde{d}\phi)_\alpha = \frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^\alpha} \frac{\partial\phi}{\partial x^\beta} = \Lambda^\beta_\alpha (\tilde{d}\phi)_\beta$ なるので
1形式の成分の変換則が満たされている。

補足

勾配 $\tilde{d}\phi$ に対してはそのベクトルとの縮約を「1形式の描像」で見たように理解できる。
勾配 $\tilde{d}\phi$ は 山本義隆・中村弘「解析力学」p.80 で微分と呼ばれるものである。

p.82 **微分に対する記法**

$\frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha} \equiv \phi_{,\alpha}$
 $\tilde{d}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha} \tilde{\omega}^\alpha$ において
 $\tilde{d}\phi[\vec{e}_\alpha] = \frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha} = \delta^\beta_\alpha = \tilde{\omega}^\alpha(\vec{e}_\beta)$ ためから
 $\tilde{d}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha} \tilde{d}x^\alpha$

補足 山本義隆・中村弘「解析力学」でも同様に

(1.6.17): $df = \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right) dx^i$ を得た。

p.83 **垂直1形式**

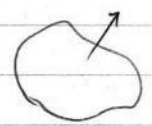


● 勾配ベクトル
表面に直交するベクトル。定義にメトリックを要する。
● 垂直1形式

表面に接する全てのベクトル(右図)に作用させるとゼロになる1形式。



特に、閉曲面の外を向くベクトル(右図)に作用させると正になるのは外向き垂直1形式



実は、勾配 $\tilde{d}\phi$ は $f = (\text{一定})$ の面に垂直な1形式

シュワルツ相対論入門

3.4 (2) テンソル

外積 $\tilde{p} \otimes \tilde{q}$ を $\tilde{p} \otimes \tilde{q}(\vec{A}, \vec{B}) = \tilde{p}(\vec{A})\tilde{q}(\vec{B})$ で定義する。
一般の(2)テンソル f は $f = f_{\mu\nu} \tilde{\omega}^\mu \otimes \tilde{\omega}^\nu$ と書ける。

$$\begin{aligned} \odot f = f_{\mu\nu} \tilde{\omega}^{\mu\nu} \text{ と書けるとき} \\ f_{\mu\nu} = f(\tilde{e}_\mu, \tilde{e}_\nu) = f_{\alpha\beta} \tilde{\omega}^\alpha(\tilde{e}_\mu) \tilde{\omega}^\beta(\tilde{e}_\nu) \\ \therefore \tilde{\omega}^{\alpha\beta}(\tilde{e}_\mu, \tilde{e}_\nu) = \delta^\alpha_\mu \delta^\beta_\nu = \tilde{\omega}^\alpha(\tilde{e}_\mu) \tilde{\omega}^\beta(\tilde{e}_\nu) \\ = \tilde{\omega}^\alpha \otimes \tilde{\omega}^\beta(\tilde{e}_\mu, \tilde{e}_\nu) \end{aligned}$$

対称性

f の(反)対称性 $f(\vec{A}, \vec{B}) = \pm f(\vec{B}, \vec{A})$ は、
その成分 $f_{\mu\nu} = f(\tilde{e}_\mu, \tilde{e}_\nu)$ の(反)対称性 $f_{\mu\nu} = \pm f_{\nu\mu}$ を意味する。
これから作られる対称テンソル $h_{(\mu\nu)}$, 反対称テンソル $h_{[\mu\nu]}$ を
 $h_{(\mu\nu)}(\vec{A}, \vec{B}) = \frac{1}{2} \{ h_{(\mu\nu)}(\vec{A}, \vec{B}) + h_{(\mu\nu)}(\vec{B}, \vec{A}) \}$
と定義し、それぞれ成分を $h_{(\mu\nu)}$, $h_{[\mu\nu]}$ と書く。
 $h_{\mu\nu} = h_{(\mu\nu)} + h_{[\mu\nu]}$ と分けられる。

3.5 n 次元から一形式への写像としての外積

一形式 $\tilde{V}(\cdot) \equiv g(\tilde{V}, \cdot) = g(\cdot, \tilde{V})$ による \vec{A} は
空間に \vec{A} を入れた値 $\tilde{V}(\vec{A}) = g(\tilde{V}, \vec{A}) = \tilde{V} \cdot \vec{A}$ に
写像される。

\tilde{V} の成分は $\tilde{V}(\tilde{e}_\alpha) \equiv V_\alpha = \eta_{\alpha\beta} V^\beta$

逆変換: \vec{A} から \vec{A} p.88

$(\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列 $(\eta^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を用い
逆: \vec{A} の成分 A_α から \vec{A} の成分 A^α が得られる:
 $A^\alpha = \eta^{\alpha\beta} A_\beta$

ここで \vec{A} から作った n 次元 \vec{A} は $\phi = \text{const}$ の面
に直交する。 $\phi = \text{const}$ の面内に \vec{V} をとると
 $\vec{A} \cdot \vec{V} = \vec{A}(\vec{V}) = (\vec{V}$ 進んだときの ϕ の増分) = 0
だから。

おせー一形式と n 次元を区別するの p.89

一形式 \vec{A} と n 次元 \vec{A} の違いは、 \vec{A} が非イコノメトリック
な $\eta_{\mu\nu}$ とおくと、成分の違いに反映される。

$\vec{A} \rightarrow (-A^0, \vec{A}) \quad \vec{A} \rightarrow (A^0, \vec{A})$

(一形式) \in (対称空間) (n 次元) \in (n 次元空間)

$$\begin{aligned} (a, b) &: \quad (\xi) &\mapsto a\xi + b\eta \\ \phi^* &: \quad \psi &\mapsto \int \phi^* \psi d^3x \\ \langle 2 | &: \quad |1\rangle &\mapsto \langle 2 | 1 \rangle \end{aligned}$$

一形式の大きさとして積 p.90

$\vec{p}^2 \equiv \tilde{p}^2 = \eta_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta$ の $\{p^\alpha\}$ を与えられた $\{p_\alpha\}$ で表し
 $\tilde{p}^2 = \eta^{\mu\nu} p_\mu p_\nu$

一形式 \tilde{p} と \tilde{q} の内積 $\tilde{p} \cdot \tilde{q} \equiv \eta^{\mu\nu} p_\mu q_\nu$ は成分による形
 $\tilde{p} \cdot \tilde{q} = \frac{1}{2} \{ (\tilde{p} + \tilde{q})^2 - \tilde{p}^2 - \tilde{q}^2 \}$ に書ける。

垂直 n 次元と単位垂直一形式 p.91

n 次元 \vec{A} が $\phi = (\text{一定})$ の面に垂直

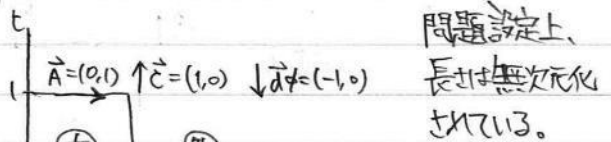
$\rightarrow 0 = \vec{A} \cdot \vec{V} = \vec{A}(\phi)$ \vec{V} は面内の n 次元

$\rightarrow \vec{A}$ に付随する \vec{A} は垂直一形式

特に $\vec{A}^2 = \tilde{A}^2 = \pm 1$ で \vec{A} は単位垂直

$\vec{A}^2 \geq 0 \Leftrightarrow \phi = (\text{一定})$ の面は空間的/時間的

p.92~1にて、練習問題21を考慮。



面 $t=0$ を考える。面の内側を向く n 次元

$\vec{A} = (1, 0)$ に付随する一形式 \vec{A} は

$\vec{A}(\vec{A}) = \vec{A} \cdot \vec{A} = 0 \quad \vec{A}(\vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B} = 1 > 0$

より外向き垂直一形式。

$\vec{A}^2 = -1 < 0$ より面 $t=0$ は時間的。

以上よりこれは p.92 Q.4.5 「面が時間的な外向きの垂直 n 次元は内側を指す」の一列。

面 $t=1$ を考える。面の内側を向く n 次元

$\vec{A} = (-1, 0)$ に付随する一形式 \vec{A} は

$\vec{A}(\vec{A}) = \vec{A} \cdot \vec{A} = 0 \quad \vec{A}(\vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{C} = 1 > 0$

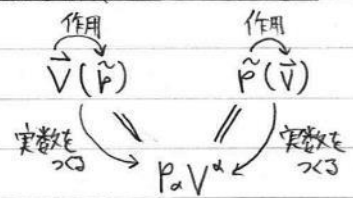
より外向き垂直一形式。

$\vec{A}^2 = -1 < 0$ より面 $t=1$ は時間的。

これも p.92 Q.4.5 「」の一列。

3.6 (M) テンソル

一形式の関数としてのベクトル



(M) テンソル Π : M個の一形式から実数への関数

成分 $\Pi(\tilde{\omega}^\alpha, \tilde{\omega}^\beta, \dots)$
 基底 $\tilde{e}_\alpha \otimes \tilde{e}_\beta \otimes \dots$

ただし $\tilde{V} \otimes \tilde{W}$ を $\tilde{V} \otimes \tilde{W}(\tilde{P}, \tilde{Q})$
 $= \tilde{V}(\tilde{P})\tilde{W}(\tilde{Q})$ で定義

(N) テンソル R : M個の一形式とN個のベクトルから実数の関数

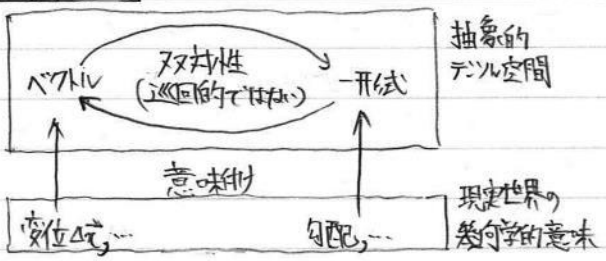
成分 $R^{\alpha_1 \dots \alpha_M}_{\beta_1 \dots \beta_N} \equiv R(\tilde{\omega}^{\alpha_1}, \dots, \tilde{\omega}^{\alpha_M}; \tilde{e}_{\beta_1}, \dots, \tilde{e}_{\beta_N})$ は

M階反変, N階共変テンソルの変換則に従う(言い方):

$$R^{\alpha_1 \dots \alpha_M}_{\beta_1 \dots \beta_N} = R(\Lambda^{\alpha_1}_{\mu_1} \tilde{\omega}^{\mu_1}, \dots; \Lambda^{\beta_1}_{\nu_1} \tilde{e}_{\nu_1}, \dots)$$

$$= \Lambda^{\alpha_1}_{\mu_1} \dots \Lambda^{\alpha_M}_{\mu_M} R^{\mu_1 \dots \mu_M}_{\nu_1 \dots \nu_N}$$

巡回論法か?



3.6 について

p. 92 下から4行「 $\tilde{V} \otimes \tilde{W}$ は成分 $V^\alpha W^\beta$ をもつ」について、成分は「基底一形式 $\tilde{\omega}^\alpha$ を変数としたときの値」(ただし2行目)だから正確には

$$(\tilde{V} \otimes \tilde{W})(\tilde{\omega}^\alpha, \tilde{\omega}^\beta) = \tilde{V}(\tilde{\omega}^\alpha)\tilde{W}(\tilde{\omega}^\beta)$$

$$= V^\alpha(\tilde{\omega}^\alpha)_\mu W^\beta(\tilde{\omega}^\beta)_\nu$$

$$= V^\alpha \delta^\alpha_\mu W^\beta \delta^\beta_\nu = V^\alpha W^\beta \text{ である.}$$

下から3行「(2) テンソルに対する基底 $\tilde{e}_\alpha \otimes \tilde{e}_\beta$ である」のは、(2) テンソルの基底を調べる(3.22)~(3.26)の議論同様、次に行うべき。

(2) テンソル Π が基底 \tilde{e}_α を用い $\Pi = T^\alpha e_\alpha$ と書けるとして、

$$T^\alpha = \Pi(\tilde{\omega}^\alpha, \tilde{\omega}^\beta) = T^{\alpha\mu} \tilde{e}_{\mu\nu}(\tilde{\omega}^\alpha, \tilde{\omega}^\beta)$$

$$\therefore \tilde{e}_{\mu\nu}(\tilde{\omega}^\alpha, \tilde{\omega}^\beta) = \delta^\alpha_\mu \delta^\beta_\nu \stackrel{(3.12)}{=} \tilde{\omega}^\alpha(\tilde{e}_\mu) \tilde{\omega}^\beta(\tilde{e}_\nu) \stackrel{(3.14)}{=} \tilde{e}_\mu(\tilde{\omega}^\alpha) \tilde{e}_\nu(\tilde{\omega}^\beta)$$

$$= \tilde{e}_\mu \otimes \tilde{e}_\nu(\tilde{\omega}^\alpha, \tilde{\omega}^\beta)$$

$$\therefore \tilde{e}_{\mu\nu} = \tilde{e}_\mu \otimes \tilde{e}_\nu$$

3.7 添字の“上げ”と“下げ”

テンソルの添字を上げ下げして新しいテンソルの成分もさるには、メトリックで写像する(メトリックを縮約する)。

メトリックの混合成分

g の成分 $g_{\alpha\beta}$ $l: g^{\alpha\beta}$ を縮約して (\rightarrow)

$$g_{\alpha\beta} \rightarrow g^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta \rightarrow g^{\alpha\beta}$$

と作られた反変成分 $g^{\alpha\beta}$ は、 g の逆テンソル g^{-1} の成分である。

メトリックと非メトリックベクトル代数

2つのベクトルのスカラー積を定義するのに、メトリックを導入

\rightarrow メトリックによる写像が定義される

写像を行なうテンソル = メトリック $g \rightarrow g_{\alpha\beta}$, $g^{-1} \rightarrow g^{\alpha\beta}$ である

\rightarrow ミニユースキ空間が得られる。

3.8 テンソルの微分

(1) テンソル $\Pi = T^\alpha_\beta \tilde{\omega}^\beta \otimes \tilde{e}_\alpha$ において

$\{\tilde{e}_\alpha\}$ しかかて $\{\tilde{\omega}^\beta\}$ は空間変化しないから、

$$\frac{d\Pi}{d\tau} = \left[\partial_r T^\alpha_\beta \right] U^r \tilde{\omega}^\beta \otimes \tilde{e}_\alpha \leftarrow \begin{cases} (3.65) \text{ の } \tilde{\omega}^\beta \text{ は} \\ \tilde{\omega}^\beta \text{ の } \tau \text{ が } \tau \end{cases}$$

が軌道 $\tilde{x}(\tau)$ に沿ったあらゆる U^r に対して成り立つ。

$$\leadsto \text{微分 } \nabla \Pi \equiv (\partial_r T^\alpha_\beta) \tilde{\omega}^\beta \otimes \tilde{\omega}^r \otimes \tilde{e}_\alpha$$

は (2) テンソル

3.8 について

p. 97 l. 3 ~ 「こゝから $\nabla T = (3.66)$ が (2) テンソルであることが帰結される」を理解するのは、(N) テンソルとその成分の変換則で定義された立場の就容易だ。このとき

- (M) テンソルと (M') テンソルの
- (1) 和は (M) テンソル ($M=M'$, $N=N'$ のとき定義域)
 - (2) 積は $\binom{M+M'}{N+N'}$ テンソル
 - (3) 縮約は $\binom{M+M'-1}{N+N'-1}$ テンソル (1つの反変成分と1つの共変成分を縮約)
- であることが示されたから。

$$\frac{dT^\alpha_\beta}{d\tau} = \partial_r T^\alpha_\beta \frac{dx^r}{d\tau} \quad \text{(において (2) の } \partial_r T^\alpha_\beta \text{ は (1.1) の } \frac{dT^\alpha_\beta}{d\tau} \text{ と区別)} \quad (2) \text{ テンソルではない。}$$

とここで、 $\{\partial_r\}$ は (1) テンソルの成分として変換だから、(2) の直ちに同じ結論を得る。

4 特殊相対論における完全流体

4.1 流体

- 重力源は連続体
- (連続体の) 要素… 巨視的量を一定と見なせる
- 連続体の接線応力 (\leftrightarrow 剛性)
 - 接線応力が弱い \rightarrow 流体
 - 接線応力がゼロ \rightarrow 完全流体

4.2 ダスト：粒子数流束ベクトル \vec{N}

ダスト……ある Lorentz 系に対して各粒子は静止

■粒子数密度 n (p.108～) MCR 系 (\rightarrow 教科書 p.53) での要素の粒子数密度を n とする。この要素は任意の系で共通の速度 v を持つ粒子から構成され、

$$\begin{cases} \text{要素内の粒子数是不変} \\ \text{要素の体積は}\sqrt{1-v^2}\text{倍に収縮} \end{cases} \rightarrow \text{数密度 } \frac{n}{\sqrt{1-v^2}}$$

■面を横切る粒子数流束 (p.109～) 粒子が速度 $(v^{\bar{x}}, v^{\bar{y}}, v^{\bar{z}})$ を持つ座標系をとる。図 10 の \bar{x} 軸に垂直な面積 ΔA を時間 $\Delta \bar{t}$ のうちに通過する粒子数は、図 10 の柱状領域に含まれる粒子数

$$\frac{n}{\sqrt{1-v^2}} \times v^{\bar{x}} \Delta \bar{t} \Delta A$$

だから、流束の \bar{x} 成分は

$$\frac{nv^{\bar{x}}}{\sqrt{1-v^2}}$$

と表される。

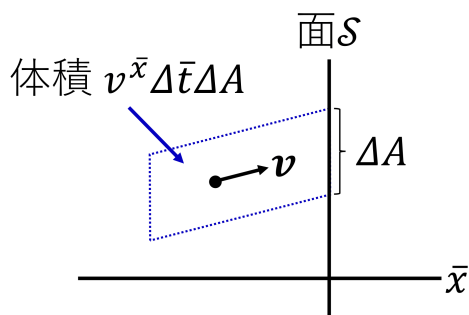


図 10 \bar{x} 軸に垂直な面積 ΔA を時間 $\Delta \bar{t}$ のうちに通過する粒子

■粒子数流束の四元ベクトル \vec{N} (p.110～) 粒子数の密度と流束は、粒子の四元速度 \vec{U} から作られる四元ベクトル

$$\vec{N} \equiv n\vec{U} = \left(\frac{n}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{n\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}} \right)$$

の成分となっている。

- 流束は慣性系ごとにベクトル自体が異なるのに対し、四元ベクトル \vec{N} は座標系に依らない幾何学的対象である。
- 内積 $\vec{N} \cdot \vec{N}$ はスカラーである。

これは

$$\vec{N} \cdot \vec{N} = n^2 \vec{U} \cdot \vec{U} = -n^2$$

において、 n を MCR 系の数密度と定義したことからもっともである。

4.2 について

■流束の表式 (4.3) について 流束の \bar{x} 成分の表式 (4.3):

$$\frac{nv^{\bar{x}}}{\sqrt{1-v^2}}$$

について

- これは非相対論的表式 $nv^{\bar{x}}$ に Lorentz 因子 $1/\sqrt{1-v^2}$ がかかったものとなっている。
- 粒子数密度 $\frac{n}{\sqrt{1-v^2}}$ と速度 $v^{\bar{x}}$ の積であることに変わらない。

■「ベクトル \vec{N} は幾何学的対象で、その存在は系とは独立である」(p.112, l.2) について 空間的位置関係が時間変化する 2 つの座標系では粒子の速度は異なるベクトルであるのに対し、四元速度 \vec{U} は共通のベクトルである。

4.3 一形式と面

■時間的流束としての粒子数密度 (p.112～) 図 11 において

$$\begin{aligned} N^{\bar{x}} &= (\bar{x} = (\text{一定}) \text{ 上の単位体積 } \Delta\bar{t}\Delta\bar{y}\Delta\bar{z} = 1 \text{ を通る世界線の本数}) \\ &= (\text{ある } \bar{x} = (\text{一定}) \text{ の面 } \mathcal{S} \text{ 上の単位面積 } \Delta\bar{y}\Delta\bar{z} = 1 \text{ を単位時間 } \Delta\bar{t} = 1 \text{ 中に通る粒子数}) \\ &= (\text{流束})^{\bar{x}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N^{\bar{t}} &= (\bar{t} = (\text{一定}) \text{ 上の単位体積 } \Delta\bar{x}\Delta\bar{y}\Delta\bar{z} = 1 \text{ を通る世界線の本数}) \\ &= (\text{ある時刻 } \bar{t} \text{ に単位体積 } \Delta\bar{x}\Delta\bar{y}\Delta\bar{z} = 1 \text{ に含まれる粒子数}) \\ &= (\text{粒子数密度}) \end{aligned}$$

[のように、意味の上で

$$\vec{N} \text{ が時空を運動する粒子の流束} \Leftrightarrow \vec{N} = (\text{粒子数密度}, \text{粒子数流束})$$

となっている].

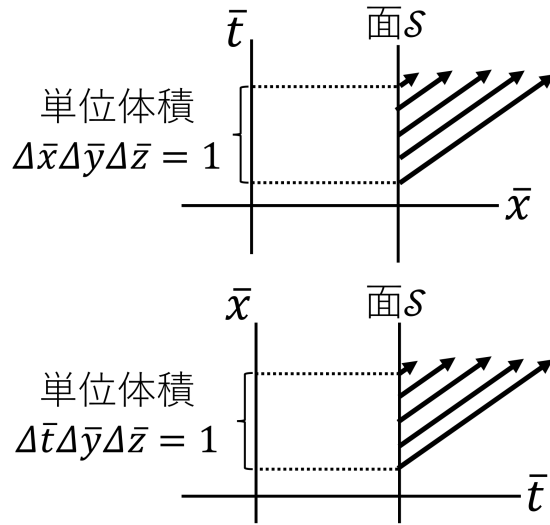


図 11 $\bar{x} = (\text{一定})$ または $\bar{t} = (\text{一定})$ の面を横切る粒子群

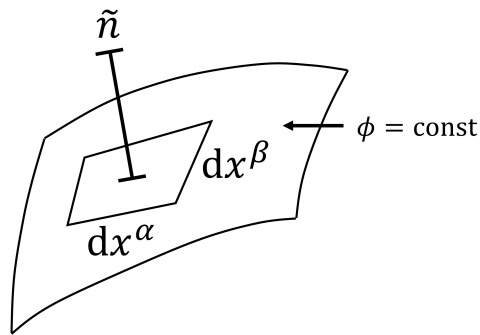


図 12 曲面 $\phi(t, \mathbf{x}) = \text{const}$ の単位垂直一形式 \tilde{n} と“面積要素”

■曲面を定義する一形式 (p.113~) [3次元超] 曲面 $\phi(t, \mathbf{x}) = \text{const}$ の単位垂直一形式

$$\tilde{n} \equiv \tilde{d}\phi / |\tilde{d}\phi|$$

から作った“面積要素”

$$\tilde{n} dx^\alpha dx^\beta dx^\gamma$$

を定義する (図 12 参照, 単位体積の“面積要素”は \tilde{n}).

■面を横切る流束 (p.115) “面積要素” \tilde{n} を持つ体積要素を通過する世界線の本数, すなわち流束は $\langle \tilde{n}, \vec{N} \rangle$.

例

$$\begin{aligned} \text{面 } \bar{x} = \text{const} &\Rightarrow \tilde{n} = (0, 1, 0, 0) \Rightarrow \langle \tilde{n}, \vec{N} \rangle = n_\alpha N^\alpha = N^{\bar{x}}, \\ \text{面 } \bar{t} = \text{const} &\Rightarrow \tilde{n} = (1, 0, 0, 0) \Rightarrow \langle \tilde{n}, \vec{N} \rangle = n_\alpha N^\alpha = N^{\bar{t}}. \end{aligned}$$

■一形式による系の表現 (p.115～) 慣性系では [ダストは静止していて $\vec{U} = (1, \mathbf{0})$ だから]

$$U_\alpha = (-1, \mathbf{0})$$

である。これは $-\tilde{d}t$ の成分である。 \vec{U} の代わりに $\tilde{d}t$ を用いて系を定義でき、系のエネルギーは $\tilde{d}t$ を用いて

$$E = p^0 = \langle \tilde{d}t, \vec{p} \rangle$$

と与えられる。

4.4 再びダストについて：ストレス・エネルギーテンソル

■エネルギー密度 (p.116～)

$$\rho \equiv (\text{MCR 系でのエネルギー密度}).$$

ダストを構成する各粒子は MCR 系で静止するから、粒子が共通の質量 m を持つとすると

$$\rho = mn.$$

また

$$\begin{aligned} & (\text{ダスト要素が速度 } v \text{ を持つ座標系でのエネルギー密度}) \\ &= \underbrace{\frac{m}{\sqrt{1-v^2}}}_{\text{エネルギーの変換}} \underbrace{\frac{n}{\sqrt{1-v^2}}}_{\text{体積の変換}} \\ &= \frac{\rho}{\sqrt{1-v^2}} \\ &= \Lambda^{\bar{0}}_0 \Lambda^{\bar{0}}_0 \rho : \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ テンソル成分の変換則.} \end{aligned}$$

さらに

$$(\text{エネルギー, 運動量}) \times (\text{粒子数密度, 粒子数流束})$$

は

- エネルギー, 運動量を \vec{p} からとり出す一形式
- $t = \text{const}$ または $x^i = \text{const}$ の面を定義する一形式

を変数に持つ $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ テンソル \mathbf{T} (ストレス・エネルギーテンソル) の成分である。

■ストレス・エネルギーテンソル (p.117～)

$$T^{\alpha\beta} \equiv (\vec{p} \text{ の } \alpha \text{ 成分に関する流束の } \beta \text{ 成分})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T^{00} = (\text{エネルギー密度}) \\ T^{0i} = (\text{エネルギー流束}) \\ T^{i0} = (\text{運動量密度}) \\ T^{ij} = (\text{運動量流束}) \end{cases}$$

(\therefore 時空の流束の時間成分は空間密度だから).

ダストは MCR 系で静止しているから

$$T^{00} = mn, \quad \text{その他の } T^{\alpha\beta} = 0$$

であり, これは

$$\vec{p} \otimes \vec{N} = \rho \vec{U} \otimes \vec{U} \quad (\vec{p} = m\vec{U}, \quad \vec{N} = n\vec{U})$$

の成分である. よって任意の系で

$$\mathbf{T} = \rho \vec{U} \otimes \vec{U}$$

であり, 成分は

$$T^{00} = \frac{\rho}{1-v^2}, \quad T^{0i} = \frac{\rho v^i}{1-v^2} = T^{i0}, \quad T^{ij} = \frac{\rho v^i v^j}{1-v^2} = T^{ji}$$

と添字に関して対称となる (対称性はダストに限らず正しい).

4.4 について

■エネルギー密度が (2,0) テンソルの成分として変換すること (pp.116–117) について ダストに対してストレス・エネルギーテンソル成分 $T^{\mu\nu}$ は $T^{00} = \rho$ 以外の成分がゼロだから (p.118),

$$T^{\bar{0}\bar{0}} = \Lambda^{\bar{0}}_{\alpha} \Lambda^{\bar{0}}_{\beta} T^{\alpha\beta} = \Lambda^{\bar{0}}_0 \Lambda^{\bar{0}}_0 T^{00}.$$

■MCR 系でのストレス・エネルギーテンソルの成分 「テンソル $\vec{p} \otimes \vec{N}$ の成分が MCR 系で前述のようになることは容易にわかる」 (p.118, 1.13,14) について, 式 (4.19):

$$\vec{p} \otimes \vec{U} = \rho \vec{U} \otimes \vec{U}$$

の成分を調べる. MCR 系では $\vec{U} = (1, \mathbf{0})$ だから, $\mathbf{T} = \rho \vec{U} \otimes \vec{U}$ の成分 $T^{\alpha\beta} = \rho U^{\alpha} U^{\beta}$ は

$$T^{00} = mn, \quad \text{その他の } T^{\alpha\beta} = 0$$

となる.

4.5 一般の流体

粒子のランダムな運動や粒子間の力がある一般の流体を考える.

■マクロな量の定義 (p.119) MCR 系での値を用いて定義する. MCR 系は流体要素ごとに異なる.

■熱力学第一法則 (p.119~) n, ρ を定義する MCR 系の流体要素 (体積 V , 粒子数 N) について,

$$N = nV, \quad E = \rho V$$

となることに注意すると, 熱力学第一法則

$$\Delta E = \Delta Q - p\Delta V$$

は式 (4.24):

$$n\Delta q = \Delta\rho - \frac{\rho+p}{n}\Delta n$$

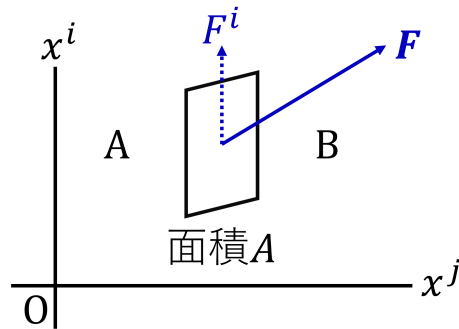


図 13 流体に働く応力

と書き換えられる ($\Delta q \equiv \Delta Q/N$ は 1 粒子の受け取る熱量. n, ρ を独立変数と見ている). これは可積分である, すなわち

$$ndq = d\rho - \frac{\rho + p}{n} dn = nTdS$$

となる n, ρ の関数 T, S が存在する. T は温度, S はエントロピーである.

■一般のストレス・エネルギーテンソル (p.112) MCR 系において, 一般の流体は熱運動しているため

$$T^{0i} = T^{i0} \neq 0, \quad T^{ij} \neq 0$$

となる. エネルギー密度 T^{00} は MCR 系では, [全体的な並進運動のエネルギーを含まず] ρ になる. ρ はランダム運動のエネルギーを含む (表 4.1(教科書 p.120)).

■ T の空間成分 T^{ij} (p.122) 図 13 において

$$\begin{aligned} T^{ij} &= (\text{A から B に単位時間に流れる運動量})^i / A \\ &= F^i / A \quad (\text{MCR 系で流体要素は静止し, 非相対論的な運動方程式が成立}) \end{aligned}$$

は応力である.

■MCR 系での $T^{\alpha\beta}$ の対称性 (p.122~) 図 14 の立方体の流体要素について, $l \rightarrow 0$ で要素の加速度 [$\propto 1/l$ (応力 $\sim l^2$, 質量 $\sim l^3$)] が発散しないことから, [面積力のつり合い]

$$F_1^i + F_3^i = 0, \quad F_2^i + F_4^i = 0$$

が成立する. ここから流体要素に働くトルクの表式

$$\tau_z = (T^{xy} - T^{yx})l^3$$

が得られる. z 軸周りの慣性モーメントは

$$I \sim Ml^2, \quad I \propto \rho l^5$$

だから, z 軸周りの回転角 θ について

$$\ddot{\theta} \propto \frac{T^{xy} - T^{yx}}{l^2}$$

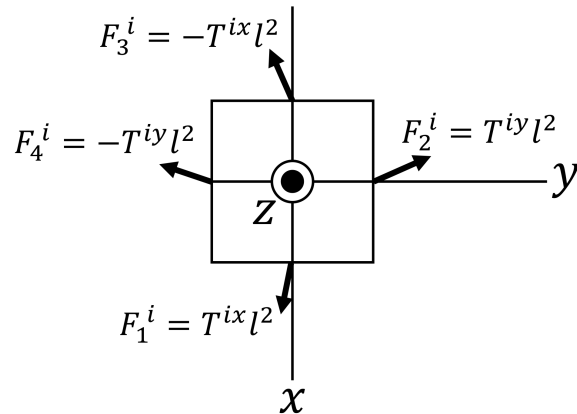


図 14 立方体の流体要素が周囲の流体に及ぼす力を描いている。その反作用が流体要素に働く力である。

となる。これが $l \rightarrow 0$ で発散しない条件として、MCR 系における対称性

$$T^{ij} = T^{ji}$$

が導かれる。ある系で添字に関して対称なテンソルは任意の系で対称である。

■エネルギー・運動量の保存 (p.125～) p^α の密度は $T^{\alpha 0}$ ，流束は $T^{\alpha i}$ なので， p^α の保存則は

$$0 = \partial_0 T^{\alpha 0} + \partial_i T^{\alpha i} = T^{\alpha\beta}_{,\beta}$$

と書ける。

■粒子数の保存 (p.126～)

$$0 = \partial_0 N^0 + \partial_i N^i = N^{\alpha}_{,\alpha}$$

たいていの場合，バリオンの数密度は保存されるから， n をバリオンの数密度とすれば流体は保存則 $N^{\alpha}_{,\alpha} = 0$ を満たすものとして扱うことができる。

4.5 について

■エネルギー密度 ρ の定義 (表 4.1(教科書 p.120)) について 静止エネルギー密度 ρ にランダム運動のエネルギーが含まれることについて，物体を加熱すると質量が増大する [2, p.98].

■式 (4.23): $n = N/V$ について n, V は注目している流体要素の数密度と体積である。空間に固定した領域の数密度と体積ではない。

■ T の空間成分 T^{ij} (p.122) について MCR 系で非相対論的な運動方程式が成立するため，

$$(\text{単位時間に面を横切る運動量})^i = F^i$$

において F^i として Minkowski 力を用いなくて良い。

ある領域に含まれる流体の運動量の変化は一般に，

- 周囲からの運動量の流入
- 周囲からの応力

によってもたらされる。ここでは運動量の流入による変化が応力による変化と見なされ運動量の流束 T^{ij} は応力であると説明されている。

■応力テンソルの引数について p.124, 1.1,1.4 の T^{ix}, T^{iy} はどの位置での値かがあからさまに示されていない。しかし p.126 では $T^{0x}(x=l)$ などと明記されているように、これは位置に依存した量である。面積力のつり合い

$$F_1^i + F_3^i = 0, \quad F_2^i + F_4^i = 0$$

は

$$\begin{aligned} T^{ix} \left(\frac{l}{2}, 0, 0 \right) &= T^{ix} \left(-\frac{l}{2}, 0, 0 \right) \equiv T^{ix}, \\ T^{iy} \left(0, \frac{l}{2}, 0 \right) &= T^{iy} \left(0, -\frac{l}{2}, 0 \right) \equiv T^{iy} \end{aligned}$$

を意味する。

■トルクの式 (4.27) について 導出過程を以下に整理する。

$$\begin{aligned} (\mathbf{r} \times (-\mathbf{F}_1))^z &= -\frac{l}{2} F_1^y \quad \left(\because \mathbf{r} = \left(\frac{l}{2}, 0, 0 \right) \right) \\ &= -\frac{1}{2} T^{yx} l^3 \quad (\because F_1^i = T^{ix} l^2), \\ (\mathbf{r} \times (-\mathbf{F}_2))^z &= \frac{l}{2} F_2^x \quad \left(\because \mathbf{r} = \left(0, \frac{l}{2}, 0 \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} T^{xy} l^3 \quad (\because F_2^i = T^{iy} l^2), \\ (\mathbf{r} \times (-\mathbf{F}_3))^z &= \frac{l}{2} F_3^y \quad \left(\because \mathbf{r} = \left(-\frac{l}{2}, 0, 0 \right) \right) \\ &= -\frac{1}{2} T^{yx} l^3 \quad (\because F_3^i = T^{ix} l^2), \\ (\mathbf{r} \times (-\mathbf{F}_4))^z &= -\frac{l}{2} F_4^x \quad \left(\because \mathbf{r} = \left(0, -\frac{l}{2}, 0 \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} T^{xy} l^3. \quad (\because F_4^i = -T^{iy} l^2) \end{aligned}$$

■エネルギー・運動量の保存 (p.125～) について 「(b) 運動量密度とエネルギー流束の同等性」 (p.125) の議論を、 $c=1$ と置かずに補足しつつまとめる。文献 [3, p.90] で定義されるように

$$(\text{エネルギー流束}) = cT^{0i}, \quad (\text{運動量密度}) = T^{0i}/c$$

だから,

$$\begin{aligned} T^{0i} &= \frac{(\text{エネルギー密度}) \times (\text{速度})}{c} \\ &= (\text{質量密度}) \times (\text{速度}) \times c \\ &\quad (\text{並進運動のエネルギーがなく, ランダムな運動のエネルギーを含む質量エネルギーのみを考慮}) \\ &= (\text{運動量密度}) \times c \\ &\quad (\text{MCR 系では並進運動がないが, 熱が運動量を運ぶ (p.122)}) \\ &= T^{i0}. \end{aligned}$$

■粒子数の保存 (p.126~) について 「特に, 図 4.8 で流体要素の粒子数の変化の割合は, 境界を通してやり取りのみ, つまり出入りする正味の流束のみに依存している」 (p.126 一番下~p.127, 1.2) について, ここでは流体要素として空間に固定した領域をとったため, 粒子の反応や生成・消滅がない場合にもその中の粒子数は変化する.

4.6 完全流体

相対論での完全流体は MCR 系で, 粘性も, 熱伝導もない流体のことである.

■熱伝導がないこと (p.128) 全体的な運動のない MCR 系でエネルギー・運動量を運ぶのは熱だから (p.122),

$$\text{エネルギー流束 } T^{0i} = 0, \quad \text{運動量密度 } T^{i0} = 0.$$

また,

$$\begin{aligned} 0 &= dq \quad (\text{熱の流入がない}) \\ &= TdS \quad (\text{式 (4.26)}), \\ \rightarrow &\quad \text{流体要素のエントロピーが保存.} \end{aligned}$$

■粘性がないこと (p.128~) 接線応力がないから, T^{ij} は対角的である. これが任意の MCR 系で成り立つには, 対角成分は全て等しくなければならず, それは圧力 p に他ならない:

$$T^{ij} = p\delta^{ij}.$$

■ \mathbf{T} の形 (p.128~) MCR 系における成分

$$(T^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

は, MCR 系で $\vec{U} = (1, \mathbf{0})$ であることに注意すると

$$T^{\alpha\beta} = (\rho + p)U^\alpha U^\beta + p\eta^{\alpha\beta}$$

とまとめられる. これはテンソルの関係式

$$\mathbf{T} = (\rho + p)\vec{U} \otimes \vec{U} + p\mathbf{g}^{-1}$$

だから任意の系で成り立つ.

■圧力の意味についてひと言 (p.129)

完全流体……粒子はランダムに熱運動

$$\rightarrow p \neq 0$$

(粒子が希薄で衝突が無視できる場合にも圧力はある。

圧力は運動量流束だから),

ダスト……粒子は静止

$$\rightarrow p = 0.$$

そこで完全流体に対する成分

$$T^{\alpha\beta} = (\rho + p)U^\alpha U^\beta + p\eta^{\alpha\beta}$$

において $p = 0$ とおくと, ダストに対する表式

$$T^{\alpha\beta} = \rho U^\alpha U^\beta$$

を得る.

■保存則 (p.129) 保存則

$$0 = T^{\alpha\beta}_{;\beta} = \{(\rho + p)U^\alpha U^\beta + p\eta^{\alpha\beta}\}_{;\beta}$$

の MCR 系での時間成分として, 世界線に沿ってエントロピーが変化しないこと (断熱)

$$\frac{dS}{d\tau} = 0$$

が得られる.

さらに保存則の空間成分として得られる式

$$(\rho + p)a_i = -p_{;i}, \quad a_i \equiv U^\beta U_{i;\beta} = \frac{dx^\beta}{d\tau} \partial_\beta U_i = \frac{dU_i}{d\tau}: \text{四元加速度}$$

は非相対論的流体力学において [すなわち Euler 方程式 $\mathbf{a} = -\frac{1}{\rho}\nabla p$ において]

$$\begin{aligned} \text{加速度 } \mathbf{a} &\rightarrow \text{四元加速度,} \\ \rho &\rightarrow \rho + p \end{aligned}$$

と置き換えたものになっている.

4.6 について

■粘性がないこと (p.128~) について

- ここでは T^{ij} は x^j 座標の小さい側が大きい側へ及ぼす応力を意味するため,

$$T^{ij} = p\delta^{ij}$$

の右辺に負号は現れない.

- 空間軸の方向だけを変える変換に対して

$$T^{\bar{i}\bar{j}} = \Lambda^{\bar{i}}_{\bar{k}} \Lambda^{\bar{j}}_{\bar{l}} T^{kl} = \sum_k \Lambda^{\bar{i}}_{\bar{k}} \Lambda^{\bar{j}}_{\bar{k}} T^{kk}$$

である (最後の等号は T^{kl} が対角的だから).

ここで全ての対角要素 T^{kk} が等しく p であるとする, $(\Lambda^{\bar{i}}_{\bar{k}})$ が直交行列であることとより, 新しい座標系の成分も

$$T^{\bar{i}\bar{j}} = p \sum_k \Lambda^{\bar{i}}_{\bar{k}} \Lambda^{\bar{j}}_{\bar{k}} = p \delta^{\bar{i}\bar{j}}$$

と対角的になる.

■式 (4.42): $U^\alpha_{,\beta} U^\alpha = 0$ の導出について

$$\begin{aligned} 0 &= (U^\alpha U_\alpha)_{,\beta} \quad (\because U^\alpha U_\alpha = -1) \\ &= (U^\alpha U_\gamma \eta_{\alpha\gamma})_{,\beta} = (U^\alpha U_\gamma)_{,\beta} \eta_{\alpha\gamma} \quad (\because \eta_{\alpha\gamma,\beta} = 0) \\ &= 2U^\alpha_{,\beta} U^\gamma \eta_{\alpha\gamma} = 2U^\alpha_{,\beta} U_\alpha \end{aligned}$$

となっている.

■「こうすると式 (4.45) の MCR 系での時間成分が求められ」(p.130, 1.8,9) について MCR 系では $\vec{U} = (1, \mathbf{0})$ だから.

■保存則の MCR 系での時間成分 (4.49) について 導出を補足しつつ一気に行う.

$$\begin{aligned} 0 &= T^{\alpha\beta}_{,\beta} = \{(\rho + p)U^\alpha U^\beta + p\eta^{\alpha\beta}\}_{,\beta} \\ &= \left\{ (nU^\beta) \left(\frac{\rho + p}{n} U^\alpha \right) \right\}_{,\beta} + p_{,\beta} \eta^{\alpha\beta} \\ &\quad (\text{「式 (4.42) は次のように利用できる」(p.130, 1.4,5) について} \\ &\quad \text{ここまでで直接用いたのは } \eta^{\alpha\beta}_{,\gamma} = 0 \text{ であって式 (4.42) : } U_\alpha U^\alpha_{,\beta} = 0 \text{ ではない)} \\ &= nU^\beta \left(\frac{\rho + p}{n} U^\alpha \right)_{,\beta} + p_{,\beta} \eta^{\alpha\beta} : (4.45). \quad (\because 0 = N^\beta_{,\beta} = (nU^\beta)_{,\beta}) \end{aligned}$$

両辺を U_α と縮約して

$$\begin{aligned} 0 &= nU^\beta U_\alpha \left(\frac{\rho + p}{n} U^\alpha \right)_{,\beta} + U_\alpha p_{,\beta} \eta^{\alpha\beta} \\ &= nU^\beta U_\alpha \left\{ \left(\frac{\rho + p}{n} \right)_{,\beta} U^\alpha + \frac{\rho + p}{n} U^\alpha_{,\beta} \right\} + U^\beta p_{,\beta} \\ &= U^\beta \left[-n \left(\frac{\rho + p}{n} \right)_{,\beta} + p_{,\beta} \right] : (4.47) \quad (\because U_\alpha U^\alpha = -1, \text{ 式 (4.42) : } U_\alpha U^\alpha_{,\beta} = 0) \\ &= U^\beta \left[-(\rho + p)_{,\beta} + \frac{n_{,\beta}}{n} (\rho + p) + p_{,\beta} \right] \quad (\text{角括弧内の第 1 項を } (\rho + p) \text{ の微分と } 1/n \text{ の微分に分けた)} \\ &= -U^\beta \left[\rho_{,\beta} - \frac{\rho + p}{n} n_{,\beta} \right] : (4.48) \\ &= -\frac{d\rho}{d\tau} + \frac{\rho + p}{n} \frac{dn}{d\tau} : (4.49) \end{aligned}$$

$$= -nT \frac{dS}{d\tau} \quad (\text{流体要素の 1 粒子あたりのエントロピー変化 (4.25): } d\rho - (\rho + p)(dn/n) = nTdS)$$

$$\Rightarrow \frac{dS}{d\tau} = 0 : (4.50).$$

■保存則の MCR 系での空間成分 (4.54) について 導出を補足しつつ一気に行う。

$$0 = nU^\beta \left(\frac{\rho + p}{n} U^i \right)_{,\beta} + p_{,\beta} \eta^{i\beta} : (4.51)$$

$$= nU^\beta \left\{ \left(\frac{\rho + p}{n} \right)_{,\beta} U^i + \frac{\rho + p}{n} U^i_{,\beta} \right\} + p_{,\beta} \eta^{i\beta}$$

$$= U^\beta (\rho + p) U^i_{,\beta} + p_{,\beta} \eta^{i\beta} : (4.52), \quad (\because U^i = 0)$$

$$\therefore 0 = (\rho + p) U^\beta U_{i,\beta} + p_{,\beta} \eta_i{}^\beta$$

$$= (\rho + p) a_i + p_{,i} : (4.54), \quad a_i \equiv U^\beta U_{i,\beta} = \frac{dx^\beta}{d\tau} \partial_\beta U_i = \frac{dU_i}{d\tau} : \text{四元加速度.}$$

4.7 一般相対論の重要性

一般相対論の重力源は \mathbf{T}

- 特別な座標系ではエネルギー密度 T^{00} が重力源
- 重力源の全体としての運動のない MCR 系でのエネルギー密度 T^{00} は全質量エネルギー密度 ρ
- ↔ Newton 理論の重力源は、(熱運動のエネルギー等を除いた) 質量密度 ρ_0 .

圧力も重力の源となり得る。星において要素が (与えられた) 加速度 a_i を持つとき、[これは重力の目安であり、重力に対抗するのに必要な] 圧力勾配は $p_{,i} = -(\rho + p)a_i$ である。これは圧力の大きい星ほど重力を支えるのに大きな圧力勾配が必要とされることを意味する。圧力の寄与は $p \ll \rho$ が満たされる通常の星では Newton 理論を大差ないが、高密度天体や“相対論的”ガスにおいて $p \approx \rho$ となると、必要な圧力勾配が大きすぎて重力を支えきれなくなる。

4.8 ガウスの法則

保存則の積分表示は

$$0 = \int d^4x N^\alpha_{,\alpha} = \oint d^3S n_\alpha N^\alpha, \quad 0 = \int d^4x T^{\alpha\beta}_{,\beta} = \oint d^3S n_\beta T^{\alpha\beta}$$

となる。最後の等号は Gauss の法則 [定理] による。ただし n_α は単位垂直一形式 \tilde{n} の成分であり、 n_α は図 15 のように“外向き”である。

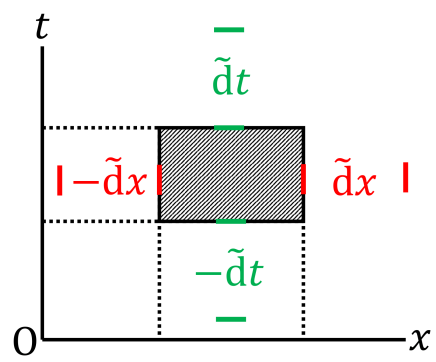


图 15 单位垂直一形式 $\tilde{n} = \pm\tilde{d}x, \pm\tilde{d}t$

シュン『相対論入門』

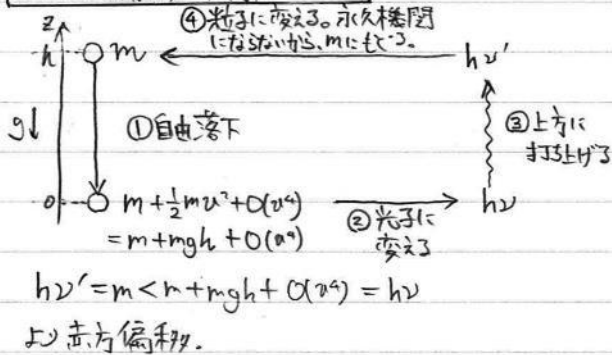
5 曲率の導入

5.1 重力と曲率の関係

序文 (p.142)

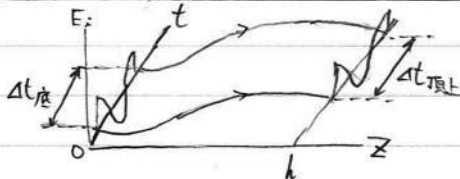
特殊相対論 --- 大域的な慣性系をつくれる。
 非-様な重力場 --- 全ての時計が同じ割合で進むような系をつくれない。

重力赤方偏移の実験 (p.142)



↔ 地上の高い位置ほど時計の進み方は速い (後述)

地上で静止したローレンツ系が存在しないこと (p.144)



時間変化しない重力場では、異なる時刻に $z=0$ を発した2つの波頭の経路は平行移動せると一致だから

Minkowski幾何学の $\Delta t_{地上} = \Delta t_{地下}$

しかし、実際には赤方偏移の実験より

$$\Delta t_{地上} = \frac{1}{\gamma_{地上}} > \frac{1}{\gamma_{地下}} = \Delta t_{地下} \quad \text{だから}$$

地上に静止した基準系は Minkowski幾何学を満たさない (Lorentz系でない)。

等価原理 (p.144)

重力場中で初速度が同じ物体はすべて同じ軌跡を描く (他の方とは異なる)

- 力が働かないとき静止する特別な粒子がない。
- 力が働かないとき物体が静止する基準系という意味での慣性系を見つけれない。

一方、全ての物体が一樣な速度をもつ基準系を慣性系とすれば、自由落下系が慣性系となる。

これに対し一樣な重力場における

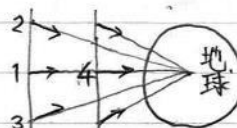
物体の運動は自由粒子の運動を、物理法則は特殊相対論の形を、
 見たものとなる: { 弱い等価原理 }
 { 強い等価原理 }

1. 重力を一樣と見なせる局所領域で自由落下系は慣性系
2. 自由落下系は空間軸の方向の速さに応じて無数に存在する。

再び赤方偏移の実験 (p.147)

自由落下系で赤方偏移は起こらない → 補足参照

局所慣性系 (p.147)



粒子1は遠くの粒子2, 3, 4と速度が異なる。

時間が経ち1が地球に近づくと、2, 3, 4が同じ速度をもつ系は剛体的でない

と見なせる範囲はせばまる。

→ 局所慣性系をとる

潮汐力 (p.148)

潮の満干は地球と太陽がくっつく非-様な重力場による。

曲率の役割 (p.148)

局所的に平行な直線群が平行に

Euclid空間 } 平坦 ← 曲がらない
 非Euclid空間 } Minkowski空間 }
 (外側がEuclid) } 重力のある時空 ... 曲がっている ← 曲がらない空間と異なる

5.1 について

重力赤方偏移の実験 (p. 142~) において

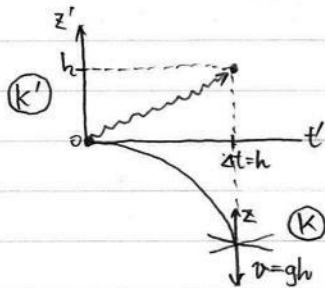
重力に仕事を加えて粒子のエネルギーが

$$m \rightarrow h + \frac{1}{2}mv^2 + O(v^4) = m + mgh + O(v^4) \text{ に変化した}$$

これは、粒子が元々重力ポテンシャル mgh をもっており、

$$m + mgh \rightarrow m + \frac{1}{2}mv^2 + O(v^4) \text{ と変換したと見做す。}$$

再び赤方偏移の実験 (p. 142~) について、



地上の系 K' で見ると頂上に着いた光子は

$$(E', p'_z) = (E', E'/c) \text{ をと} (\because E' = cp'_z, c=1).$$

自由落下系 K で見た頂上の光子のエネルギー E は

これを Lorentz 変換した

$$E = \frac{E' + v p'_z}{\sqrt{1-v^2}} = E' \frac{1+v}{\sqrt{1-v^2}} = E' \sqrt{\frac{1+v}{1-v}} = E' (1+v + O(v^2))$$

である。 $v = gh$ を代入すると (5.2):

$$\frac{E}{E'} = \frac{1+gh}{\sqrt{1-(gh)^2}} = 1+gh + O(v^2) \quad \dots \textcircled{1}$$

を得る ($O(v^2)$ は (5.1) の $O(v^2)$)

さて、 K 系で赤方偏移の有無を調べるときは、 K 系で見た
底の光子のエネルギー $E_{\text{底}}$ を E と比べなければいけません。

$t'=0$ で K 系と K' 系は一致だから、

$$E_{\text{底}} = E'_{\text{底}} \sqrt{\frac{E'}{1-gh + O(v^2)}} \quad \dots \textcircled{2}$$

(5.1)

①, ②より

$$\frac{E}{E_{\text{底}}} = \frac{E/E'}{E_{\text{底}}/E'} = (1+gh + O(v^2))(1-gh + O(v^2))$$

$$= 1 + O(v^2) \quad (\because v = gh)$$

≈ 1 ため赤方偏移は起こらない。

シュワルツ相対論入門

5.2 極座標でのテンソル代数

座標変換 $(x, y) \rightarrow (r, \theta)$ において、空間の2点の座標の差は

$$\Delta \xi^\alpha = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta} \Delta x^\beta \quad (5.5)$$

同じ座標 (ξ, η) をもつのは同一点 (x, y) のみとき

$$\Delta \xi^\alpha = 0 \Rightarrow \Delta x^\beta = 0$$

$\rightarrow (\Lambda^\alpha{}_\beta) = (\partial \xi^\alpha / \partial x^\beta)$ の逆をもつ

\rightarrow Jacobian $|\Lambda^\alpha{}_\beta| \neq 0$

$|\Lambda^\alpha{}_\beta| = 0$ となる点で変換は特異といふ。

ベクトル形式 (p.151~)

ベクトルは古い方法では、その成分が上記 (5.5) と同じ

$V^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta V^\beta$ と変換するもよく定義される。

(3.15) の一般形式 $\vec{d}\phi \rightarrow (\partial\phi/\partial\xi, \partial\phi/\partial\eta)$ を定義するとその成分は

$$(\vec{d}\phi)_\alpha = \frac{\partial \phi}{\partial \xi^\alpha} = \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \phi}{\partial x^\beta} = \Lambda^\beta{}_\alpha (\vec{d}\phi)_\beta \quad \text{と変換する。}$$

一般の座標変換で変換係数 $\Lambda^\alpha{}_\beta, \Lambda^\beta{}_\alpha$ は互いに

$$\text{逆である: } \Lambda^\alpha{}_\beta \Lambda^\beta{}_\gamma = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\gamma} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \xi^\gamma} = \delta^\alpha{}_\gamma$$

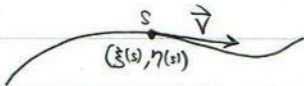
$$(\Leftrightarrow (5.15), (5.16))$$

曲線とベクトル (p.154~)

(経路) + (パラメータ s) \equiv (曲線) であり、

同じ経路でもパラメータ s に応じて無限の曲線

および接ベクトル $\vec{V} = (d\xi/ds, d\eta/ds)$ が得られる。



\vec{V} の成分は [座標の微分だから $d\xi^\alpha = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta} dx^\beta$ となる]

確かにベクトルの変換則に従い、しかも式のように

一般形式 $\vec{d}\phi$ の作用に実数 $d\phi/ds$ も作る関数と見なせる。

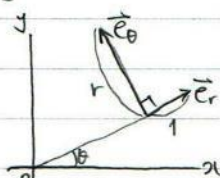
$$\langle \vec{d}\phi, \vec{V} \rangle = (\vec{d}\phi)_\alpha V^\alpha = \frac{\partial \phi}{\partial \xi^\alpha} \frac{d\xi^\alpha}{ds} = \frac{d\phi}{ds} \quad (2.54)$$

極座標基底形式と極座標基底ベクトル (p.153~)

基底ベクトルの変換則 $\vec{e}_\alpha = \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha} \vec{e}_\beta$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{e}_r = \cos\theta \vec{e}_x + \sin\theta \vec{e}_y \\ \vec{e}_\theta = -r\sin\theta \vec{e}_x + r\cos\theta \vec{e}_y \end{cases}$$

[この \vec{e}_θ は $\partial/\partial\theta$ に対応する]



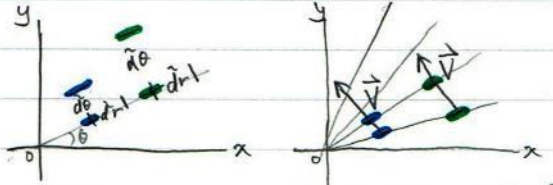
「ラジアン」の方向の変位 (p.157 l.2)

だから、原点から距離 r と長くなる。

基底形式 (3.20): $\tilde{d}x^\alpha = \tilde{\omega}^\alpha$ の変換則 (3.13):

$$\tilde{\omega}^{\alpha'} = \Lambda^{\alpha'}{}_\beta \tilde{\omega}^\beta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tilde{d}\theta = -\frac{r\dot{\theta}}{r} \tilde{d}x + \frac{\omega\dot{\theta}}{r} \tilde{d}y \\ \tilde{d}r = \cos\theta \tilde{d}x + \sin\theta \tilde{d}y \end{cases}$$



\vec{V} を変位させたときの θ の増加 $\dot{\theta}(\vec{V})$ は原点付近で大きい (\rightarrow 3.3節)

メトリックテンソル (p.157~)

● 極座標での g の成分 $g_{\alpha\beta} = g(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta) = \vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta$ は上記より g の定義 (3.3)

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r & \vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta & \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

● 一般に $g_{\alpha\beta} = \vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta$ より $d\vec{l} = d\xi^\alpha \vec{e}_\alpha$ に対し

$$ds^2 = d\vec{l} \cdot d\vec{l} = g_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta \quad \text{と書ける。}$$

今の場合 $d\vec{l} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta$ に対し上記より、成分は

[\vec{e}_θ は長さが r である。第2項を $r d\theta \vec{e}_\theta$ としてはいいから]

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$$

● なお、 g は基底 $\tilde{d}x^\alpha \otimes \tilde{d}x^\beta$ を用い (3.26) に従い

$g = \tilde{d}r \otimes \tilde{d}r + r^2 \tilde{d}\theta \otimes \tilde{d}\theta$ と展開しよける。

$$g(\vec{l}, \vec{l}) = dr^2 + r^2 d\theta^2 = ds^2 \quad (\because (3.16): \tilde{\omega}^\alpha(\vec{e}_\beta) = \delta^\alpha{}_\beta)$$

● $(g_{\alpha\beta})$ の逆として $(g^{\alpha'\beta'}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/r^2 \end{pmatrix}$ を定義する。

$\tilde{d}\phi \rightarrow (\frac{\partial \phi}{\partial r}, \frac{\partial \phi}{\partial \theta})$ に対し (3.46): $A^\alpha{}_\beta \equiv \eta^{\alpha\beta} A_\beta$ に従い作られた $\tilde{d}\phi$ に付随したベクトル

$$\vec{d}\phi \rightarrow (\frac{\partial \phi}{\partial r}, \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}) \quad \text{は元の一般形式 } \vec{d}\phi \text{ と異なる成分をもつ。}$$

5.2.1 について

(5.28) の「容易に正確に導出される」(p.157 l.4) について

一般形式 $\tilde{d}\theta = (3.26)$, $\tilde{d}r = (3.27)$ のデカルト座標系での成分は

$$\tilde{d}\theta \rightarrow (-\frac{r\dot{\theta}}{r}, \frac{\omega\dot{\theta}}{r}) \quad \tilde{d}r \rightarrow (\cos\theta, \sin\theta) \quad \text{となる}$$

一般形式の大ききの定義 (2.47): $\tilde{r}^2 = \tilde{r} \cdot \tilde{r} = \eta_{\alpha\beta} \tilde{r}^\alpha \tilde{r}^\beta$ において

$\eta_{\alpha\beta} \in$ Euclid 的計量 (δ_{ij}) に従い

$$|\tilde{d}r|^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1, \quad |\tilde{d}\theta|^2 = \frac{r^2\dot{\theta}^2 + \omega^2\dot{\theta}^2}{r^2} = \frac{1}{r^2}$$

シュン『相対論入門』

5.3 極座標におけるテンソル解析

基底ベクトルの微分 p.159~

以下、デカルト座標系での成分を表示する。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} &= 0 \\ \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} &= \begin{pmatrix} -\cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \vec{e}_\theta \\ \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial r} &= \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix} = -\frac{1}{r} \vec{e}_r \\ \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} &= r \begin{pmatrix} -\cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = -r \vec{e}_r \end{aligned} \right\} \begin{aligned} (5.37) \\ (5.38) \end{aligned}$$

は幾何学的にも、

一般のベクトルの微分 p.160~

ベクトル \vec{V} を微分するには、成分 V^α だけではない、各点で異なる基底 \vec{e}_α も微分する。つまり

(5.43): $\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} \vec{e}_\alpha + V^\alpha \frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial x^\beta}$

(例) 基底の微分も含めて見れば、定基底 $\vec{e}_r = \cos\theta \vec{e}_x - \sin\theta \vec{e}_y$

[cf. $\partial_x = \frac{\partial r}{\partial x} \partial_r + \frac{\partial \theta}{\partial x} \partial_\theta = \cos\theta \partial_r - \frac{\sin\theta}{r} \partial_\theta$]

の微分がゼロになる:

$$\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = -\sin\theta \vec{e}_r + \cos\theta \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} - \frac{\cos\theta}{r} \vec{e}_\theta - \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = 0$$

クリストフェル記号 p.161~

上記(5.43)における $\frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial x^\beta}$ の μ 番目の成分をクリストフェル記号 $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ と呼ぶ: $\frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial x^\beta} = \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \vec{e}_\mu$

共変微分 p.162~

すると上記(5.43)は $\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\beta} = \left(\frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} + V^\mu \Gamma^\alpha_{\mu\beta} \right) \vec{e}_\alpha \equiv V^\alpha_{;\beta} \vec{e}_\alpha$ となる。

ここに $V^\alpha_{;\beta} = V^\alpha_{,\beta} + V^\mu \Gamma^\alpha_{\mu\beta}$
3.10節 練習問題 17(b) で見たように (i) テンソル Π に線形写像 $\Pi(j\vec{e}_i)$ は一般式 $\omega \mapsto$ 実数 $\Pi(\omega; j\vec{e}_i)$ なるベクトルである。このベクトル \vec{v} からベクトル $\Pi(j\vec{e}_i)$ が作られることを意味する。
今、 $V^\alpha_{;\beta}$ を成分にもテンソル Π として $\nabla \vec{V}$ を考える。
つまり $\nabla \vec{V}(\omega^j; \vec{e}_\beta) = V^\alpha_{;\beta} \vec{e}_\alpha$
テンソル $\nabla \vec{V}$ を用い、ベクトル \vec{e}_β から作られたベクトル $\nabla \vec{V}(j\vec{e}_\beta)$ が

$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\beta}$ である。
スカラー f は基底ベクトルに依存しないから
 $\nabla_\alpha f = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} = (\nabla f)_\alpha \therefore \nabla f = \nabla f$

発散とラプラシアン p.164~

$V^j_{;j}$ はスカラーなので、その値は任意の座標系で等しく、デカルト座標系では発散 $\nabla^j V_j$ である。よって \vec{V} の発散を極座標で表現すると

$$V^j_{;j} = V^j_{,j} + V^\mu \Gamma^j_{\mu j} = \dots = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV^r) + \frac{\partial}{\partial \theta} V^\theta : (5.56)$$

\vec{V} にベクトル \vec{e}_α の \vec{e}_β を用いる。つまり $V^r = \frac{\partial \phi}{\partial r}, V^\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}$ を上式に代入してラプラシアンを表す
 $\Delta \phi = V^j_{;j} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial \phi}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}$ が得られる。
(5.57)で落す。

補足

発散の表式(5.56)の $\frac{\partial V^j}{\partial \theta}$ について、
 $|\vec{e}_\theta| = 1$ なる \vec{e}'_θ に関する成分 $V^{\theta'}$ を用いると
 $V^\theta = V^{\theta'}/r$ だから $\frac{\partial V^\theta}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial V^{\theta'}}{\partial \theta}$ と $\frac{1}{r}$ が現れる。

$\Delta \phi$ を得る方法は次のように正当化できる。
デカルト座標系で $\Delta \phi = \partial_\mu \partial^\mu \phi = \partial_\mu (g^{\mu\nu} \partial_\nu) \phi$ であり、
これを任意の座標系で同じ値をもつ
 $\Delta \phi = \nabla_\mu \nabla^\mu \phi = \nabla_\mu (g^{\mu\nu} \nabla_\nu) \phi$ に書きかえられる。
これは $\partial \phi = \nabla \phi$ に付随するベクトル $\vec{d}\phi = (\frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}, \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta})$ の μ 番目の成分である。

ミンコフ相対論入門

5.3 続き

1-形式と高階のテンソルの微分 p.165~

$\phi = P_\alpha V^\alpha$ はスカラーなので

$$\phi_{,\beta} = P_{\alpha,\beta} V^\alpha + P_\alpha V^\alpha_{,\beta} \quad \text{と} \quad \phi_{; \beta} = P_{\alpha;\beta} V^\alpha + P_\alpha V^\alpha_{; \beta}$$

が一致することを要求して

$$V^\alpha_{; \beta} = V^\alpha_{,\beta} + V^\mu \Gamma^\alpha_{\mu\beta}$$

$$\Rightarrow P_{\alpha;\beta} = P_{\alpha,\beta} - P_\mu \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \quad \text{を示した。}$$

補足

p.166 l.17 「基底形式が基底ベクトルに“逆”変換することも意味する」といって、

(*) $\frac{\partial \tilde{e}_\alpha}{\partial x^\beta} = \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \tilde{e}_\mu$ に対応して $\frac{\partial \tilde{\omega}^\alpha}{\partial x^\beta} = -\Gamma^\alpha_{\mu\beta} \tilde{\omega}^\mu$ とする。

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial x^\beta} = P_{\alpha,\beta} \tilde{\omega}^\alpha + P_\alpha \frac{\partial \tilde{\omega}^\alpha}{\partial x^\beta} = (P_{\alpha,\beta} - P_\mu \Gamma^\mu_{\alpha\beta}) \tilde{\omega}^\alpha$$

と、右側が p.166 中央の共変微分公式

$$P_{\alpha;\beta} = P_{\alpha,\beta} - P_\mu \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \quad \text{が再現される。}$$

(*) のとき l.18 「縮約 $\langle \tilde{\omega}^\alpha, \tilde{e}_\alpha \rangle = \delta^\alpha_\alpha$ が一定、その微分はゼロ」になることが次のように保証される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \langle \tilde{\omega}^\alpha, \tilde{e}_\alpha \rangle &= \frac{\partial \tilde{\omega}^\alpha}{\partial x^\gamma} \langle \tilde{e}_\alpha \rangle + \tilde{\omega}^\alpha \left(\frac{\partial \tilde{e}_\alpha}{\partial x^\gamma} \right) \\ &= -\Gamma^\alpha_{\mu\gamma} \tilde{\omega}^\mu \langle \tilde{e}_\alpha \rangle + \Gamma^\mu_{\alpha\gamma} \tilde{\omega}^\alpha \langle \tilde{e}_\mu \rangle \\ &= -\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = 0 \end{aligned}$$

共変微分公式 (5.65) ~ (5.67) に代入、

(5.66) の左辺 $A_{\mu\nu}$ は $A^{\mu\nu}$ のミスワリであり、
次の導出も場の古典論のTeX p.40 で行った。

5.4 クリストッフ記号とメトリック (要旨)

デカルト座標系で

- ① 1-形式とそれに対応するベクトルの成分は等しい。
すなわち $V_\alpha = g_{\alpha\mu} V^\mu = \delta_{\alpha\mu} V^\mu = V^\alpha$
- ② 「クリストッフ記号が消えるから」 ∇ は単に成分の微分である。

よって $V_{\alpha;\beta} = V_{\alpha,\beta} = V^\alpha_{,\beta} = V^\alpha_{; \beta} = g_{\alpha\mu} V^\mu_{; \beta}$

~部 (5.69): $V_{\alpha;\beta} = g_{\alpha\mu} V^\mu_{; \beta}$ はテンソルの関係式で、
デカルト座標系で成り立つから、任意の座標系で成り立つ。

$$\text{左辺: テンソル性 } V_{\alpha;\beta} = (g_{\alpha\mu} V^\mu)_{; \beta} \\ = g_{\alpha\mu;\beta} V^\mu + g_{\alpha\mu} V^\mu_{; \beta}$$

$$\text{右辺 (5.69): } V_{\alpha;\beta} = g_{\alpha\mu} V^\mu_{; \beta} \\ 0 = g_{\alpha\mu;\beta} V^\mu \quad (\nabla \tilde{\nabla})$$

こゝで得られる $g_{\alpha\mu;\beta} = 0$ は曲がった空間でも成り立つ。

メトリックからのクリストッフ記号の計算 p.169~

デカルト座標系で $\phi_{;\beta;\alpha}$ は $\phi_{,\beta;\alpha}$ と対称

→ すべての座標系で $\phi_{;\beta;\alpha} = \phi_{,\beta;\alpha} - \phi_{,\mu} \Gamma^\mu_{\beta\alpha}$ は対称

→ 対称性 $\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \Gamma^\mu_{\beta\alpha}$

$g_{\alpha\beta;\mu}$ を $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ で表すには

$$0 = g_{\alpha\beta;\mu} = g_{\alpha\beta,\mu} - \Gamma^\nu_{\alpha\mu} g_{\nu\beta} - \Gamma^\nu_{\beta\mu} g_{\alpha\nu}$$

↓ $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ の対称性

$\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ を $g_{\alpha\beta,\mu}$ で表した式

$$\Gamma^\mu_{\beta\alpha} = g^{\alpha\gamma} \left[\frac{1}{2} (g_{\alpha\beta,\mu} + g_{\alpha\mu,\beta} - g_{\beta\mu,\alpha}) \right]$$

[$\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ と α, β, μ に関しては対称]

$\Gamma^\alpha_{\beta\mu}$ のテンソル性 p.171~

(5.52): $(\nabla \tilde{\nabla})^\alpha_\beta = (\nabla_\alpha \tilde{\nabla})^\alpha_\beta$ は $\partial \tilde{\nabla} / \partial x^\alpha$ の α 成分で、
特に $(\nabla \tilde{e}_\alpha)^\mu_\beta = (\partial \tilde{e}_\alpha / \partial x^\alpha)^\mu_\beta$ の μ 成分 $= \Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ と対称。

$\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ をテンソル $\nabla \tilde{e}_\alpha$ の μ 成分と見ることはできる。
しかし、 $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ を成分に持つ単一の (2) テンソルは存在しない。
(背理法。デカルト座標系で $\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = 0$ 、 $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ が (2) テンソル
の成分ならばすべての座標系で $\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = 0$ 。)

よって (5.52): $(\nabla \tilde{\nabla})^\alpha_\beta = V^\alpha_{; \beta} = V^\alpha_{,\beta} + V^\mu \Gamma^\alpha_{\mu\beta}$

はテンソル $\nabla \tilde{\nabla}$ の成分であるが、最右辺第2項 $V^\mu \Gamma^\alpha_{\mu\beta}$ は
単一のテンソルの成分ではない。

5.4 について

(5.69): $V_{\alpha;\beta} = g_{\alpha\mu} V^{\mu}{}_{;\beta}$ の1行下「これは(5.68)の

成分表示である」について、(5.69): $\nabla_{\rho} \tilde{V} = g(\nabla_{\rho} \tilde{V}, \cdot)$ の

左辺の成分は $(\nabla_{\rho} \tilde{V})_{\alpha} = V_{\alpha;\beta}$ (∵ (5.63))

右辺の成分は $g(\nabla_{\rho} \tilde{V}, \tilde{e}_{\alpha}) = g_{\mu\nu} (\nabla_{\rho} \tilde{V})^{\mu} (\tilde{e}_{\alpha})^{\nu}$

$$\stackrel{(5.52)}{=} g_{\mu\nu} V^{\mu}{}_{;\beta} \delta^{\nu}_{\alpha} = g_{\mu\alpha} V^{\mu}{}_{;\beta}$$

である。

p.170 1.5.6 「あるテンソルが一つの座標で対称なら、

すべての座標で対称」について、

ある座標で(2)テンソル Π が対称性 $\Pi(\tilde{e}_{\alpha}, \tilde{e}_{\beta}) = \Pi(\tilde{e}_{\beta}, \tilde{e}_{\alpha})$

をもつとき、 $\tilde{e}'_{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} \tilde{e}_{\nu}$ による別の座標系での成分も

$\Pi(\tilde{e}'_{\mu}, \tilde{e}'_{\nu})$	⋮	$T'_{\mu\nu}$
$= \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} \Lambda^{\nu}{}_{\beta} \Pi(\tilde{e}_{\alpha}, \tilde{e}_{\beta})$	⇔	$= (\Lambda^{\mu}{}_{\alpha} \Lambda^{\nu}{}_{\beta}) T_{\alpha\beta}$
$= \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} \Lambda^{\nu}{}_{\beta} \Pi(\tilde{e}_{\beta}, \tilde{e}_{\alpha})$	⋮	$= (\Lambda^{\mu}{}_{\alpha} \Lambda^{\nu}{}_{\beta}) T_{\beta\alpha}$
$= \Pi(\tilde{e}_{\nu}, \tilde{e}_{\mu})$	⋮	$= T'_{\nu\mu}$

ある座標で(2)テンソル Π が対称性 $\Pi(\tilde{\omega}^{\alpha}, \tilde{\omega}^{\beta}) = \Pi(\tilde{\omega}^{\beta}, \tilde{\omega}^{\alpha})$

をもつとき、 $\tilde{\omega}'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} \tilde{\omega}^{\alpha}$ による別の座標系での成分も

$\Pi(\tilde{\omega}'^{\mu}, \tilde{\omega}'^{\nu})$	⋮	$T'^{\mu\nu}$
$= \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} \Lambda^{\nu}{}_{\beta} \Pi(\tilde{\omega}^{\alpha}, \tilde{\omega}^{\beta})$	⇔	$= \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} \Lambda^{\nu}{}_{\beta} T^{\alpha\beta}$
$= \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} \Lambda^{\nu}{}_{\beta} \Pi(\tilde{\omega}^{\beta}, \tilde{\omega}^{\alpha})$	⋮	$= \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} \Lambda^{\nu}{}_{\beta} T^{\beta\alpha}$
$= \Pi(\tilde{\omega}^{\nu}, \tilde{\omega}^{\mu})$	⋮	$= T'^{\nu\mu}$

p.170 F45~3行の3式について、第1式で $\beta \leftrightarrow \mu$ と

第2式も、第1式で $\beta \leftrightarrow \mu$ と後回置換に第3式を得る。

5.5 非座標基底

全ての基底ベクトルがデカルト座標系 (座標 $\{x^\beta\}$, 基底 $\{\vec{e}_\beta\}$) からの座標変換

$$\vec{e}_{\alpha'} = \Lambda^{\beta}_{\alpha'} \vec{e}_\beta = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\alpha'}} \vec{e}_\beta$$

によって得られるか考える。曲座標系の単位ベクトル

$$\vec{e}_{\hat{r}} \equiv \vec{e}_r, \quad \vec{e}_{\hat{\theta}} \equiv \frac{1}{r} \vec{e}_\theta$$

がデカルト座標系からの座標変換によって作られる基底ベクトル

$$\vec{e}_\xi = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^\xi} \vec{e}_\beta, \quad \vec{e}_\eta = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^\eta} \vec{e}_\beta$$

として得られるような座標 (ξ, η) は存在しないことを背理法で示す。式 (5.26):

$$\tilde{d}\theta = -\frac{\sin \theta}{r} \tilde{d}x + \frac{\cos \theta}{r} \tilde{d}y$$

より

$$\tilde{\omega}^{\hat{\theta}} = r \tilde{d}\theta = -\sin \theta \tilde{d}x + \cos \theta \tilde{d}y$$

である。これが

$$\tilde{d}\eta = \frac{\partial \eta}{\partial x} \tilde{d}x + \frac{\partial \eta}{\partial y} \tilde{d}y$$

として得られるような座標 η があったとすると,

$$-\frac{\partial}{\partial y} \sin \theta = \frac{\partial^2 \eta}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \cos \theta$$

でなければならない。しかしこれは成り立たないから、示された。

■非座標基底に対する一般的注意 (p.174~)

- 非座標基底 \vec{e}_μ に対して

$$\tilde{d}\phi(\vec{e}_\mu) = \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}$$

はもはや成り立たない。

— 例

$$(\nabla_{\hat{\theta}} \phi, \phi_{,\hat{\theta}} \equiv) \tilde{d}\phi(\vec{e}_{\hat{\theta}}) = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \neq \frac{\partial \phi}{\partial \theta}.$$

ここに $\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \Lambda^{\beta}_{\hat{\theta}} \phi_{,\beta}$, $\{x^\beta\}$ は任意の座標.

- 非座標基底 $\{\vec{e}_{\hat{\mu}}\}$ に対して

$$\nabla_{\hat{\beta}} \vec{e}_{\hat{\alpha}} = \Gamma^{\hat{\mu}}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \vec{e}_{\hat{\mu}}$$

で定義した Christoffel 記号について,

— 対称性 $\Gamma^{\hat{\mu}}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \Gamma^{\hat{\mu}}_{\hat{\beta}\hat{\alpha}}$, および

– その帰結である，Christoffel 記号を計量テンソルで表した式は一般には成立しない。

これらの証明の基になる関係

$$\phi_{,\hat{\alpha},\hat{\beta}} = \phi_{,\hat{\beta},\hat{\alpha}}$$

が今の場合，座標による微分の順序交換を意味しないため，成立しないから。

- 一形式 $\tilde{\omega}^{\hat{\alpha}} = \Lambda^{\hat{\alpha}}_{\beta} \tilde{d}x^{\beta}$ が座標一形式基底となる，すなわち適当な座標 $\{x^{\hat{\alpha}}\}$ を用いて

$$\Lambda^{\hat{\alpha}}_{\beta} = \frac{\partial x^{\hat{\alpha}}}{\partial x^{\beta}}$$

となるには

$$\frac{\partial \Lambda^{\hat{\alpha}}_{\beta}}{\partial x^{\gamma}} \left(= \frac{\partial^2 x^{\hat{\alpha}}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\gamma}} \right) = \frac{\partial \Lambda^{\hat{\alpha}}_{\gamma}}{\partial x^{\beta}}$$

が必要である。これを満たさない係数 $\Lambda^{\hat{\alpha}}_{\beta}$ をとって非座標基底を作る。

■本書での非座標基底 (p.176) 本書では，非座標基底を使う機会はほとんどない。

5.5 について

■発散の表式 (5.88) について 5.3 節の補足で確認済みである。

■一形式 (5.78): $\tilde{\omega}^{\hat{r}} = \tilde{d}r, \tilde{\omega}^{\hat{\theta}} = r\tilde{d}\theta$ について これらはそれぞれ，

$$\tilde{\omega}^{\hat{r}}(\vec{e}_r) = 1 = \tilde{\omega}^{\hat{r}}(\vec{e}_{\hat{r}}) = \tilde{\omega}^{\hat{r}}(\vec{e}_r), \quad \tilde{\omega}^{\hat{\theta}}(\vec{e}_{\theta}) = 1 = \tilde{\omega}^{\hat{\theta}}(\vec{e}_{\hat{\theta}}) = \frac{1}{r}\tilde{\omega}^{\hat{\theta}}(\vec{e}_{\theta})$$

の最左辺と最右辺を比較して得られる (いずれも第 1, 第 2 の等号は式 (3.12): $\tilde{\omega}^{\alpha}(\vec{e}_{\beta}) = \delta^{\alpha}_{\beta}$ による)。

■式 (5.85): $\frac{\partial}{\partial y}(-\sin \theta) = \frac{\partial}{\partial x}(\cos \theta)$ が一般に成り立たないことの確認

$$\frac{\partial}{\partial x}(\cos \theta) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{r} = \frac{1}{r} + x \left(-\frac{1}{r^2} \frac{x}{r} \right) = \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}, \quad \frac{\partial}{\partial y}(\sin \theta) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{r} = \frac{1}{r} + y \left(-\frac{1}{r^2} \frac{y}{r} \right) = \frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3}$$

を辺々足すと

$$\frac{\partial}{\partial x}(\cos \theta) + \frac{\partial}{\partial y}(\sin \theta) = \frac{1}{r} \neq 0.$$

5.6 将来に向けて

この章では曲った空間，時空で必要な記法，概念を導入した。以降，Euclid の平行線の定理の破れについての議論が加わる。

シュワルツ相対論入門

6 曲った多様体

6.1 可微分多様体とテンソル (要点)

$(\text{曲った空間}) = (\text{多様体}) + (\text{曲率})$



局所的にユークリッド空間と見做せる

連続した空間

※回転の集合もオラ一角を座標にした多様体。

微分可能多様体

→ $\{ \text{-形式 } \omega \} \rightarrow \{ \omega, \alpha \}$
 $\{ \text{ベクトル } \vec{v} \} \quad (\vec{v}(\omega) = \omega(d\lambda))$
 を定義する。

概観

(1) テンソル場 (2) 写像としてベクトルと形式を定義

(3) テンソルを定義

(4) テンソル T, U がある基底で

$T \dots = U \dots, T \dots = 0$

→ 全ての基底で

$T \dots = U \dots, T \dots = 0$

(5) 新しいテンソルの成分をつくる

- (i) スカラー場をかける (ii) 同種テンソル成分の和
- (iii) 積 (外積) (iv) 共変微分 (v) 縮約

(1) ある系で正しい関係式の両辺が (5) から同種テンソルの成分と判断されること、(4) から全ての系で同じ形の関係式が成立立つ。

6.2 リーマン多様体 (要点)

↳ 多様体の各点にメトリックを対称

(2) テンソル場 g を導入したもの。

→ 曲率が定まる。

※ 相対論で扱う多様体は

$g(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\alpha) = -1 < 0$ のために g の正定値性

$g(\vec{v}, \vec{v}) > 0 \quad \forall \vec{v}$ が満たされない不定計量

で厳密には擬リーマン多様体と呼ばれる。

※ メトリックを導入しないリーマン多様体にも曲率を定義できる。

メトリックで局所的平坦性 (p.185~)

6.9節 練習問題3 厳密には証明していない

実対称行列 A はその固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ として

$H^T A H = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix} \equiv B$ と対角化出来る。

(a) $P_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} = P_{ij}^T$

を任意の行列 A に

{ 左からかけると i 行 j 列が入れかわる。 }
 { 右からかけると i 列 j 行が入れかわる。 }
 そこで例えは

$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{左から } P_{12} \text{ をかける}]{\text{右から } P_{23} \text{ をかける}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{左から } P_{23} \text{ をかける}]{\text{右から } P_{12} \text{ をかける}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

行の入れ替え

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{右から } P_{23} \text{ をかける}]{\text{左から } P_{12} \text{ をかける}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \equiv C$

列の入れ替え

と並べかえられる。

ここで $R \equiv P_{12} P_{23}$ とすると $R^T = P_{23}^T P_{12}^T = P_{23} P_{12}$ だから

$C = R^T B R$

(b) $Q_i(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \omega = Q_i^T(\omega)$

を任意の行列 A に

{ 左からかけると i 行目が c 倍される。 }
 { 右からかけると i 列目が c 倍される。 }
 そこで例えは

$C = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{左から } Q_1(\frac{1}{2}) Q_2(1) Q_3(\frac{1}{3}) \text{ をかける}]{\text{右から } Q_3(\frac{1}{3}) Q_2(1) Q_1(\frac{1}{2}) \text{ をかける}} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{右から } Q_3(\frac{1}{\sqrt{3}}) Q_2(1) Q_1(\frac{1}{\sqrt{2}}) \text{ をかける}]{\text{左から } Q_1(\frac{1}{\sqrt{2}}) Q_2(1) Q_3(\frac{1}{\sqrt{3}}) \text{ をかける}} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv D$

ここで $N \equiv Q_3 Q_2 Q_1$ とすると $N^T = Q_1^T Q_2^T Q_3^T = Q_1 Q_2 Q_3$ だから

$D = N^T C N$

(c) D の対角要素にゼロがあると $\det D = 0$ となり D は

正定値性を持たない。

対角化すると A が逆行列をもたない。それを対角化した B, C, D の対角要素は全てゼロでない。これは (a), (b) で暗に仮定したことに注意。

(d) $(g_{\mu\nu}) \equiv (g)$ は逆をとり (d)より

$$B = H^T (g) H = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \text{ と対角化したとき, } \lambda_0, \dots, \lambda_3 \neq 0.$$

そこで (g) の 3 個の固有値 $\lambda_{1,2,3} > 0$
1 個の固有値 $\lambda_0 < 0$ とすれば

(a) の方法で $C \equiv R^T B R = \begin{pmatrix} \lambda'_0 & 0 \\ 0 & \lambda'_3 \end{pmatrix}$,

(b) の方法で $D \equiv N^T C N = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv (1)$ とする。

以上は $\Lambda^T (g) \Lambda = (1)$ とする

$$\eta_{\alpha\beta} = (\Lambda^T)^\mu_\alpha g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\beta = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta g_{\mu\nu} \text{ を意味する}$$

↑
外 $\eta_{\alpha\beta}$ の成分が、3 個の正の固有値と 1 個の負の固有値を
持つ対称行列 $(g_{\alpha\beta})$ を成すとき、適当な Λ^μ_α を用い
 $\Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \quad (\eta_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする。

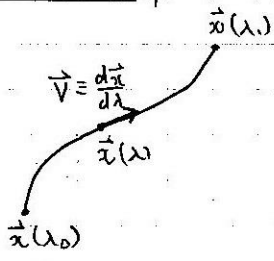
(Λ^μ_α は座標変換行列とは限らない)
(外 $\eta_{\alpha\beta}$ の符号数 $T_\alpha(1) = 2$)

↔ 局所慣性系の存在

局所的平坦性

任意の点 (原点にとる) の近間で $\{g_{\mu\nu}\}$ の $\{\eta_{\mu\nu}\}$ からのずれが座標の 2 次となる、
すなわち $g_{\mu\nu}(x^\alpha) = \eta_{\mu\nu} + O[(x^\alpha)^2]$ となる局所ローレン系をとれる。

長さ & 体積 p. 187 ~



$$\text{長さ } l = \int \sqrt{|g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu|} = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \sqrt{|\dot{x} \cdot \dot{x}|} d\lambda$$

絶対値をとる

[* $l = \int_{t_0}^{t_1} v dt$ の自然な一般化になっている]

体積要素

局所ローレン系 $\{x^\alpha\}$ で d^4x
任意の座標系 $\{x^\alpha\}$ で $d^4x = \frac{\partial(x)}{\partial(x')} d^4x'$

ここで $g_{\mu\nu}$ の変換則 $\Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta g_{\mu\nu} = (g')$

→ Jacobian $\frac{\partial(x)}{\partial(x')} = \sqrt{-g}$ [正確には Jacobian の絶対値が $\sqrt{-g}$]

$\sqrt{-g} d^4x$: 固有体積要素

例

極座標 $\{x^\alpha\}$ からデカルト座標 $\{x^\alpha\}$ への
変換行列を $A = (\partial x^\alpha / \partial x'^\beta)$ とすると、

$$A \mathbb{1} A^T = (g_{ij}),$$

$$\begin{cases} \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}: \text{デカルト座標系のメトリック} \\ (g_{ij}) = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}: \text{極座標系のメトリック} \\ \therefore dl^2 = dr^2 + (r d\theta)^2 + (r \sin \theta d\phi)^2 \end{cases}$$

よ Jacobian $|A|$ の絶対値は

$$\sqrt{g} = r^2 \sin \theta.$$

これは周知の体積要素の表式

$$r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \text{ を与える。}$$

■局所的平坦性定理の証明 (p.190～) 局所的平坦性定理により, 任意の座標系 $\{x^\mu\}$ から座標系 $x' \equiv \{x'^\mu\}$ に移り, 時空の与えられた点 P の座標を $x'_0 \equiv \{x'_0{}^\mu\}$ として計量テンソルを

$$g_{\alpha\beta}(x') = \eta_{\alpha\beta} + O((x'^\mu - x'_0{}^\mu)^2)$$

とできることを示す. 座標系 x^μ, x'^μ での任意の点の計量テンソルをそれぞれ座標 x' の関数として $f_{\alpha\beta}(x'), g_{\alpha\beta}(x')$ と書く. $\Lambda^\gamma{}_\alpha \equiv \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\alpha}, \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x'^\mu}$ と略記し $g_{\alpha\beta}(x')$ を点 P の周りに Taylor 展開すると,

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta}(x') &= \Lambda^\gamma{}_\alpha(x') \Lambda^\delta{}_\beta(x') f_{\gamma\delta}(x') \\ &= \left[\Lambda^\gamma{}_\alpha(x'_0) + (\partial_\lambda \Lambda^\gamma{}_\alpha)_0 (x'^\lambda - x'_0{}^\lambda) + \frac{1}{2} (\partial_\lambda \partial_\mu \Lambda^\gamma{}_\alpha)_0 (x'^\lambda - x'_0{}^\lambda)(x'^\mu - x'_0{}^\mu) + \dots \right] \\ &\quad \times \left[\Lambda^\delta{}_\beta(x'_0) + (\partial_\nu \Lambda^\delta{}_\beta)_0 (x'^\nu - x'_0{}^\nu) + \frac{1}{2} (\partial_\nu \partial_\rho \Lambda^\delta{}_\beta)_0 (x'^\nu - x'_0{}^\nu)(x'^\rho - x'_0{}^\rho) + \dots \right] \\ &\quad \times \left[f_{\gamma\delta}(x'_0) + (\partial_\sigma f_{\gamma\delta})_0 (x'^\sigma - x'_0{}^\sigma) + \frac{1}{2} (\partial_\sigma \partial_\tau f_{\gamma\delta})_0 (x'^\sigma - x'_0{}^\sigma)(x'^\tau - x'_0{}^\tau) + \dots \right] \end{aligned}$$

なので $g_{\alpha\beta}(x') = g_{\alpha\beta}(x'_0) + (\partial_\lambda g_{\alpha\beta})_0 (x'^\lambda - x'_0{}^\lambda) + \frac{1}{2} (\partial_\lambda \partial_\mu g_{\alpha\beta})_0 (x'^\lambda - x'_0{}^\lambda)(x'^\mu - x'_0{}^\mu) + \dots$ において

$$g_{\alpha\beta}(x') = (\Lambda^\gamma{}_\alpha \Lambda^\delta{}_\beta f_{\gamma\delta})_0, \quad (3)$$

$$(\partial_\lambda g_{\alpha\beta})_0 = [(\partial_\lambda f_{\gamma\delta}) \Lambda^\gamma{}_\alpha \Lambda^\delta{}_\beta + (\partial_\lambda \Lambda^\gamma{}_\alpha) \Lambda^\delta{}_\beta f_{\gamma\delta} + (\partial_\lambda \Lambda^\delta{}_\beta) \Lambda^\gamma{}_\alpha f_{\gamma\delta}]_0, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\partial_\lambda \partial_\mu g_{\alpha\beta})_0 &= \left[(\partial_\lambda \Lambda^\gamma{}_\alpha) (\partial_\mu \Lambda^\delta{}_\beta) f_{\gamma\delta} + (\partial_\lambda \Lambda^\delta{}_\beta) (\partial_\mu f_{\gamma\delta}) \Lambda^\gamma{}_\alpha + (\partial_\lambda f_{\gamma\delta}) (\partial_\mu \Lambda^\gamma{}_\alpha) \Lambda^\delta{}_\beta \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (\partial_\lambda \partial_\mu \Lambda^\gamma{}_\alpha) \Lambda^\delta{}_\beta f_{\gamma\delta} + \frac{1}{2} (\partial_\lambda \partial_\mu \Lambda^\delta{}_\beta) \Lambda^\gamma{}_\alpha f_{\gamma\delta} + \frac{1}{2} (\partial_\lambda \partial_\mu f_{\gamma\delta}) \Lambda^\gamma{}_\alpha \Lambda^\delta{}_\beta \right]_0 \end{aligned} \quad (5)$$

となる. ただし添字のゼロは点 P での値を意味する. さて座標系 $\{x'^\mu\}$ を適当に選び

$$g_{\alpha\beta}(x'_0) = \eta_{\alpha\beta}, \quad (\partial_\lambda g_{\alpha\beta})_0 = 0, \quad (\partial_\lambda \partial_\mu g_{\alpha\beta})_0 = 0$$

とできるか考えよう. 座標系 $\{x'^\mu\}$ を選ぶことは $\Lambda^\gamma{}_\alpha = \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\alpha}$ を, 従って $(\Lambda^\gamma{}_\alpha)_0, (\partial_\lambda \Lambda^\gamma{}_\alpha)_0, (\partial_\lambda \partial_\mu \Lambda^\gamma{}_\alpha)_0, \dots$ を選ぶことに対応する. それぞれについて独立にとれるものの個数は以下のようになる.

- $(\Lambda^\gamma{}_\alpha)_0 = \left(\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\alpha} \right)_0 \dots\dots\dots 16$ 個
- $(\partial_\lambda \Lambda^\gamma{}_\alpha)_0 = \left(\frac{\partial^2 x^\gamma}{\partial x'^\lambda \partial x'^\alpha} \right)_0 \dots\dots\dots 40$ 個
 - 対称な添字 λ, α の選び方が 10 通りだから
- $(\partial_\lambda \partial_\mu \Lambda^\gamma{}_\alpha)_0 = \left(\frac{\partial^3 x^\gamma}{\partial x'^\lambda \partial x'^\mu \partial x'^\alpha} \right)_0 \dots\dots\dots 80$ 個
 - 対称な添字 λ, μ, α の選び方は以下の合計 20 通りのだから

$$\begin{cases} \lambda, \mu, \alpha \text{ が相異なるもの} & \frac{4 \times 3 \times 2}{3!} = 4 \text{ 通り} \\ \text{ちょうど 2 つの添字が等しいもの} & 4 \times 3 = 12 \text{ 通り} \\ \text{全ての添字が等しいもの} & 4 \text{ 通り} \end{cases}$$

よって次のように局所的平坦性定理が示される.

- $g_{\alpha\beta}(x'_0) = \eta_{\alpha\beta}$ は 10 個の独立な条件式
(対称な添字 α, β の選び方が 10 通りだから).
 $\Leftarrow g_{\alpha\beta}(x'_0)$ の式 (3) において 16 個の独立な $(\Lambda^\gamma_\alpha)_0$ を適当に選べば満たされる.
- $(\partial_\lambda g_{\alpha\beta})_0 = 0$ は 40 個の独立な条件式
(対称な添字 α, β の選び方が 10 通りだから).
 $\Leftarrow (\partial_\lambda g_{\alpha\beta})_0$ の式 (4) において 40 個の独立な $(\partial_\lambda \Lambda^\gamma_\alpha)_0$ を適当に選べば満たされる.
- $(\partial_\lambda \partial_\mu g_{\alpha\beta})_0 = 0$ は 100 個の独立な条件式
(対称な添字 α, β および λ, μ の選び方がそれぞれ 10 通りだから).
 $\Leftarrow (\partial_\lambda \partial_\mu g_{\alpha\beta})_0$ の式 (5) における $(\partial_\lambda \partial_\mu \Lambda^\gamma_\alpha)_0$ の内, 独立に選べるものは 80 個だから一般には満たされない.

6.3 共変微分

- ある時空点における局所 Lorentz 系をとると Christoffel 記号が消えることから, この系で

$$V^\alpha_{;\beta} = V^\alpha_{,\beta}, \quad g_{\alpha\beta;\gamma} = g_{\alpha\beta,\gamma} = 0$$

となる. 第 2 式の第 2 の等号は局所的平坦性 (6.5) による. よって任意の系で

$$g_{\alpha\beta;\gamma} = 0.$$

- 任意の系で対称性 $\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \Gamma^\mu_{\beta\alpha}$ が保証されるから (6.9 節の練習問題 5), Christoffel 記号を計量テンソルで表した式

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (g_{\beta\mu,\nu} + g_{\beta\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\beta})$$

が成立する.

- 任意の系における計量テンソルが与えられると, これを用いて Christoffel 記号を計算でき, テンソルの共変微分を実行できる.
- 共変微分 $V^\alpha_{;\alpha}$ における Christoffel 記号を計量テンソルで表し, 発散の公式

$$V^\alpha_{;\alpha} = \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} V^\alpha)_{,\alpha}$$

を得る.

- ここから曲った多様体での Gauss の法則

$$\int V^\alpha_{;\alpha} \underbrace{\sqrt{-g} d^4x}_{\text{固有体積要素}} = \int (\sqrt{-g} V^\alpha)_{,\alpha} d^4x = \int V^\alpha \underbrace{\sqrt{-g} n_\alpha dS}_{\text{固有面積要素と見る}}$$

を得る.

6.3 について

■式 (6.39) について $\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}$ を局所慣性系 $\{X^\mu\}$ で $\varepsilon^{0123} = 1$ となる添字に関して完全反対称な量とする.

このとき、これを4階反変テンソルの変換則

$$E^{\lambda\mu\nu\rho} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial X^\alpha} \frac{\partial x^\mu}{\partial X^\beta} \frac{\partial x^\nu}{\partial X^\gamma} \frac{\partial x^\rho}{\partial X^\delta} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$$

に従って任意の座標系 $\{x^\mu\}$ に変換した量は $E^{\lambda\mu\nu\rho} = \frac{\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}}{\sqrt{-g}}$ である [3, pp.258–259].

一方、これを次式で定義される4階反変テンソル密度の変換則

$$\mathbf{E}^{\lambda\mu\nu\rho} = \frac{\partial(X)}{\partial(x)} \frac{\partial x^\lambda}{\partial X^\alpha} \frac{\partial x^\mu}{\partial X^\beta} \frac{\partial x^\nu}{\partial X^\gamma} \frac{\partial x^\rho}{\partial X^\delta} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$$

に従って任意の座標系 $\{x^\mu\}$ に変換した量は $\mathbf{E}^{\lambda\mu\nu\rho} = \varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}$ となり、座標系に依らず $\mathbf{E}^{0123} = 1$ となる [2, pp.62–63].

さて、この完全反対称テンソル密度 $\mathbf{E}^{\lambda\mu\nu\rho}$ を用いて行列 $(g_{\mu\nu})$ の行列式 g と余因子 $\Delta^{\mu\nu}$ の定義は

$$g \equiv \mathbf{E}^{\lambda\mu\nu\rho} g_{0\lambda} g_{1\mu} g_{2\nu} g_{3\rho}, \quad \Delta^{0\lambda} = \mathbf{E}^{\lambda\mu\nu\rho} g_{1\mu} g_{2\nu} g_{3\rho}, \quad \Delta^{1\mu} = \mathbf{E}^{\lambda\mu\nu\rho} g_{0\lambda} g_{2\nu} g_{3\rho}, \\ \Delta^{2\nu} = \mathbf{E}^{\lambda\mu\nu\rho} g_{0\lambda} g_{1\mu} g_{3\rho}, \quad \Delta^{3\rho} = \mathbf{E}^{\lambda\mu\nu\rho} g_{0\lambda} g_{1\mu} g_{2\nu}$$

と書き表されるから、

$$dg = \Delta^{0\lambda} dg_{0\lambda} + \Delta^{1\mu} dg_{1\mu} + \Delta^{2\nu} dg_{2\nu} + \Delta^{3\rho} dg_{3\rho} = \Delta^{\mu\nu} dg_{\mu\nu}$$

と書ける。ここで $(g_{\mu\nu})$ の逆行列は $(g^{\mu\nu}) = \frac{(\Delta^{\mu\nu})^T}{g}$ なので $\Delta^{\mu\nu} = gg^{\nu\mu} = gg^{\mu\nu}$ となる。これを上式に代入して $dg = gg^{\mu\nu} dg_{\mu\nu}$ を得る。これにより計量テンソルの変化 $dg_{\mu\nu}$ に伴う行列式の変化 dg が与えられる。 $dg_{\mu\nu}$ を座標 x^α が dx^α だけ変化したときの計量テンソルの変化と見れば、これは式 (6.3.9):

$$g_{,\alpha} = gg^{\mu\nu} g_{\mu\nu,\alpha}$$

に他ならない。なお

$$g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = \delta^\mu_\mu = 4, \quad \therefore g^{\mu\nu} dg_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} dg^{\mu\nu}$$

を用いると

$$dg = gg^{\mu\nu} dg_{\mu\nu} = -gg_{\mu\nu} dg^{\mu\nu}$$

を得る。

■式 (6.40) について

$$\Gamma^\alpha_{\mu\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta,\mu} : (6.38) \\ = \frac{1}{2} \frac{g_{,\mu}}{g} \quad (\because \text{式 (6.39)})$$

および

$$\frac{(\sqrt{-g})_{,\mu}}{\sqrt{-g}} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \cdot \frac{(-g)_{,\mu}}{2\sqrt{-g}} = \frac{g_{,\mu}}{2g}$$

を比較して式 (6.40):

$$\Gamma^\alpha_{\mu\alpha} = \frac{(\sqrt{-g})_{,\mu}}{\sqrt{-g}}$$

を得る。

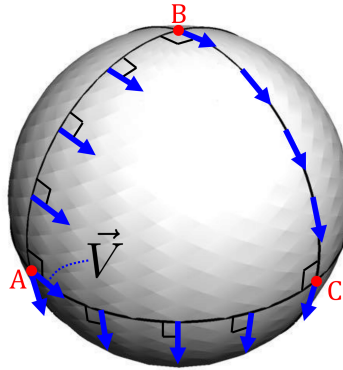


図 16 平坦な 3 次元空間から見た 2 次元球面上でのベクトルの平行移動

6.4 平行移動，測地線，曲率

多様体の外在的曲率は，多様体を内に含む高次元空間から多様体を見たときにはじめて定義可能である．しかしわれわれの時空に対しては，それを内に含むような高次元空間の存在は保証されない．そこで多様体の曲率として，内在的曲率を考える．

これを定義するにあたって次のことに注目する．すなわち曲がった時空では閉曲線に沿ってベクトルを平行移動し 1 周させると，元のベクトルに一致しなくなる．4 次元の曲がった時空の代わりに平坦な 3 次元空間の中の 2 次元の球面を考えるとこのことを理解しやすい（ただし球面と異なり我々の時空の場合には，それを超曲面として含むより高次元の空間の存在は保証されない）．図 16 のように球面上に赤道上で 90 度離れた 2 点 A, C と極 B をとる．そして A で赤道に平行なベクトル \vec{V} を球面内で，すなわち \vec{V} が球面に接した状態で弧 AB, 弧 BC, 弧 CA に沿って平行移動させて A に戻ること考える．平行移動の厳密な定義は以下で与えることにして，ここでは次のことに注意すれば十分である．弧 AB, 弧 BC, 弧 CA が大円の一部を成すとすると，これらは球面上の 2 点を結ぶ局所的 shortest 曲線すなわち測地線である*1．測地線の接ベクトルは測地線に沿って平行移動させると移動先の点での接ベクトルに一致する（教科書 pp.199-200）．しかるに 2 つのベクトルが平行移動するときそれらの間の角度は変化しないから， \vec{V} を測地線に沿って平行移動するとき測地線の接ベクトル，従って測地線との成す角は一定に保たれる [3, p.288]．このため \vec{V} は図 16 のように移動し，A に戻ったとき元のベクトルに比べて 90 度回転している．

この結果により，大域的に平行なベクトル場を定義することは不可能であることが分かる．

■平行移動 (p.199) ベクトルの微小平行移動は，局所慣性系でベクトルの成分が変化しない変位として定義される [3, p.288]．よってベクトル \vec{V} がある曲線に沿って平行移動するとき，曲線を λ でパラメトライズし接ベクトル $\vec{U} = d\vec{x}/d\lambda$ を定義すると局所慣性系でその成分は

$$0 = \frac{dV^\mu}{d\lambda} = U^\nu \partial_\nu V^\mu = U^\nu V^\mu_{;\nu}$$

を満たす．ここで $U^\nu V^\mu_{;\nu}$ は反変ベクトルだから， $U^\nu V^\mu_{;\nu} = 0$ は平行移動に際して任意の座標系で成り立つ関係である．

*1 2 点 A, B を結ぶ大円上の 2 つの弧はともに測地線であるけれども，一方が最短曲線 (2 点を結ぶ曲線の内，最も短い曲線) であるのに対し他方はそれよりも長い．これが局所的と断った理由である．

■測地線 (p.199～) Euclid 空間における直線は、[直線に沿って進んで行くと進行方向が] それまでと同じ方向をとり続ける。曲った空間においても“できる限りまっすぐな”線を、ある点での接線が直前の点に平行であるような測地線として定義する。

接ベクトル $\vec{U} = \frac{dx^\alpha}{d\lambda}$ を持つ測地線の方程式は、測地線上のある点での接ベクトル \vec{U} が別の点での接ベクトルを測地線、従ってその接ベクトル \vec{U} に沿って平行移動したものであること

$$0 = U^\alpha U^\mu_{;\alpha} = U^\alpha (\partial_\alpha U^\mu + U^\beta \Gamma^\mu_{\alpha\beta}) = \frac{dU^\mu}{d\lambda} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} U^\alpha U^\beta = \frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda}$$

である。

- 測地線は厳密にはパラメーターを持つ曲線である。
- 測地線は長さの停留曲線である。

6.4 について

■平行移動 (p.199) について 式 (6.47):

$$0 = \frac{dV^\mu}{d\lambda} = U^\nu \partial_\nu V^\mu = U^\nu V^\mu_{;\nu}$$

の両辺に $d\lambda$ をかけると $0 = V^\mu_{;\nu} dx^\nu = DV^\mu$ となる。 DV^μ は \vec{V} の曲線上で $d\vec{x}$ 隔たる点でのベクトルとの差 $d\vec{V}$ の、(考えている点での) μ 番目の成分だから*2, これは平行移動の前後でベクトル \vec{V} が局所的には変化しないことを意味する。このことから、上記のように平行移動を定義したことは理に合っていると見えよう。

一方、基底ベクトルが各点で異なる曲線座標系ではベクトル \vec{V} を平行移動させるとその成分が変化する。曲線の媒介変数 λ に対する成分の変化率 $U^\nu \partial_\nu V^\mu$ は $0 = U^\nu V^\mu_{;\nu} = U^\nu (\partial_\nu V^\mu + V^\lambda \Gamma^\mu_{\lambda\nu})$ から

$$U^\nu \partial_\nu V^\mu = -U^\nu V^\lambda \Gamma^\mu_{\lambda\nu}$$

と求まる。これが次節の式 (6.53) に他ならない。

■測地線の方程式を変えないパラメーターの変換 (6.52) について 線形変換 (6.52): $\phi = a\lambda + b$ に対して $\frac{d}{d\lambda} = a \frac{d}{d\phi}$ なので、測地線の方程式は

$$0 = \frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = a^2 \left(\frac{d^2 x^\mu}{d\phi^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\phi} \frac{dx^\beta}{d\phi} \right), \quad \therefore \frac{d^2 x^\mu}{d\phi^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\phi} \frac{dx^\beta}{d\phi} = 0$$

となって形を変えない。

*2 教科書 pp.161-163 の式

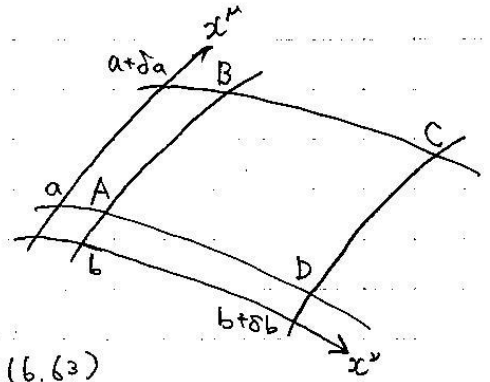
$$\partial_\beta \vec{V} = (\partial_\beta V^\alpha + V^\mu \Gamma^\alpha_{\mu\beta}) \vec{e}_\alpha = V^\alpha_{;\beta} \vec{e}_\alpha$$

の両辺に dx^β をかけて β で和をとると

$$(\partial_\beta \vec{V}) dx^\beta = (V^\alpha_{;\beta} dx^\beta) \vec{e}_\alpha$$

を得る。これは $d\vec{V} \equiv (\partial_\beta \vec{V}) dx^\beta$ の α 番目の成分 DV^α が $V^\alpha_{;\beta} dx^\beta$ であることを意味する。

6.5 曲率テンソル



閉曲線に沿ってベクトル \vec{V} を平行移動すると元のベクトルに一致しなくなることを曲率の定義に用いる。

右図においてベクトル \vec{V} を $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$ と平行移動すると、その成分は

$$\delta V^\alpha = \delta a^\alpha \delta b^\beta R^\alpha_{\beta\mu\nu} V^\beta,$$

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} \equiv \Gamma^\alpha_{\beta\nu,\mu} - \Gamma^\alpha_{\beta\mu,\nu} + \Gamma^\alpha_{\sigma\mu} \Gamma^\sigma_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha_{\sigma\nu} \Gamma^\sigma_{\beta\mu} \quad (6.63)$$

だけ変化することが示される。

[前節で見たように平行移動の定義から、平行移動に伴う成分の変化率 $\partial V^\alpha / \partial x^\sigma$, $\partial V^\beta / \partial x^\lambda$ の式 (6.53) が得られる。

そこで $R[\tilde{\omega}^\alpha; \vec{V}, \delta a^\beta \vec{e}_\mu, \delta b^\gamma \vec{e}_\nu] = \delta V^\alpha$ なる写像 R を考えると、これは引数1について線形で、成分は上式 (6.63) の $R^\alpha_{\beta\mu\nu}$ となるから (→ 6.5 について) リーマンの曲率テンソル R が得られる。

局所ローレンツ系において $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ をメトリックで表した式 (6.68):

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} \equiv g_{\alpha\lambda} R^\lambda_{\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} (g_{\alpha\nu,\beta\mu} - g_{\alpha\mu,\beta\nu} + g_{\beta\mu,\alpha\nu} - g_{\beta\nu,\alpha\mu})$$

を用いると、以下のことは比較的容易に導かれる。

- 添字の(反)対称性 (6.69): R $\begin{matrix} \text{反対称} \\ \wedge \\ \alpha\beta \\ \wedge \\ \mu\nu \\ \text{対称} \end{matrix}$
- 恒等式 (6.70): $R_{\alpha\beta\mu\nu} + (\text{3つの添字を巡回置換して得られる2つの項}) = 0$

これは1つの座標系で成り立つテンソル成分の関係だから、任意の座標系で成り立つ。

[両辺が同じ種類のテンソル成分から成る方程式は座標変換に対して共変的である。]

平坦な多様体 \Leftrightarrow 大域的平行性を定義できる

\Leftrightarrow ベクトルを一周、平行移動しても不変 $\Leftrightarrow R^\alpha_{\beta\mu\nu} = 0$.

時空点 A のベクトル $\vec{V}(A_i)$ を $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$ と平行移動したベクトルを $\vec{V}(A_f)$ と書く。このとき

$$\begin{aligned} (\vec{V} \text{ の } A \rightarrow B \rightarrow C \text{ と平行移動したときの変化}) &= \vec{V}(C) - \vec{V}(A_i) \\ \rightarrow (\vec{V} \text{ の } A \rightarrow D \rightarrow C \text{ と平行移動したときの変化}) &= \vec{V}(C) - \vec{V}(A_f) \end{aligned}$$

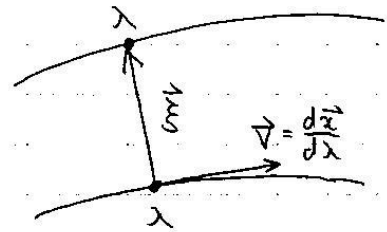
$$\vec{V}(A_f) - \vec{V}(A_i) \neq 0$$

となり、両者は一致しない。このことに対応して共変微分は曲率があるとき交換せず、

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] V^\mu = R^\mu_{\nu\alpha\beta} V^\nu \quad (6.71) \quad \text{となる。}$$

測地線偏差 p.206~

右図のように与えられた曲線を通る測地線と、
 その近くにおいて平行なもう一つの測地線を考える。
 それぞれの積分パラメータが共通の値入を持つ。
 2点を結ぶベクトルとして連結ベクトルを定義すると、
 これは測地線偏差の方程式(6.87):



$$\nabla_\mu \nabla_\nu \xi^\alpha = R^\alpha_{\mu\nu\rho} V^\mu V^\nu \xi^\rho \quad \text{に従うことも証明した (}\vec{v} = d\vec{x}/dx^\lambda \text{は接ベクトル)}$$

これは「同種テンソルの間の関係式だから」任意の座標系で成立し、
 曲がった空間では測地線の間隔が変化していくことを表している。

6.5について

■ A → B に沿う V^α の変化率(6.53)の導出

$0 = U^\beta V^\alpha_{;\beta} = U^\beta (V^\alpha_{;\beta} + V^\mu \Gamma^\alpha_{\mu\beta})$ において、 \vec{v} の \vec{e}_β に沿った平行移動を念頭に
 \vec{v} を \vec{e}_β にすると、 $U^\beta = (\vec{e}_\beta)^\beta = \delta^\beta_\beta$ となる

$$0 = V^\alpha_{;\beta} + V^\mu \Gamma^\alpha_{\mu\beta}, \quad \therefore \partial V^\alpha / \partial x^\beta = -\Gamma^\alpha_{\mu\beta} V^\mu \quad (6.53) \quad \text{を得る。}$$

■ C → D の平行移動における V^α の変化(6.56)の右辺第2項の正号について

C → D では $-\vec{e}_\beta$ 方向に平行移動する。そこで \vec{v} を $-\vec{e}_\beta$ にすると $U^\beta = (-\vec{e}_\beta)^\beta = -\delta^\beta_\beta$ となるから
 $\partial V^\alpha / \partial x^\beta = \Gamma^\alpha_{\mu\beta} V^\mu$ を得る。

■ \vec{v} を一周、平行移動したときの変化 $\delta \vec{v}$ の成分(6.62)の導出過程を補足しつつ追いかける

式(6.54-57)を辺々足す

$$\delta V^\alpha \equiv V^\alpha(A_f) - V^\alpha(A_i)$$

$$= - \left(\int_{x^1=a+\delta a} - \int_{x^1=a} \right) \Gamma^\alpha_{\mu 2} V^\mu dx^2 + \left(\int_{x^2=b+\delta b} - \int_{x^2=b} \right) \Gamma^\alpha_{\mu 1} V^\mu dx^1 \quad (6.58)$$

$$\approx -\delta a \underbrace{\frac{\partial}{\partial a} \int_{x^1=a} \Gamma^\alpha_{\mu 2} V^\mu dx^2}_{\text{aの関数}} + \delta b \underbrace{\frac{\partial}{\partial b} \int_{x^2=b} \Gamma^\alpha_{\mu 1} V^\mu dx^1}_{\text{bの関数}}$$

$$\approx - \int_{x^1=a} \underbrace{\delta a \frac{\partial}{\partial x^1} (\Gamma^\alpha_{\mu 2} V^\mu)}_{x^2=b \text{ の値で近似}} dx^2 + \int_{x^2=b} \underbrace{\delta b \frac{\partial}{\partial x^2} (\Gamma^\alpha_{\mu 1} V^\mu)}_{x^1=a \text{ の値で近似}} dx^1 \quad (6.59) \quad \left(\begin{array}{l} \text{近似の誤差は} \\ \text{高次の微小量} \end{array} \right)$$

$$\approx \delta a \delta b \left\{ -\frac{\partial}{\partial x^1} (\Gamma^\alpha_{\mu 2} V^\mu) + \frac{\partial}{\partial x^2} (\Gamma^\alpha_{\mu 1} V^\mu) \right\} \quad (6.60)$$

$$= \delta\alpha\delta\beta \left\{ V^\mu \left(-\frac{\partial \Gamma^\alpha_{\mu 2}}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\mu 1}}{\partial x^2} \right) + \Gamma^\alpha_{\mu 2} \Gamma^\mu_{\beta 1} V^\beta - \Gamma^\alpha_{\mu 1} \Gamma^\mu_{\beta 2} V^\beta \right\}$$

(式(6.53)において $\begin{matrix} \mu \rightarrow \mu \\ \beta \rightarrow \beta \end{matrix}$ とした関係 $\frac{\partial V^\mu}{\partial x^1} = -\Gamma^\mu_{\beta 1} V^\beta$ や $\frac{\partial V^\mu}{\partial x^2} = -\Gamma^\mu_{\beta 2} V^\beta$ による)

$$= \delta\alpha\delta\beta \left[\Gamma^\alpha_{\mu 1, 2} - \Gamma^\alpha_{\mu 2, 1} + \Gamma^\alpha_{\nu 2} \Gamma^\nu_{\mu 1} - \Gamma^\alpha_{\nu 1} \Gamma^\nu_{\mu 2} \right] V^\mu \quad (6.61)$$

(\sim は添字を $\mu \rightarrow \nu, \beta \rightarrow \mu$ と置換えて得る)

ここで座標番号を $1, 2 \rightarrow \sigma, \lambda$ と改めると式(6.62)を得る。

■ $R^\alpha_{\beta\mu\nu}$ は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ テンソルの成分でなくてはならない (式(6.63) 1行目) について

写像 R を $R[\bullet; \hat{v}, \delta\alpha \hat{e}_\mu, \delta\beta \hat{e}_\nu] = \delta \hat{v}$,
 $R[\hat{\omega}^\alpha; \hat{v}, \delta\alpha \hat{e}_\mu, \delta\beta \hat{e}_\nu] = \delta \hat{v}[\hat{\omega}^\alpha] = \delta V^\alpha = \delta\alpha\delta\beta R^\alpha_{\beta\mu\nu} V^\beta$ とすると

第2式はベクトル $\hat{v}, \delta\alpha \hat{e}_\mu, \delta\beta \hat{e}_\nu$ について線形であり、
 第1式のベクトル $\delta \hat{v}$ は一形式の線形写像である。以上より R はテンソルである。
 しかもその成分は $R[\hat{\omega}^\alpha; \hat{e}_\mu, \hat{e}_\nu] = R^\alpha_{\beta\mu\nu} [\hat{e}_\mu]^\beta = R^\alpha_{\beta\mu\nu} \equiv (6.63)$
 なので、 R は曲率テンソルに他ならない。

■ 局所ローレンツ系において $R^\alpha_{\beta\mu\nu}$ をメトリックで表した式(6.67)の確認

局所ローレンツ系で

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\beta\nu, \mu} - \Gamma^\alpha_{\beta\mu, \nu} \quad (\text{曲率テンソル成分の定義式(6.63)において, 第3項, 第4項のクリスチフェル記号が消えた})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} (g_{\sigma\beta, \nu\mu} + g_{\sigma\nu, \beta\mu} - g_{\sigma\mu, \beta\nu}) \leftarrow \text{式(6.64)で } \mu \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \sigma, \sigma \rightarrow \mu \text{ と置換} \\ &\quad - \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} (g_{\sigma\beta, \mu\nu} + g_{\sigma\mu, \beta\nu} - g_{\sigma\nu, \beta\mu}) \leftarrow \text{1行目で } \mu \leftrightarrow \nu \text{ と入れ替え} \\ &= \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} (g_{\sigma\nu, \beta\mu} - g_{\sigma\mu, \beta\nu} - g_{\sigma\mu, \beta\nu} + g_{\sigma\nu, \beta\mu}) = (6.67). \end{aligned}$$

■ 曲率テンソル成分の(反)対称性(6.69)の確認

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} (\underset{\textcircled{1}}{g_{\alpha\nu, \beta\mu}} - \underset{\textcircled{2}}{g_{\alpha\mu, \beta\nu}} + \underset{\textcircled{3}}{g_{\beta\mu, \alpha\nu}} - \underset{\textcircled{4}}{g_{\beta\nu, \alpha\mu}}) \quad (6.68) \quad \text{に対して}$$

$$\left\{ \begin{aligned} R_{\beta\alpha\mu\nu} &= \frac{1}{2} (\underset{-\textcircled{4}}{g_{\beta\nu, \alpha\mu}} - \underset{-\textcircled{3}}{g_{\beta\mu, \alpha\nu}} + \underset{-\textcircled{2}}{g_{\alpha\mu, \beta\nu}} - \underset{-\textcircled{1}}{g_{\alpha\nu, \beta\mu}}) = -R_{\alpha\beta\mu\nu} \\ R_{\alpha\beta\nu\mu} &= \frac{1}{2} (\underset{-\textcircled{2}}{g_{\alpha\mu, \beta\nu}} - \underset{-\textcircled{1}}{g_{\alpha\nu, \beta\mu}} + \underset{-\textcircled{4}}{g_{\beta\nu, \alpha\mu}} - \underset{-\textcircled{3}}{g_{\beta\mu, \alpha\nu}}) = -R_{\alpha\beta\mu\nu} \\ R_{\mu\nu\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (\underset{\textcircled{3}}{g_{\mu\beta, \alpha\nu}} - \underset{\textcircled{2}}{g_{\mu\alpha, \beta\nu}} + \underset{\textcircled{1}}{g_{\nu\alpha, \mu\beta}} - \underset{\textcircled{4}}{g_{\nu\beta, \mu\alpha}}) = R_{\alpha\beta\mu\nu} \end{aligned} \right.$$

恒等式 (6.70) の確認

$$\begin{aligned}
 R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} &= \frac{1}{2} (g_{\nu\gamma,\beta\alpha} - g_{\alpha\gamma,\beta\nu} + g_{\beta\mu,\alpha\nu} - g_{\beta\nu,\alpha\mu} \\
 &\quad + g_{\alpha\mu,\nu\beta} - g_{\alpha\nu,\nu\beta} + g_{\nu\beta,\alpha\mu} - g_{\nu\mu,\alpha\beta} \\
 &\quad + g_{\alpha\beta,\mu\nu} - g_{\alpha\nu,\mu\beta} + g_{\mu\nu,\alpha\beta} - g_{\mu\beta,\alpha\nu}) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

$\nabla_\alpha \nabla_\beta V^\mu$ の式 (6.73) の導出について

局所ローレンツ系でクリストフ記号はゼロになる (★)

これを用いて

$$\begin{aligned}
 \nabla_\alpha \nabla_\beta V^\mu &= \nabla_\alpha V^\mu{}_{;\beta} = (V^\mu{}_{;\beta})_{;\alpha} + \dots : (6.72) \\
 &= (V^\mu{}_{;\beta} + V^\nu \Gamma^\mu{}_{\nu\beta})_{;\alpha} \\
 &= V^\mu{}_{;\beta;\alpha} + V^\nu \Gamma^\mu{}_{\nu\beta;\alpha} + V^\nu{}_{;\alpha} \Gamma^\mu{}_{\nu\beta} : (6.73)
 \end{aligned}$$

式 (6.78): $[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] F^\mu{}_\nu = R^\mu{}_{\sigma\alpha\beta} F^\sigma{}_\nu + R^\sigma{}_{\nu\alpha\beta} F^\mu{}_\sigma$ について

両辺に計量テンソルを縮約して添字 μ, ν を上げ下げすると、計量テンソルは共変微分をすばけるが (式 (6.31)),

$$\begin{cases}
 [\nabla_\alpha, \nabla_\beta] F_{\mu\nu} = -R^\sigma{}_{\mu\alpha\beta} F_{\sigma\nu} + R^\sigma{}_{\nu\alpha\beta} F_{\mu\sigma} \\
 [\nabla_\alpha, \nabla_\beta] F^{\mu\nu} = R^\mu{}_{\sigma\alpha\beta} F^{\sigma\nu} - R^\nu{}_{\sigma\alpha\beta} F^{\mu\sigma} \\
 [\nabla_\alpha, \nabla_\beta] F_\mu{}^\nu = -R^\sigma{}_{\mu\alpha\beta} F_\sigma{}^\nu - R^\nu{}_{\sigma\alpha\beta} F_\mu{}^\sigma
 \end{cases} \text{を得る.}$$

式 (6.83): $\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\lambda^2} = -\Gamma^\alpha{}_{00,\beta} \xi^\beta$ の導出過程を補足して追いかける

点 A' を通る測地線の方程式は

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} \Big|_{A'} + \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu}(A') \frac{dx^\beta}{d\lambda} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \\
 &= \frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} \Big|_{A'} + \Gamma^\alpha{}_{00}(A') \quad \left(\because \frac{dx^\beta}{d\lambda} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^0} = \delta^\beta{}_0, \text{ etc.} \right) \\
 &= \frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} \Big|_{A'} + (\Gamma^\alpha{}_{00,\beta} \xi^\beta)_A \quad (\because \text{式 (6.81)})
 \end{aligned}$$

また点 A の局所ローレンツ系において $\frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} \Big|_A = 0$: (6.79) であるから $\xi^\alpha(A) = x^\alpha(A') - x^\alpha(A)$ (式 (6.80) の下2行) より式 (6.83):

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\lambda^2} \Big|_A = -(\Gamma^\alpha{}_{00,\beta} \xi^\beta)_A \quad \text{が各点 A で成立する.}$$

■ 式(6.85), 式(6.86) について

p.207 下から3行目に「(6.48)を使う」とあるが、 ∇_ν が $x^0 = \lambda$ 方向への共変微分であること、すなわち

$$\begin{cases} \xi^\alpha \text{の微分} & \nabla_\nu \xi^\alpha = \xi^\alpha_{,0} + \xi^\beta \Gamma^\alpha_{\beta 0} = d\xi^\alpha/d\lambda + \xi^\beta \Gamma^\alpha_{\beta 0} \dots \textcircled{1} \\ \nabla_\nu \xi^\alpha \text{の微分} & \nabla_\nu (\nabla_\nu \xi^\alpha) = d(\nabla_\nu \xi^\alpha)/d\lambda + (\nabla_\nu \xi^\beta) \Gamma^\alpha_{\beta 0} \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

を用いて

$$\nabla_\nu (\nabla_\nu \xi^\alpha) = \frac{d}{d\lambda} (\nabla_\nu \xi^\alpha) + \underbrace{(\nabla_\nu \xi^\beta) \Gamma^\alpha_{\beta 0}}_{\text{点Aでゼロ}} \dots (\because \textcircled{2})$$

$$= \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{d\xi^\alpha}{d\lambda} + \xi^\beta \Gamma^\alpha_{\beta 0} \right)$$

$$= \frac{d^2 \xi^\alpha}{d\lambda^2} + \frac{d\xi^\beta}{d\lambda} \underbrace{\Gamma^\alpha_{\beta 0}}_{\text{点Aでゼロ}} + \xi^\beta \frac{d\Gamma^\alpha_{\beta 0}}{d\lambda}$$

$$= \frac{d^2 \xi^\alpha}{d\lambda^2} + \xi^\beta \Gamma^\alpha_{\beta 0,0} \dots (6.85)$$

とすれば良い。

最右辺第1項に $d^2 \xi^\alpha / d\lambda^2 = -\Gamma^\alpha_{00,\beta} \xi^\beta$: (6.82) を代入し

$$\begin{aligned} \nabla_\nu \nabla_\nu \xi^\alpha &= \xi^\beta (\Gamma^\alpha_{\beta 0,0} - \Gamma^\alpha_{00,\beta}) = \xi^\beta R^\alpha_{00\beta} = \xi^\beta R^\alpha_{\mu\nu\beta} \delta^\mu_0 \delta^\nu_0 \\ &= \xi^\beta R^\alpha_{\mu\nu\beta} V^\mu V^\nu : (6.86) \quad \text{を得る。} \end{aligned}$$

6.6 ビアンキの小恒等式 : リッチ・テンソルとアインシュタイン・テンソル

ビアンキの小恒等式 $R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + (\text{3つの添字を巡回置換して得られる2項}) = 0$ が成立する。
これはテンソルの関係式だから、証明するには局所ローレンス系においてこれが成立していることも確かめれば十分である。左辺を具体的に外ソックで表して証明する。

リッチ・テンソル p.207~

リッチ・テンソル $R_{\mu\nu} \equiv R^\alpha_{\mu\alpha\nu} (= R_{\nu\mu}; \text{対称テンソル}),$

リッチ・スカラー $R \equiv g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}.$

アインシュタイン・テンソル p.207~

ビアンキの小恒等式を、Einsteinテンソル $G^{\alpha\beta} \equiv R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R$ に対する小恒等式

$$G^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0$$

に書き換えた。

後述の物理 (Einstein方程式 $G^{\alpha\beta} = 8\pi T^{\alpha\beta}$) と合わせれば、これは保存則

$$T^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0$$

になる。

6.6 について

■ 局所ローレンツ系において $R_{\alpha\beta\mu\nu,\lambda}$ をメトリックで表した式 (6.88) の確認

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu,\lambda} = \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu,\mu\lambda} - \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu,\nu\lambda} + \underbrace{\partial_{\lambda}(\Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\mu}\Gamma^{\sigma}{}_{\beta\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}{}_{\beta\mu})}$$

$\{g_{\alpha\beta,\lambda}\}$ の 1 次の項の線形結合であり、局所ローレンツ系では消える

$$= \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} \left\{ \cancel{(g_{\sigma\beta,\nu} + g_{\gamma\nu,\beta} - g_{\beta\gamma,\nu})}_{,\mu\lambda} - \cancel{(g_{\sigma\beta,\mu} + g_{\gamma\mu,\beta} - g_{\beta\gamma,\mu})}_{,\nu\lambda} \right\}. \quad (∵ \text{式(6.32)})$$

添字 α を下すには 上式で $\alpha \rightarrow \alpha'$ と置き換えてから $g_{\alpha\alpha'}$ をかけ、 α' について和をとれば良い。その際、右辺において $g_{\alpha\alpha'} g^{\alpha'\gamma} = \delta_{\alpha}{}^{\gamma}$ とおけるから、

$$R_{\alpha\beta\mu\nu,\lambda} = \frac{1}{2} \left\{ (g_{\nu,\beta} - g_{\beta,\nu})_{,\mu\lambda} - (g_{\mu,\beta} - g_{\beta,\mu})_{,\nu\lambda} \right\} \\ = \frac{1}{2} (g_{\alpha\nu,\beta\mu\lambda} - g_{\alpha\mu,\beta\nu\lambda} + g_{\beta\mu,\alpha\nu\lambda} - g_{\beta\nu,\alpha\mu\lambda}) \quad (6.88) \text{ を得る。}$$

■ 式 (6.89) の導出

式 (6.88) より

$$R_{\alpha\beta\mu\nu,\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu,\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda,\mu}$$

└ 巡回置換

$$= \frac{1}{2} \left(\underbrace{g_{\alpha\nu,\beta\mu\lambda}} - \underbrace{g_{\alpha\mu,\beta\nu\lambda}} + \underbrace{g_{\beta\nu,\alpha\mu\lambda}} - \underbrace{g_{\beta\mu,\alpha\nu\lambda}} \right. \\ \left. + \underbrace{g_{\alpha\mu,\beta\nu\lambda}} - \underbrace{g_{\alpha\lambda,\beta\mu\nu}} + \underbrace{g_{\beta\mu,\alpha\lambda\nu}} - \underbrace{g_{\beta\lambda,\alpha\mu\nu}} \right. \\ \left. + \underbrace{g_{\alpha\lambda,\beta\nu\mu}} - \underbrace{g_{\alpha\nu,\beta\lambda\mu}} + \underbrace{g_{\beta\lambda,\alpha\nu\mu}} - \underbrace{g_{\beta\nu,\alpha\lambda\mu}} \right)$$

$$= 0 \quad (6.89)$$

■ 「第一と第二とは、…… それらの縮約は恒等的にゼロか $\pm R_{\alpha\beta}$ ……」 (p.209, 2.9~12) について

$$R^{\alpha}{}_{\alpha\mu\nu} = g^{\alpha\beta} R_{\beta\alpha\mu\nu} = 0, \quad (\text{添字 } \alpha, \beta \text{ について } g^{\alpha\beta} \text{ は対称, } R_{\beta\alpha\mu\nu} \text{ は反対称だから})$$

$$R^{\alpha}{}_{\mu\nu\alpha} = -R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu} = -R_{\mu\nu}$$

■ リッチ・テンソルの対称性 (6.9 節, 練習問題 25) について

$$R_{\beta\alpha} = R^{\mu}{}_{\beta\mu\alpha} = g^{\mu\nu} R_{\nu\beta\mu\alpha} = g^{\mu\nu} R_{\mu\alpha\nu\beta} = R^{\nu}{}_{\alpha\nu\beta} = R_{\alpha\beta} \text{ と示された}$$

■ ビアンキの恒等式 (6.90) の添字 α, μ を縮約した式 (6.93) の導出について

$$g^{\alpha\mu}(R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\nu;\mu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu}) = 0 \quad \text{において}$$

$$\begin{cases} g^{\alpha\mu} R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} = (g^{\alpha\mu} R_{\alpha\beta\mu\nu})_{;\lambda} = R_{\beta\nu;\lambda} \\ g^{\alpha\mu} R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} = -g^{\alpha\mu} R_{\alpha\beta\mu\lambda;\nu} = -(g^{\alpha\mu} R_{\alpha\beta\mu\lambda})_{;\nu} = -R_{\beta\lambda;\nu} \quad (6.95) \\ g^{\alpha\mu} R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu} = (g^{\alpha\mu} R_{\alpha\beta\nu\lambda})_{;\mu} = R^{\mu\nu\lambda}_{;\mu} \end{cases}$$

↑
式 (6.93) の右辺第3項は誤植と考えられる。μがギリシヤ添字でなく、添字νが生き残るはずである。

■ さらに添字 β, ν を縮約した式 (6.96) の導出について

$$\begin{aligned} 0 &= g^{\beta\nu}(R_{\beta\nu;\lambda} - R_{\beta\lambda;\nu} + R^{\mu\nu\lambda}_{;\mu}) \\ &= (g^{\beta\nu} R_{\beta\nu})_{;\lambda} - (g^{\beta\nu} R_{\beta\lambda})_{;\nu} + (g^{\beta\nu} R^{\mu\nu\lambda})_{;\mu} \\ &= R_{;\lambda} - R^{\nu\lambda}_{;\nu} + (g^{\beta\nu} R^{\mu\nu\lambda})_{;\mu} \end{aligned}$$

において

$$g^{\beta\nu} R^{\mu\nu\lambda}_{;\mu} = g^{\beta\nu} g^{\alpha\mu} R_{\alpha\beta\nu\lambda} = -g^{\beta\nu} g^{\alpha\mu} R_{\beta\alpha\nu\lambda} = -g^{\alpha\mu} R^{\nu\mu\lambda}_{;\nu} = -g^{\alpha\mu} R_{\alpha\lambda} = -R^{\mu\lambda}_{;\mu}$$

なので式 (6.96):

$$R_{;\lambda} - R^{\mu\lambda}_{;\mu} + (-R^{\mu\lambda}_{;\mu}) = 0 \quad \text{を得る。}$$

■ 式 (6.99): $G^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0$ の導出について

式 (6.96) より

$$0 = R_{;\lambda} - 2R^{\mu\lambda}_{;\mu} = -(2R^{\mu\lambda} - \delta^{\mu\lambda} R)_{;\mu} \quad (\Leftrightarrow \text{式 (6.97)})$$

添字 λ を上げるために両辺に $g^{\nu\lambda}$ をかけて λ について和をとると

$$0 = g^{\nu\lambda} (2R^{\mu\lambda} - \delta^{\mu\lambda} R)_{;\mu} = \{g^{\nu\lambda} (2R^{\mu\lambda} - \delta^{\mu\lambda} R)\}_{;\mu} = (2R^{\mu\nu} - g^{\mu\nu} R)_{;\mu}$$

$$\equiv 2G^{\mu\nu}_{;\nu} \quad (\Leftrightarrow \text{式 (6.99)})$$

を得る。

6.7 曲率のまとめ

2.1-3「」の章にもたくさん重要な式ができた。

しかし暗記する必要のあるのはほとんどない」に注目。

7 曲った時空での物理

7.1 微分幾何から重力へ

幾何学の概念を物理的な概念に対応付ける。

- (I) 時空はメトリックを持つ 4 次元多様体である。
- (II) メトリックは棒と時計で測ることができる。
- (III) メトリックが与えられた時空点で $\{\eta_{\alpha\beta}\}$ になる適当な座標系をとれる。

理論を完全なものにするには、さらに以下のことを指定しなければならない。

- 物理的対象の重力場中のふるまい。
 - Newton 重力においては、運動方程式 $m\mathbf{a} = -m\nabla\phi$ から決定される (ϕ は重力ポテンシャル)。
- 曲率が物体によって作られる仕方。
 - Newton 重力における、場の方程式 $\Delta\phi = 4\pi G\rho$ に対応する。

Newton 重力の理論では

- 時空は時間と 3 次元 Euclid 空間から成り、
3 次元 Euclid 空間はメトリックを持つ ← 距離が定義される。
- 2 つの事件について
 - 空間的に同一の点で起きたか → 座標系による。
 - 同時性 → 座標系によらない。

次の仮説をおく。

(IV) 弱い等価原理 自由落下する粒子は曲がった時空に測地線 (局所慣性系での直線) を描く。

弱い等価原理は粒子だけに適用される。

(IV') Einstein の等価原理 局所慣性系と、特殊相対論の成り立つ平坦な時空とで、

物理実験の結果は同じになる。

- 自由落下する宇宙飛行士 [局所慣性系にあたる] は重力を感じない。
地上の人は地面から押し返されるから “重力を感じる” にすぎない。
- 潮汐力は大域的な重力効果である。
(地球の両端での月からの Newton 重力の違いに起因するものだから。)
- 特殊相対論における保存則

$$(nU^\alpha)_{,\alpha} = 0$$

は、コンマをセミコロンに変えることで曲った時空での保存則

$$(nU^\alpha)_{;\alpha} = 0$$

になる。実際これは局所慣性系において $(nU^\alpha)_{,\alpha} = 0$ に戻り、
テンソルの関係式だから (両辺がともにスカラーである) 任意の座標系で正しい。

– 特殊相対論における保存則に曲率 R (Ricci スカラー) を含めて

$$(nU^\alpha)_{;\alpha} = qR^2$$

と一般化することは、仮説 (IV') により禁止される。

7.1 について

■第4章(特殊相対論における完全流体)の復習

- 粒子の保存則 (7.1) は流束 (4.4): $\vec{N} = n\vec{U}$ に対する式 (4.35): $N^\alpha_{;\alpha} = (nU^\alpha)_{;\alpha} = 0$ である。
- MCR 系 → 教科書 p.35 を見よ。
- エントロピーの保存則 (7.4) は式 (4.50): $U^\alpha S_{;\alpha} = \frac{dS}{d\tau} = 0$ である。
- エネルギー・運動量保存則 (7.5) は式 (4.34): $T^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0$ である。
- ストレス-エネルギーテンソル (7.7) は完全流体に対する式 (4.37): $T^{\alpha\beta} = (\rho + p)U^\alpha U^\beta + p\eta^{\alpha\beta}$ である。

■Ricci スカラーを含む粒子数保存則 (7.3) について 「この式も、平坦な時空ではリーマン・テンソルがゼロになるので、特殊相対論の極限で式 (7.1) に帰着する」 (p.224, 1.17~19)。しかも両辺がともにスカラーだから、ある座標系で正しければ任意の座標系で成立する。しかし曲がった時空では局所慣性系においても Christoffel 記号が、したがって Ricci スカラー R がゼロとならないから、これはこれは特殊相対論の式 (7.1) に一致せず、Einstein の等価原理 (IV)' を破ることになる。

7.2 少し曲った時空での物理

重力が弱く $|\phi| \ll 1$ が満たされているときのメトリックは

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -(1+2\phi) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-2\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-2\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\phi \end{pmatrix}$$

である (これは次章の式 (8.50) において示される)。これにより粒子が非相対論的な運動をしており、 $p^0 \gg |\mathbf{p}|$ が満たされているとき [したがって粒子の質量 $m \neq 0$]、粒子が描く測地線の方程式 $\nabla_{\vec{p}}\vec{p} = 0$ について

$$\begin{aligned} \text{時間成分} \quad \frac{dp^0}{d\tau} &= -m \frac{\partial\phi}{\partial\tau} \rightarrow \text{定常的な場において粒子のエネルギーが保存,} \\ \text{空間成分} \quad \frac{dp^i}{d\tau} &= -m\phi_{;j}\delta^{ij}: \text{Newton 理論における運動方程式} \end{aligned}$$

となる。

7.2 について

■式 (7.11), 式 (7.12) について

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dp^0}{d(\tau/m)} + \Gamma^0_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta : (7.11) \quad \leftarrow \vec{p} \text{ を接ベクトルに持つ測地線のアフィンパラメーターは } \tau/m \\ &\simeq m \frac{dp^0}{d\tau} + \Gamma^0_{00} (p^0)^2 : (7.12). \quad \leftarrow \text{非相対論的極限で } \vec{p} \text{ の空間成分を無視} \end{aligned}$$

■「…… $(p^0)^2$ は m^2 に置き換えることができる」(p.227, l.2,3) について 局所慣性系で成り立つ式 $-m^2 = \vec{p} \cdot \vec{p}$ はテンソルの関係式だから (両辺がともにスカラーである) 常に成り立ち, 式 (7.30) において見るように

$$-m^2 = \vec{p} \cdot \vec{p} = -(1+2\phi)(p^0)^2 + (1-2\phi)\mathbf{p}^2, \quad \therefore (p^0)^2 \simeq m^2$$

である.

■式 (7.15): $\frac{d}{d\tau} p^0 = -m \frac{\partial \phi}{\partial \tau}$ について 右辺において $\frac{\partial}{\partial x^0}$ が固有時間 τ による微分に置き換わっているのは,

$$\begin{aligned} m \frac{\partial \phi}{\partial \tau} &= \frac{\partial \phi}{\partial(\tau/m)} = p^\alpha \phi_{,\alpha} \\ &\simeq p^0 \phi_{,0} \quad (\because |\mathbf{p}| \ll p^0) \\ &\simeq m \phi_{,0} \quad (\because p^0 \simeq m) \end{aligned}$$

によると考えられる.

■測地線の方程式 (7.16), (7.17) について 左辺第 1 項は

$$\text{式 (6.50)} \quad \Leftrightarrow \quad 0 = p^\alpha p^i_{;\alpha} = p^\alpha (p^i_{,\alpha} + p^\beta \Gamma^i_{\beta\alpha})$$

における $p^\alpha p^i_{;\alpha} = \frac{dp^i}{d(\tau/m)}$ である.

■式 (7.24) の導出について 式 (7.19): $\Gamma^i_{00} = \frac{1}{2} g^{i\alpha} (g_{0\alpha,0} + g_{\alpha 0,0} - g_{00,\alpha})$ において, $\alpha = i$ のときのみ $g^{i\alpha}$ はゼロでない. そこで

$$\begin{aligned} g^{ii} &= \frac{1}{1-2\phi} \quad (i \text{ で和をとらない}), \\ g_{0i} &= 0, \quad g_{00,i} = (1+2\phi)_{,i} = 2\phi_{,i} \end{aligned}$$

に注意して

$$\Gamma^i_{00} = \frac{1}{2} g^{ii} (2g_{0i,0} - g_{00,i}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+2\phi} \cdot 2\phi_{,i} \simeq \phi_{,i} + O(\phi^2)$$

とすると, 運動方程式は式 (7.24) の代わりに

$$\frac{dp^i}{d\tau} = -m \phi_{,i}$$

となる. 右辺の $\phi_{,i}$ と $\phi_{,j} \delta^{ij}$ は等しい値を持つから, これを両辺が同じ種類のテンソルから成る関係式

$$\frac{dp^i}{d\tau} = -m \phi_{,j} \delta^{ij}$$

に書き換えられる.

■メトリックの逆テンソル

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -(1+2\phi) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-2\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-2\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\phi \end{pmatrix} \Rightarrow (g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{1+2\phi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-2\phi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1-2\phi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1-2\phi} \end{pmatrix}.$$

7.3 曲った時空での直観

曲った時空では Newton 理論・特殊相対論の場合と異なり, 物理的加速度 $d\vec{U}/d\tau$ がゼロの粒子について, その座標加速度 d^2x^i/dt^2 がゼロになるような慣性系をとることができず, あらゆる座標系を同等に扱うことになる.

異なる点でのベクトルを比べるためにベクトルを同一点に平行移動させる方法は, 従って四元運動量 \vec{p} の和を定義する方法は定まらない. 空間的に有限な広がりを持つ系に対してはその全エネルギー・運動量を定義できるけれど, 全質量エネルギーと重力ポテンシャルエネルギーの各々は定義されない.

7.4 保存量

$$\text{測地線の方程式} \quad \Leftrightarrow \quad m \frac{dp_\beta}{d\tau} = \frac{1}{2} g_{\alpha\nu, \beta} p^\alpha p^\nu$$

なので, メトリック $\{g_{\alpha\nu}\}$ が x^β に依らない座標系では [右辺がゼロになり], 測地線に沿って p_β が保存される. 特に $\beta = 0$ の場合を考えると, メトリックが x^0 に依らない座標系において, 測地線に沿ってその系でのエネルギー p_0 が保存される.

$$-m^2 = \vec{p} \cdot \vec{p} = g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu$$

において, 非相対論的極限でのメトリックが

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -(1+2\phi) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-2\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-2\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\phi \end{pmatrix}$$

であることから

$$\begin{aligned} p^0 &\simeq m && \leftarrow \text{質量エネルギー} \\ &+ m\phi && \leftarrow \text{重力ポテンシャルエネルギー} \\ &+ \mathbf{p}^2/2m && \leftarrow \text{運動エネルギー} \end{aligned}$$

を得る (質量エネルギーを除けば, Newton 理論におけるエネルギーの表式が再現されている).

z 軸周りの回転対称性を持つ系に対して, 上式 (7.29):

$$m \frac{dp_\beta}{d\tau} = \frac{1}{2} g_{\nu\alpha, \beta} p^\nu p^\alpha$$

から得られる保存量 p_ψ (ψ は z 軸周りの回転角) は, 非相対論的極限で角運動量 $mr^2\dot{\psi}$ となる.

7.4 について

■ p^0 の式 (7.32) について $(p^0)^2$ に対する p.232, 1.2 の近似式は

$$\begin{aligned} (p^0)^2 &= \frac{(1-2\phi)\mathbf{p}^2 + m^2}{1+2\phi} \\ &= \{(1-2\phi)\mathbf{p}^2 + m^2\}\{1-2\phi + O(\phi^2)\} \\ &= (1-2\phi)^2\mathbf{p}^2 + (1-2\phi)m^2 + O(\phi^2) \\ &= \mathbf{p}^2 + (1-2\phi)m^2 + O(\mathbf{p}^2\phi, \phi^2) \\ &\simeq m^2 \left(1 - 2\phi + \frac{\mathbf{p}^2}{m^2} \right) \end{aligned}$$

として得られる.

$$p^0 \simeq \pm m(1 - \phi + \mathbf{p}^2/2m^2)$$

の右辺において式 (7.32) のように正号をとれば, $\phi = 0, \mathbf{p} = 0$ のときこれは正しい関係 $p^0 \simeq m$ になる.

■回転対称性に伴う p_ψ について 保存量 p_ψ の式 (7.35) について、非相対論的極限でのメトリックは

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\psi^2 + dz^2$$

によって与えられる. ここから第 1 の等号が

$$p_\psi = g_{\psi\alpha} p^\alpha = g_{\psi\psi} p^\psi$$

と分かり, また式 (7.36): $g_{\psi\psi} \simeq r^2$ も分かる.

第 2 の等号では非相対論的極限で定義式が

$$p^\mu \equiv m \frac{dx^\mu}{d\tau} \simeq m \frac{dx^\mu}{dt}$$

となることに注意して $p^\psi = m\dot{\psi}$ とすれば良い.

この結果, 共変ベクトル (7.37): $p_\psi = mr^2\dot{\psi}$ は角運動量となり,

$$p_\psi \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\psi}} \left(\frac{1}{2} m (r\dot{\psi})^2 \right) = mr^2\dot{\psi}$$

に合致する.

8 アインシュタイン方程式

8.1 重力場の方程式の目的と正当性

重力場の方程式は

- (i) $\Delta\phi = 4\pi G\rho$ と類似の方程式であり,
- (ii) ρ の代わりに, それを一般化したストレス-エネルギーテンソル \mathbf{T} をとったものである (4.7 節「一般相対論の重要性」参照)

と考え,

$$O^{\alpha\beta}(\mathbf{g}) = kT^{\alpha\beta}$$

と書く. これを両辺が同じ種類のテンソルから成る関係式とするために, 左辺を $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ テンソル

$$O^{\alpha\beta} = R^{\alpha\beta} + \mu g^{\alpha\beta} R + \Lambda g^{\alpha\beta}$$

にとる. このとき場の方程式 $O^{\alpha\beta} = kT^{\alpha\beta}$ は, $O^{\alpha\beta}, T^{\alpha\beta}$ の独立な成分に応じた 10 個の方程式となる.

- (iii) 等価原理

により任意の系で保存則 $T^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0$ が成り立つことを要求すると $\mu = -1/2$ と定まり, 場の方程式は Einstein 方程式

$$G^{\alpha\beta} + \Lambda g^{\alpha\beta} = kT^{\alpha\beta}, \quad G^{\alpha\beta} \equiv R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta} R$$

となる.

- Einstein 方程式に矛盾する現象は見つかっていない.
また, Einstein 方程式以外にも (i),(ii),(iii) を満たす競合理論があるけれど, それらは複雑で審美的観点から関心を引かない.
- Einstein 方程式に対する量子補正は扱わない.

■距離化単位 (p.240~) $c = 1, G = 1$ とする単位系のことである.

地球の質量を M_{\oplus} とすると, 地球を回る衛星軌道の精密測定により GM_{\oplus} の値を正確に測定できる. そしてこれは距離化単位での質量の c^2 倍だから, 距離化単位での質量の値は正確に分かる. しかし G の値には大きな不定性があるため, 積 GM_{\oplus} を G で割って, 質量を通常の単位系での値 M_{\oplus} に換算すると, 精度が落ちる.

8.1 について

■距離化単位 (p.240~) について 通常の単位系で

$$[G] = \left[\frac{Fr^2}{m^2} \right] = \frac{(ML/T^2)L^2}{T^2} = M^{-1}L^3T^{-2}$$

なので, $c = 1, G = 1$ とする距離化単位では

$$1 = [G] = M^{-1}L$$

となり, 質量と長さは同じ次元を持つ. これは自然単位系において $L = 1/M$ となるのとは事情が異なっている.

通常単位系で

$$[Gm] = L^3T^{-2} = L(L/T)^2$$

なので, これが長さの次元を持つためには c^2 で割れば良い. よって積 GM_{\oplus} は距離化単位で測った質量の c^2 倍である.

8.2 アインシュタイン方程式

非相対論的極限で Newton 理論が再現されるためには, 弱い重力場に対してメトリックが式 (7.8):

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -(1+2\phi) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-2\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-2\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\phi \end{pmatrix}$$

とならなければならない. 宇宙定数を $\Lambda = 0$ とおいた Einstein 方程式 $G^{\alpha\beta} = kT^{\alpha\beta}$ が, 実際にこれを解に持つことを以降で見る. その際, $k = 8\pi$ でなければならないことが見出されるけれど, 以下ではあらかじめ $k = 8\pi$ と仮定した Einstein 方程式

$$G^{\alpha\beta} = 8\pi T^{\alpha\beta}$$

を考える.

- 10 個の $\{g_{\alpha\beta}\}$, 4 つの座標の任意性
→ 6 個の幾何学的・力学的自由度
- 10 個の Einstein 方程式 $G^{\alpha\beta} = 8\pi T^{\alpha\beta}$, 4 個の恒等式 (6.99): $G^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$
→ 6 個の独立な微分方程式

であり, 6 個の幾何学的・力学的自由度が 6 個の独立な微分方程式から決定されることになる.

シュワルツ相対論入門

8.3 弱い重力場でのアインシュタイン方程式 (要約)

近似的ローレンツ座標系 p.244~

弱い重力場では $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$, $|h_{\alpha\beta}| \ll 1$ とする
 近似的ローレンツ座標系 \bar{x}^μ を用いて、それらの間の座標変換に
 {バックグラウンドのローレンツ変換
 ゲージ変換} がある。

物理的結果は座標系によらないから、このようにメトリックの簡単な座標系を用いよう。

バックグラウンドのローレンツ変換 p.245~

特殊相対論のローレンツ変換の行列 (Λ^α_β) を用いて $x^\mu = \Lambda^\mu_\alpha \bar{x}^\alpha$ とする。このとき
 $g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})$
 $= \eta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} + \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta h_{\mu\nu}$ が近似的ローレンツ座標系
 のメトリック $g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = \eta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} + h_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$ になるためには、
 特殊相対論のテンソルの変換則の形で
 $h_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \equiv \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta h_{\mu\nu}$ と定義すればよい。

ゲージ変換 p.246~

$|\xi^\alpha, \beta| \ll 1$ とする適当なベクトル ξ^α を選んで $x^\alpha = \bar{x}^\alpha + \xi^\alpha(\bar{x}^\beta)$ と変換すると
 $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \rightarrow g_{\alpha'\beta'} = \eta_{\alpha'\beta'} + h_{\alpha'\beta'}$ において
 $h_{\alpha'\beta'} \equiv h_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha} \iff (8.22)$ とおくと、これは微小だから別の近似的ローレンツ系の変換(ゲージ変換)になる。
 (8.22)は正しいテンソル方程式ではないが、両辺の添字で
 フォームの有無がそろっていないのは問題ない。

リーマン・テンソル p.247~

近似的ローレンツ系での $h_{\mu\nu}$ の1次の範囲での表式は
 (8.25): $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2} (h_{\alpha\delta,\beta\gamma} + h_{\beta\gamma,\alpha\delta} - h_{\alpha\gamma,\beta\delta} - h_{\beta\delta,\alpha\gamma})$ であり、その値はゲージ変換で変化する。

弱い場でのアインシュタイン方程式 p.248~

- バックグラウンドのローレンツ変換に限れば $h_{\alpha\beta}$ は特殊相対論のテンソルだから、全ての量の添字の上げ下げを $\{\eta_{\mu\nu}\}, \{\eta^{\mu\nu}\}$ で行うことにする。ゲージ変換は座標変換とは見なせず、ゲージ変換を行ってもこのことは変わらない。
- $\bar{h}^{\alpha\beta} \equiv h^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} h$: (8.29) (ただし $h = h^\alpha_\alpha$) が4つのローレンツ・ゲージ条件 $\bar{h}^{\mu\nu},{}_{,\nu} = 0$: (8.33) を満たすような系では、 $G^{\alpha\beta} \approx -\frac{1}{2} \square \bar{h}^{\alpha\beta}$: (8.41) で簡単になり、アインシュタイン方程式 (8.10): $G^{\alpha\beta} = 8\pi T^{\alpha\beta}$ は線形理論の場の方程式 (8.42): $\square \bar{h}^{\mu\nu} = -16\pi T^{\mu\nu}$ になる ($h_{\mu\nu}$ の1次までで正しいから線形理論)。
- このような系に移るには、元の近似的ローレンツ系での $\bar{h}_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu}^{(old)}$ に対する非斉次の波動方程式 (8.36): $\square \xi^\mu = \bar{h}^{(old)\mu\nu},{}_{,\nu}$ の1つの解 ξ^μ をとって $x^{\alpha'} = x^\alpha + \xi^\alpha(x^\beta)$ とゲージ変換すればよい。

8.31について

- 逆行列の成分の式 (8.21) の導出は 8.6 練習問題4.
- (*) $(I+A)^{-1} = I - A + A^2 - A^3 + \dots$ は等比級数求和の公式 $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$ の一般化である。
- (a) (i) $|A_{ij}| \leq a$ に対して $an \ll 1$
 $(I - A + A^2 - A^3 + \dots)_{ij}$
 $= \delta_{ij} - A_{ij} + \underbrace{A_{ik}A_{kj}}_{n\text{項の和}} - \underbrace{A_{ik}A_{kl}A_{lj}}_{n^2\text{項の和}} + \dots$: (*)
 $|(*)| \leq 1 + a + a^2 n + a^3 n^2 + \dots$
 $= 1 + a \{ 1 + an + (an)^2 + \dots \}$ とおきおさすと、
 最右辺は $an \ll 1$ だから収束する。
- (ii) $(I+A)(I-A+A^2-A^3+\dots)$
 $= I - A + A^2 - A^3 + \dots$
 $+ A - A^2 + A^3 - \dots = I$ (i), (ii) と (*) の積
- (b) $A \equiv (\xi^\alpha, \beta)$ とすると
 $(\Lambda^\alpha_{\beta'}) = (\Lambda^\alpha_\beta)^{-1} = (I+A)^{-1}$
 $\bar{h}^{\alpha\beta} = I - A + A^2 - \dots$ であり、その成分は
 $\delta^\alpha_\beta - \xi^\alpha, \beta + O(|\xi^\alpha, \beta|^2)$

8.31について 続き

(8.22) 1行上「微小量の1次まで」を考へる、とは、

{ξ^{μ,α}}, {h_{μν}} の1次まで「この意味で、

$$\begin{aligned}
g_{\alpha\beta}' &= \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} \Lambda^{\nu}{}_{\beta} g_{\mu\nu} \simeq (\delta^{\mu}_{\alpha} - \xi^{\mu}{}_{\alpha})(\delta^{\nu}_{\beta} - \xi^{\nu}{}_{\beta})(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) \\
&\simeq \delta^{\mu}_{\alpha} \delta^{\nu}_{\beta} (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) - \delta^{\mu}_{\alpha} \xi^{\nu}{}_{\beta} \eta_{\mu\nu} - \delta^{\nu}_{\beta} \xi^{\mu}{}_{\alpha} \eta_{\mu\nu} \\
&= \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha\beta} - \xi_{\beta\alpha} : (8.22) \text{ とおけばよい。}
\end{aligned}$$

p.247 8.4.5 「その類似性」については8.6節の練習問題11で扱おう。 $A_{\mu} = (-\phi, A)$

→ $A_{\mu} + X_{,\mu} = (-\phi + \partial_{\mu}\chi, A + \nabla_{\mu}\phi)$ は

(8.24): $h_{\alpha\beta} \rightarrow h_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha}$ と類似して、

ローレンツ・ゲージ条件も $A^{\mu}{}_{,\mu} = 0$ とおくと

(8.33): $\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$ と類似してある。

リ-マン-テンソルで $h_{\mu\nu}$ の1次までとした式(8.25)の確認。

$$\begin{aligned}
R_{\alpha\beta\gamma\nu} &= g_{\alpha\lambda} R^{\lambda}{}_{\beta\gamma\nu} \\
&= g_{\alpha\lambda} (\Gamma^{\lambda}{}_{\beta\nu,\gamma} - \Gamma^{\lambda}{}_{\beta\gamma,\nu} + \Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\mu} \Gamma^{\sigma}{}_{\beta\nu} - \Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\nu} \Gamma^{\sigma}{}_{\beta\mu})
\end{aligned}$$

定義式(6.63) において、

$$\begin{aligned}
(\Gamma^{\lambda}{}_{\beta\nu} \equiv) g_{\alpha\lambda} \Gamma^{\lambda}{}_{\beta\nu} &= \frac{1}{2} (g_{\alpha\beta,\nu} + g_{\alpha\nu,\beta} - g_{\beta\nu,\alpha}) \\
&= \frac{1}{2} (h_{\alpha\beta,\nu} + h_{\alpha\nu,\beta} - h_{\beta\nu,\alpha}) \text{ は、したがって}
\end{aligned}$$

{Γ^λ_{σμ}} は $h_{\mu\nu}$ の1次まで。

$$\begin{aligned}
R_{\alpha\beta\gamma\nu} &\simeq g_{\alpha\lambda} (\Gamma^{\lambda}{}_{\beta\nu,\gamma} - \Gamma^{\lambda}{}_{\beta\gamma,\nu}) \\
&= \frac{1}{2} \{ (h_{\alpha\beta,\nu\gamma} + h_{\alpha\nu,\beta\gamma} - h_{\beta\nu,\alpha\gamma}) \\
&\quad - (h_{\alpha\beta,\gamma\nu} + h_{\alpha\nu,\beta\gamma} - h_{\beta\gamma,\alpha\nu}) \} : (8.25)
\end{aligned}$$

8.6節 練習問題5

(a) $h_{\alpha\beta} = \xi_{\alpha,\beta} + \xi_{\beta,\alpha}$ に対し $R_{\alpha\beta\gamma\nu}$ の式(8.25)より

$$\begin{aligned}
R_{\alpha\beta\gamma\nu} &= (\xi_{\alpha,\nu} + \xi_{\nu,\alpha})_{,\beta\gamma} + (\xi_{\beta,\nu} + \xi_{\nu,\beta})_{,\alpha\gamma} \\
&\quad - (\xi_{\alpha,\mu} + \xi_{\mu,\alpha})_{,\beta\nu} - (\xi_{\beta,\mu} + \xi_{\mu,\beta})_{,\alpha\nu} = 0
\end{aligned}$$

(b) ゲージ変換で $h_{\alpha\beta} \rightarrow h'_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \Delta h_{\alpha\beta}$,

$\Delta h_{\alpha\beta} \equiv \xi_{\alpha,\beta} + \xi_{\beta,\alpha}$ とおくと、

$$\begin{aligned}
R'_{\alpha\beta\gamma\nu} &= (8.25)|_{h_{\alpha\beta}=h'_{\alpha\beta}} \\
&= (8.25) + (8.25)|_{h_{\alpha\beta}=\Delta h_{\alpha\beta}} \\
&= (8.25) = R_{\alpha\beta\gamma\nu} \text{ となる。リ-マン-テンソル} \\
&\text{(a) の成分の値は変化したくない。}
\end{aligned}$$

(8.24): $\bar{h}^{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} h$ は
 $G^{\alpha\beta} = R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R$ に類似してある。

$\bar{h}^{\alpha}{}_{\beta}$ の1行上の式(8.30)の確認。

$$\begin{aligned}
\bar{h}^{\alpha}{}_{\gamma} &= \eta^{\beta\gamma} \bar{h}^{\alpha\beta} = \eta^{\beta\gamma} (h^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} h) \\
&= h^{\alpha}{}_{\gamma} - \frac{1}{2} \delta^{\alpha}_{\gamma} h \text{ となる。} \\
\bar{h} &\equiv \bar{h}^{\alpha}{}_{\alpha} = h - \frac{1}{2} \cdot 4h = -h : (8.30)
\end{aligned}$$

(8.31) ⇔ $\bar{h}^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \bar{h}$ は、これは

(8.29) ⇔ $\bar{h}^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} h$ と両立した条件から(8.30): $\bar{h} = -h$ とおくと成立する。と分かる。

$h_{\mu\nu}$ の1次までとしたラインダマン-テンソルの式(8.32)の確認。

$$\begin{aligned}
G_{\alpha\beta} &= R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} R + O(h_{\alpha\beta}^2) \text{ において} \\
R_{\alpha\beta} &\equiv R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta} = g^{\mu\nu} R_{\nu\alpha\mu\beta} \text{ (定義式(6.91))} \\
&= \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} (h_{\nu\beta,\alpha\mu} + h_{\alpha\mu,\nu\beta} - h_{\nu\mu,\alpha\beta} - h_{\alpha\beta,\nu\mu}) + O(h_{\alpha\beta}^2) \\
&\quad (\because (8.25)) \\
&= \frac{1}{2} (h_{\nu\beta,\alpha}{}^{\mu} + h_{\alpha\mu,\nu}{}^{\beta} - h_{\nu\mu,\alpha}{}^{\beta} - h_{\alpha\beta,\nu}{}^{\mu}) + O(h_{\alpha\beta}^2)
\end{aligned}$$

おおよそ $R \equiv g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta\mu\nu} : (6.92)$

$$\begin{aligned}
&= \eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} \frac{1}{2} (h_{\alpha\nu,\mu\beta} + h_{\mu\beta,\alpha\nu} - h_{\alpha\beta,\mu\nu} - h_{\mu\nu,\alpha\beta}) + O(h_{\alpha\beta}^2) \\
&\quad (\because (8.25)) \\
&= \frac{1}{2} (h_{\alpha\nu}{}^{\mu\beta} + h_{\mu\beta}{}^{\alpha\nu} - h_{\mu}{}^{\alpha}{}^{\beta} - h_{\alpha}{}^{\mu}{}^{\nu}) + O(h_{\alpha\beta}^2) \\
&\quad (\because \eta^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} = h) \\
&= (h_{\mu\nu}{}^{\mu\nu} - h_{\mu}{}^{\mu}) + O(h_{\alpha\beta}^2) \text{ となる。}
\end{aligned}$$

(最右で $g^{\alpha\beta}$ の添字に α, β を用いた。→ μ, ν は μ, ν)

$$\begin{aligned}
G_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (h_{\nu\beta,\alpha}{}^{\mu} + h_{\alpha\mu,\nu}{}^{\beta} - h_{\nu\mu,\alpha}{}^{\beta} - h_{\alpha\beta,\nu}{}^{\mu}) \\
&\quad - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} (h_{\mu\nu}{}^{\mu\nu} - h_{\mu}{}^{\mu}) + O(h_{\alpha\beta}^2)
\end{aligned}$$

ここで $\eta_{\alpha\beta}, \eta_{\alpha\beta}$ は対称のため、(8.12):

$$\begin{aligned}
g_{\alpha\beta} &= \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \text{ における } h_{\alpha\beta} \text{ も対称であることに注意して、} \\
&\text{これは ((8.32) 左辺)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} [(h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} h)_{,\mu}{}^{\mu} + \eta_{\alpha\beta} (h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h)_{,\mu}{}^{\nu} \\
&\quad - (h_{\alpha\mu} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\mu} h)_{,\beta}{}^{\mu} - (h_{\beta\mu} - \frac{1}{2} \eta_{\beta\mu} h)_{,\alpha}{}^{\mu}] + O(h_{\alpha\beta}^2)
\end{aligned}$$

に一致しているのが分かる。

シュン 相対論入門

8.3 1. へて 続き

- ゲージ変換後の $\bar{h}_{\mu\nu}$ の式 (8.34) の確認は 8.6 節の練習問題 12 である。

$$\begin{aligned} h_{\alpha\beta}^{(new)} &= \eta^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}^{(new)} = \eta^{\alpha\beta} (h_{\alpha\beta}^{(old)} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha}) \text{ に注意し} \\ \bar{h}_{\mu\nu}^{(new)} &= h_{\mu\nu}^{(new)} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h^{(new)} \\ &= (h_{\mu\nu}^{(old)} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu}) - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} (h_{\alpha\beta}^{(old)} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha}) \\ &= (h_{\mu\nu}^{(old)} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h^{(old)}) - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} + \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} (\xi^{\rho,\rho} + \xi^{\alpha,\alpha}) \\ &= \bar{h}_{\mu\nu}^{(old)} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} + \eta_{\mu\nu} \xi^{\alpha,\alpha} : (8.34) \end{aligned}$$

- その散度 (8.35) は

$$\begin{aligned} \bar{h}^{(new)\mu\nu}_{;\nu} &= (\bar{h}^{(old)\mu\nu} - \xi^{\mu,\nu} - \xi^{\nu,\mu} + \eta^{\mu\nu} \xi^{\alpha,\alpha})_{;\nu} \\ &= \bar{h}^{(old)\mu\nu}_{;\nu} - \xi^{\mu\nu}_{;\nu} - \xi^{\nu\mu}_{;\nu} + \xi^{\mu\nu}_{;\nu} \text{ として得る。} \end{aligned}$$

- ゲージ条件の表現 (8.37): $\square f = f^{\mu}_{;\mu}$ は、 $f^{\mu}_{;\mu} = \partial^{\mu} \partial_{\mu} f$ と書き直して分かりやすい。

- (8.41): $G^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \square \bar{h}^{\alpha\beta}$ の確認。

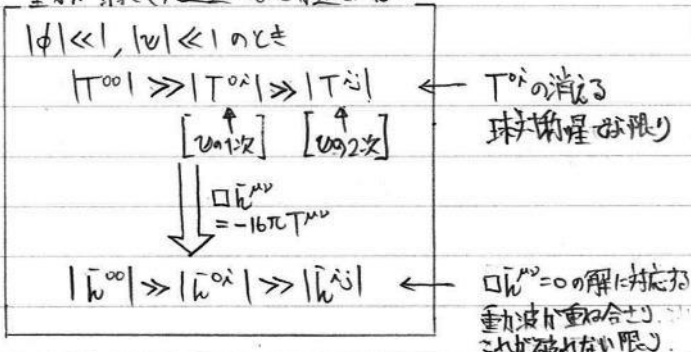
その行上式 (8.6) は、 $h_{\mu\nu}$ の 1 次までとした $G_{\alpha\beta}$ の式 (8.32) の逆で、その右辺は ローレンツ・ゲージ条件 (8.33)

$\Leftrightarrow \bar{h}_{\mu\nu}{}^{;\nu} = 0$ が満たれるとき、第 1 項だけが残って $G_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \bar{h}_{\alpha\beta}{}^{;\mu}{}_{;\mu} = -\frac{1}{2} \square \bar{h}_{\alpha\beta}$ となる。

8.4 ニュートン重力場 (要点)

ニュートンの極限 p.250 ~

重力が弱く光速近くまで加速しない



このとき $k = 8\pi$ 以下のシュン方程式を線形化した

$\square \bar{h}^{\mu\nu} = -16\pi T^{\mu\nu}$ の $(\mu, \nu) = (0, 0)$ 成分がシュン方程式

$\nabla^2 \phi = 4\pi\rho$ となるように $\{\bar{h}^{\alpha\beta}\}$ をおいてメトリックを定めた

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} -(1+2\phi) & & & \\ & 1-2\phi & & \\ & & 1-2\phi & \\ & & & 1-2\phi \end{pmatrix} \text{ となることを示す。}$$

7.2 節で、このメトリックからニュートン理論を導いた。

ニュートン重力を超える補正項に由来する

ホスト・ニュートン効果

太陽系 水星の近日点移動・太陽にお光の曲り
その他 遠星 1000 光年の軌道の縮み

定常な相対論的動源の遠距離場 p.252 ~

局所的な重力源の遠方のメトリックも、重力が弱くても

弱くても導いた $(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -(1+2\phi) & & & \\ & 1-2\phi & & \\ & & 1-2\phi & \\ & & & 1-2\phi \end{pmatrix}$ となる

これは対称性を考えるにしても相対論的動源に対する

ニュートンポテンシャル ϕ は不明である。

しかし遠方で重力が弱く、また重力源がない ($T^{\mu\nu} = 0$)

ため $\square \bar{h}^{\mu\nu} = 0$ であることは正しく、定常的な場 ($\partial_t = 0$)

を考え $\nabla^2 \bar{h}^{\mu\nu} = 0$ とする。

$|\bar{h}^{00}| \gg |\bar{h}^{0i}|, |\bar{h}^{ij}|$ が導かれる。

よって (8.57): $(\phi)_{\text{eff}} = -\frac{1}{4} (\bar{h}^{00})_{;\mu}{}^{;\mu}$

と定義すれば $(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -(1+2\phi) & & & \\ & 1-2\phi & & \\ & & 1-2\phi & \\ & & & 1-2\phi \end{pmatrix} \Big|_{\phi = \phi_{\text{eff}}}$

となる。(eff): (相対論的) 重力源の遠方
relativistic for field

相対論的物体の質量の定義 p.254 ~

- 遠方のテスト物体が感じる場

$$(\phi)_{\text{eff}} \stackrel{(8.57)}{\approx} -\frac{1}{4} (\bar{h}^{00})_{;\mu}{}^{;\mu} \stackrel{(8.52)}{\approx} -\frac{A^{00}/4}{r}$$

が、質量 M のニュートン的な重力源の作るポテンシャル $\phi = -\frac{M}{r}$ のようになる。

相対論的動源の全質量 M を $A^{00}/4$ で定義する

(動源を構成する粒子の質量の総和ではなく)。

- M を定義するのに用いた上式は場が定常であることから導かれたが、弱い重力波や重力波の到達前で妥当。

8.4 (1) について

$h^{\alpha\beta}$ の式 (8.43), (8.44) の確認。

$$\bar{h}^{\alpha\beta} \equiv h^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} h \stackrel{(8.47)}{=} h^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \bar{h}^{\alpha\alpha} \quad (8.47)$$

$$h^{\alpha\beta} = \bar{h}^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \bar{h}^{\alpha\alpha}$$

$$\begin{cases} (1 + \frac{1}{2} \eta^{\alpha\alpha}) \bar{h}^{\alpha\alpha} = \frac{1}{2} \bar{h}^{\alpha\alpha} - 2\phi & (\alpha=\beta=0) \\ \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \bar{h}^{\alpha\alpha} = -2\phi & (\alpha=\beta=1, 2, 3) \\ 0 & (\text{非対角成分に対して}) \end{cases}$$

$\alpha=\beta=0, 1, 2, 3$
について

したがって (8.46): $\bar{h}^{\alpha\alpha} = -4\phi$ を用いた。

よって (8.50) の $g_{\alpha\beta}$ を

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} = \begin{cases} -1 + (-2\phi) = -(1+2\phi) & (\alpha=\beta=0) \\ 1 + (-2\phi) = 1-2\phi & (\alpha=\beta=1, 2, 3) \\ 0 + 0 = 0 & (\text{非対角成分に対して}) \end{cases}$$

と得る。

(8.52): $\bar{h}^{\mu\nu} = \frac{\Delta^{\mu\nu}}{r} + O(r^{-2})$ における $\frac{1}{r}$ は調和関数で

$$\nabla^2 \bar{h}^{\mu\nu} = O(r^{-4})$$

Newton 的重力源遠方のポテンシャル (8.58):

$$\phi \approx -\frac{M}{r} = -\frac{GM}{r} \quad \text{は重力場}$$

$$-\frac{d\phi}{dr} = -\frac{GM}{r^2} \quad \text{を導く。}$$

9 重力波

8.3 節の復習

重力場が弱く、ある座標系でメトリックが

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \quad |h_{\alpha\beta}| \ll 1$$

となる場合を考える。座標変換を行うとメトリックも変換されるけれど、新しい座標系のメトリックも上と同じ条件を満たすような一連の座標変換が存在する。これらが重力場のゲージ変換を成す。実際、 $x^\alpha \rightarrow x'^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha$ という座標変換に対して $h_{\alpha\beta}$ は

$$h_{\alpha\beta} \rightarrow h_{\alpha\beta}^{(\text{new})} = h_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha}$$

と変化するので、 $|\xi^\alpha_{,\beta}|$ が十分小さいようなゲージ関数 ξ^α を用いて変換を行えば良い。

そのような変換によって結ばれる無数の近似的 Lorentz 座標系の中に、

$$\bar{h}^{\alpha\beta} \equiv h^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}h \quad (\text{ただし } h \equiv h^\alpha_\alpha)$$

が Lorenz ゲージ条件

$$\bar{h}^{\mu\nu}_{,\nu} = 0$$

を満たすものが存在する。実際、ゲージ変換 $x^\alpha \rightarrow x'^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha$ に対して

$$\bar{h}^{\mu\nu}_{,\nu} \rightarrow \bar{h}^{(\text{new})\mu\nu}_{,\nu} = \bar{h}^{\mu\nu}_{,\nu} - \xi^{\mu,\nu}_{,\nu}$$

となるので、

$$\xi^{\mu,\nu}_{,\nu} = \square\xi^\mu = \bar{h}^{\mu\nu}_{,\nu}$$

の解 ξ^μ を用いてゲージ変換を行えば、新しい座標系の $\bar{h}^{\mu\nu}$ はゲージ条件 $\bar{h}^{(\text{new})\mu\nu}_{,\nu} = 0$ を満たす。

Lorenz ゲージの下では、線形化された Einstein 方程式は源の項を持つ波動方程式

$$\square\bar{h}^{\mu\nu} = -16\pi T^{\mu\nu}$$

に簡略化される。

9.1 重力波の伝播

重力源の遠方の真空中 ($T^{\alpha\beta} = 0$) における、弱い非定常的な重力場を考える。Lorenz ゲージ条件 (8.33): $\bar{h}^{\alpha\beta}_{,\beta} = 0$ の下での線形理論での場の方程式 (Einstein 方程式)(8.42):

$$\square\bar{h}^{\alpha\beta} = 0 \quad \left(\bar{h}^{\alpha\beta} \equiv h^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}h, h \equiv h^\alpha_\alpha \right)$$

は平面波解

$$\bar{h}^{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}), \quad \vec{k}^2 = 0$$

を持つ。ゲージ条件 $\bar{h}^{\alpha\beta}_{,\beta} = 0$ は複素定数 $A^{\alpha\beta}$ に対する制限

$$A^{\alpha\beta}k_\beta = 0$$

を与える。[ここで振幅 $A_{\alpha\beta}$ は添字に関して対称でなければならないことにも注意しよう。]

トランスバース-トレースレスゲージ (p.265～)

Lorenz ゲージをとるにはゲージ関数 ξ^μ を

$$\square \xi^\mu = \bar{h}^{\mu\nu},{}_{,\nu}$$

の解にとってゲージ変換を行えば良く、そのような ξ^μ には斉次の波動方程式 $\square \xi^\mu = 0$ の平面波解

$$\xi_\alpha = B_\alpha \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x})$$

を加える任意性がある。これは Lorenz ゲージの下でもなお、Lorenz ゲージ条件を壊すことなく、ゲージ関数 $\xi_\alpha = B_\alpha \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x})$ を用いてゲージ変換を行う自由度が残されていることを意味する。この自由度を利用し、振幅に対するゲージ条件

$$A^{\alpha\beta} k_\beta = 0$$

に加えてさらに条件

$$A^\alpha{}_\alpha = 0, \quad A_{\alpha\beta} U^\beta = 0$$

を課することができる (\vec{U} は任意の時間的な定数単位ベクトル)。以上の一連の条件をトランスバース-トレースレス (TT) ゲージ条件という。

ここでさらにバックグラウンドの Lorentz 変換を行い、 $U^\beta = \delta^\beta_0$ となる座標系をとる。その上で波の伝播方向を z に選ぶ (このとき $\vec{k} = (\omega, 0, 0, \omega)$)。すると

- 第 2 の条件 $A_{\alpha\beta} U^\beta = 0$ は $A_{\alpha 0} = 0$ を意味する。
Lorenz 条件 $A^{\alpha\beta} k_\beta = 0$ と合わせると $A_{\alpha z} = 0$ となる。
[あるいは基底ベクトル $\vec{e}_z = (0, 0, 0, 1)$ に対して $A_{\alpha\beta} (\vec{e}_z)^\beta = 0$ であり、]
この意味で $A_{\alpha\beta}$ は波の伝播方向 \vec{e}_z に直交する (“トランスバース” の語源)。
- 第 1 の条件 $A^\alpha{}_\alpha = 0$ がトレースレスの条件である。
以上の下でトレースレスの条件は $A_{xx} = -A_{yy}$ を意味する。

[最後に $A_{\alpha\beta}$ が添字に関して対称であることを考慮すると、] 我々の座標系で $A_{\alpha\beta}$ は

$$(A_{\alpha\beta}^{\text{TT}}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{xx} & A_{xy} & 0 \\ 0 & A_{xy} & -A_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

という形を持つ。

「トランスバース-トレースレスゲージ (p.265～)」について

■式 (9.17) について 平面波解 (9.14): $\xi_\alpha = B_\alpha \exp(ik_\mu x^\mu)$ に対して $\partial_\beta \rightarrow ik_\beta$ と置き換わる。

■TT ゲージをとれることの証明—— 9.7 節の練習問題 5 ここでは簡単のため、 $A_{\alpha\beta}^{(\text{OLD})}$ と $A_{\alpha\beta}^{(\text{NEW})}$ をそれぞれ単に $A_{\alpha\beta}, A'_{\alpha\beta}$ と書く。

$$A'_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} - iB_\alpha k_\beta - iB_\beta k_\alpha + i\eta_{\alpha\beta} B^\mu k_\mu : (9.17).$$

(a) $A_{\alpha\beta}$ がゲージ条件 $A^{\alpha\beta}k_\beta = 0$ を満たすとき,

$$A'^{\alpha\beta}k_\beta = (A^{\alpha\beta} - iB^\alpha k^\beta - iB^\beta k^\alpha + i\eta^{\alpha\beta}B^\mu k_\mu)k_\beta = 0 \quad (\because k^\beta k_\beta = 0)$$

より式 (9.17) の $A'_{\alpha\beta}$ もこの条件を満たす.

(b) $A'_{\alpha\beta}$ が TT ゲージ条件 (9.18): $A^\alpha{}_\alpha = 0$ を満たすには, B^μ は制約条件

$$0 = A'^\alpha{}_\alpha = A^\alpha{}_\alpha + 2iB^\alpha k_\alpha \quad (\because \eta^\alpha{}_\alpha = \delta^\alpha{}_\alpha = 4)$$

を満たさなければならない.

(c) また TT ゲージ条件 (9.19): $A'_{\alpha\beta}U^\beta = 0$ は一見すると $\alpha = 0, 1, 2, 3$ の 4 つの条件を B^μ に課すように考えられるけれど, 実際には $A'_{\alpha\beta}U^\beta$ の線形結合 $k^\alpha A'_{\alpha\beta}U^\beta$ について常に

$$k^\alpha A'_{\alpha\beta}U^\beta = k^\alpha (A_{\alpha\beta} - iB_\alpha k_\beta - iB_\beta k_\alpha + i\eta_{\alpha\beta}B^\mu k_\mu)U^\beta = 0 \quad (\because k^\alpha A_{\alpha\beta} = 0, k^\alpha k_\alpha = 0)$$

が成り立っているため, これは 3 つの制約条件である.

(d) B^μ に対する全問 (b),(c) の条件を合わせると,

$$\begin{aligned} 0 &= A'_{\alpha\beta}U^\beta = (A_{\alpha\beta} - iB_\alpha k_\beta - iB_\beta k_\alpha + i\eta_{\alpha\beta}B^\mu k_\mu)U^\beta, & (\text{条件 (c)}) \\ \therefore ik_\beta U^\beta B_\alpha + ik_\alpha U^\beta B_\beta &= A_{\alpha\beta}U^\beta + \frac{1}{2}A^\mu{}_\mu U_\alpha & (\text{条件 (b)}: B^\mu k_\mu = A^\mu{}_\mu/2) \end{aligned}$$

となる. 両辺に U^α を縮約し, \vec{U} が単位ベクトルであることを式 (2.28): $\vec{U} \cdot \vec{U} = -1$ の意味に解すと

$$2i(k_\beta U^\beta)(B_\alpha U^\alpha) = U^\alpha A_{\alpha\beta}U^\beta + \frac{1}{2}A^\mu{}_\mu$$

を得る. これを用いて上式の左辺第 2 項から $U^\beta B_\beta$ を消去すると

$$B_\alpha = \frac{1}{ik_\nu U^\nu} \left\{ A_{\alpha\beta}U^\beta - k_\alpha \frac{U^\gamma A_{\gamma\beta}U^\beta}{2k_\lambda U^\lambda} + \frac{1}{2}A^\mu{}_\mu \left(U_\alpha + \frac{k_\alpha}{4k_\lambda U^\lambda} \right) \right\}$$

と求まる. これ以上のゲージ自由度はない. [このように見かけ上 B_α が求まっているにも関わらず, B_α は複素ベクトルなので, TT ゲージ条件 (9.18),(9.19) から得られた (b),(c) の 1 + 3 = 4 つの条件で完全には決まらないはずである. 実際, この後「重力波の偏り」(p.272) のノートで見ると, TT ゲージの範囲内で z 軸周りの空間回転を行うことができる.]

(e) 以上より全問 (d) で求めた B_α に対してゲージ関数 (9.14): $\xi_\alpha = B_\alpha \exp(ik_\mu x^\mu)$ を用いて座標変換 (ゲージ変換) を行えば, 新しい座標系では TT ゲージ条件が満たされる.

(f) 静的な場合 $\omega = 0$ に対しては

$$\vec{k}^2 = 0, \quad \therefore \mathbf{k}^2 = 0, \quad \therefore \vec{k} = 0$$

より分母の $k_\nu U^\nu$ がゼロになるため, 以上の議論を適用できず, TT ゲージをとれる保証はなくなる.

■式 (9.20) について TT ゲージ条件 (9.18): $A^\alpha{}_\alpha = 0$ の下で平面波解 $\bar{h}^{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta} \exp(ik_\mu x^\mu)$ は

$$\bar{h} \equiv \bar{h}^\alpha{}_\alpha = A^\alpha{}_\alpha \exp(ik_\mu x^\mu) = 0, \quad \therefore h_{\alpha\beta} = \bar{h}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\bar{h} = \bar{h}_{\alpha\beta} : (9.20)$$

を満たす.

自由粒子に対する波の影響 (p.267～)

z 方向に伝わる波の各平面波成分は前節における式 (6) の形の振幅 $A_{\alpha\beta}^{\text{TT}}$ を持つから、その重ね合せとして得られる波もまた 2 つだけの独立成分 $h_{xx}^{\text{TT}}, h_{xy}^{\text{TT}}$ を持つ。はじめに波のない時空領域にいた粒子がそのような重力波と出会う場合を考える。粒子がはじめ静止しているようなローレンツ系を選び、この系に対する TT ゲージをとる。すると TT ゲージを定義するベクトル $\vec{U} = (1, 0, 0, 0)$ は粒子の初期の 4 元速度に一致する。このとき

1. TT ゲージの座標系では自由粒子の空間座標は一定にとどまること
2. 一方はじめに $(x, y, z) = (0, 0, 0), (\varepsilon, 0, 0)$ にいた近接する 2 つの自由粒子間の固有距離は

$$\Delta l \simeq \left[1 + \frac{1}{2} h_{xx}^{\text{TT}}(x=0) \right] \varepsilon \quad (7)$$

にしたがって変化すること

が示される。第 2 の点は座標系に依らない幾何学的な意味を持ち、重力波 $h_{\mu\nu}$ が固有距離の測定によって捉えられることを意味している。またこれによれば

- 重力波による距離の変化は ε に比例して大きくなるから、重力波を検出するには初期の隔たり ε の大きい巨大な装置が必要とされる。
- 重力波の影響は h_{ij}^{TT} に比例しており、これは典型的には 10^{-21} 以下にすぎない (9.3 節)。[これは固有距離の変化を ε で無次元化した量に対応している.]

潮汐加速度：重力波による力 (p.268～)

引き続き“自由落下”している 2 粒子を考え、それらを結ぶベクトル $\vec{\xi}$ をとる。また $\vec{\xi}$ の一端における局所慣性系を採用すると、連結ベクトル $\vec{\xi}$ に対する測地線偏差の方程式 (6.87): $\nabla_U \nabla_U \xi^\alpha = R^\alpha_{\mu\nu\beta} U^\mu U^\nu \xi^\beta$ (ただし \vec{U} は $\vec{\xi}$ の一端にある粒子の測地線の接ベクトル) は $h_{\mu\nu}$ の 1 次までの近似で

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \xi^\alpha = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi^\alpha = \varepsilon R^\alpha_{00x} = -\varepsilon R^\alpha_{0x0}$$

となる。ここで右辺のリーマン・テンソルはゲージ不変である [8.6 節の練習問題 5(本稿次節で扱う)]. [よって左辺の座標距離 ξ^α もまた不変でなければならず,] ξ^α は固有距離と見なすことができる。[これは局所慣性系を利用していることから期待される結論である.]

TT ゲージにおけるリーマン・テンソルの成分を計算すると、これは

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi^x = \frac{1}{2} \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{xx}^{\text{TT}}, \text{ etc.}$$

となり、前節の固有距離の式 (7) と整合する。

「潮汐加速度：重力波による力 (p.268～)」について

■ 「リーマン・テンソルそのものはゲージ不変」 (p.269 下から 5 行目) について 8.6 節の練習問題 5 に従ってこのことを示そう。 $h_{\alpha\beta}$ のゲージ変換は式 (8.24):

$$h_{\alpha\beta} \rightarrow h'_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} + \delta h_{\alpha\beta}, \quad \delta h_{\alpha\beta} = -\xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha}$$

で与えられる。これに伴うリーマン・テンソル (8.25):

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}(h_{\alpha\nu,\beta\mu} + h_{\beta\mu,\alpha\nu} - h_{\alpha\mu,\beta\nu} - h_{\beta\nu,\alpha\mu})$$

の変化は

$$\begin{aligned} \delta R_{\alpha\beta\mu\nu} &= \frac{1}{2}(\delta h_{\alpha\nu,\beta\mu} + \delta h_{\beta\mu,\alpha\nu} - \delta h_{\alpha\mu,\beta\nu} - \delta h_{\beta\nu,\alpha\mu}) \\ &= -\frac{1}{2}(\xi_{\alpha,\nu\beta\mu} + \xi_{\nu,\alpha\beta\mu} + \xi_{\beta,\mu\alpha\nu} + \xi_{\mu,\beta\alpha\nu} - \xi_{\alpha,\mu\beta\nu} - \xi_{\mu,\alpha\beta\nu} - \xi_{\beta,\nu\alpha\mu} - \xi_{\nu,\beta\alpha\mu}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となって消えるので、リーマン・テンソルは(スカラーでないにも関わらず)ゲージ不変となる。

■TT ゲージのリーマン・テンソル (9.27) について リーマン・テンソル (8.25):

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}(h_{\alpha\nu,\beta\mu} + h_{\beta\mu,\alpha\nu} - h_{\alpha\mu,\beta\nu} - h_{\beta\nu,\alpha\mu})$$

のうち添字が1つでも z を含む成分は、右辺の各項が $h_{\alpha z}$ または $\partial_z h_{\alpha\beta}$ を含む形となるため、ゼロになる。次に添字の反対称性を考え合わせると、 $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ がゼロでない値を持つのは

$$(\alpha, \beta) = (x, 0), (y, 0), (x, y), \quad (\mu, \nu) = (x, 0), (y, 0), (x, y)$$

のいずれかの場合に限られる。さらに添字の対称性により、 $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ のゼロでない独立な成分の候補は

$$(\alpha, \beta, \mu, \nu) = (x, 0, x, 0), (x, 0, y, 0), (x, 0, x, y), (y, 0, y, 0), (y, 0, x, y), (x, y, x, y)$$

に限られる。そこでこれらの成分を具体的に計算すると

$$R_{x0x0} = -\frac{1}{2}h_{xx,00}, \quad R_{x0y0} = -\frac{1}{2}h_{xy,00}, \quad R_{y0y0} = -\frac{1}{2}h_{yy,00}$$

を確かめられる。また「その他の成分はゼロになる」(p.270, 1.12) とあるけれど、残りの

$$\begin{aligned} R_{x0xy} &= \frac{1}{2}(h_{xy,0x} - h_{xx,0y}), \\ R_{y0xy} &= -\frac{1}{2}(h_{xx,0x} + h_{xy,0y}), \\ R_{xyxy} &= \frac{1}{2}(2h_{xy,xy} - h_{xx,yy} + h_{xx,xx}) \end{aligned}$$

も一般にはゼロにならないと考えられる。

空間ののびを測る (p.270~)

重力波により空間がのぼされるともの差しのぼされるから、空間ののびはもの差しでは測定できないのではないかという疑問が生じ得る。これには次のように答えられる。

もの差しを構成している原子は自由粒子ではなく、近くの原子から電気的な力を受けているので、もの差しは、重力による潮汐力が内部の結合力と比べてどれほど大きいかによってそののび方が変化する。ふつう、重力は電気的な力に比べて非常に弱いので、もの差しは実際にはまったくのびることがない。したがってもの差しを使って、接近した自由粒子が潮汐力によって受ける変位を測定できるのである。つまり「空間ののび」を測定できることになる。

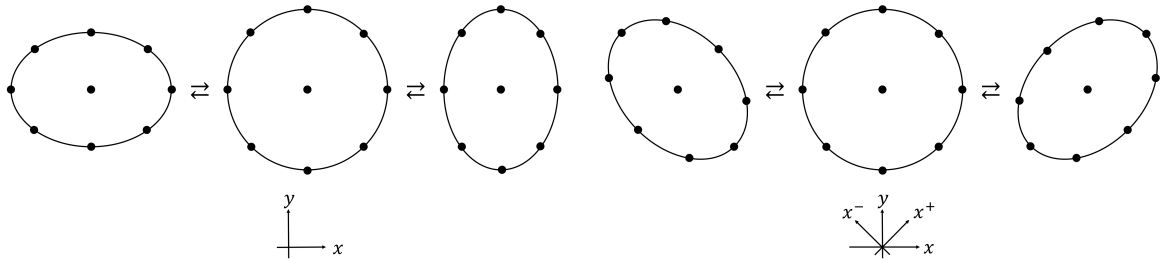


図 17 “+” 偏りを持つ重力波による固有距離の変化

図 18 “×” 偏りを持つ重力波による固有距離の変化

この点を解析的に表現するには、測地線偏差の式 $\frac{d^2}{dt^2}\xi^\alpha = R^\alpha_{\mu\nu}U^\mu U^\nu \xi^\beta$ に基づくのが便利である。これによれば重力の押す力 (潮汐力) による加速度は

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\xi^i = -R^i_{0j0}\xi^j$$

と表される。連結ベクトル $\vec{\xi}$ の始点と終点の粒子 A,B(質量 m_A, m_B) にそれぞれ重力とは別の力 F_A^i, F_B^i が作用している場合、運動方程式は

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\xi^i = -R^i_{0j0}\xi^j + \frac{1}{m_B}F_B^i - \frac{1}{m_A}F_A^i$$

と修正すれば良い。このように固有距離の式 (7) とは対照的に、測地線偏差の式は別の力が働く場合へと拡張できるという意味で、「粒子が自由粒子なのかそうでないのかを問わない」(p.268 下から 3 行目)。

重力波の偏り (p.272)

重力波 $h_{\mu\nu}$ の TT ゲージにおける独立な 2 成分 h_{xx}, h_{xy} のうち、 h_{xx} の寄与

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\xi^x = \frac{1}{2}\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2}h_{xx}, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2}\xi^y = -\frac{1}{2}\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2}h_{xx}$$

は図 17 のような固有距離の変動に対応する。

一方、 h_{xy} の寄与

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\xi^x = \frac{1}{2}\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2}h_{xy}, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2}\xi^y = \frac{1}{2}\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2}h_{xy} \quad (8)$$

は図 18 のような固有距離の変動に対応し、これは図 17 のパターンを 45 度回転したものになっている。

「重力波の偏り (p.272)」について

図 18 のように x 軸、 y 軸と 45 度を成す x^\pm 方向成分

$$\begin{pmatrix} \xi^+ \\ \xi^- \end{pmatrix} = R(-45^\circ) \begin{pmatrix} \xi^x \\ \xi^y \end{pmatrix}, \quad R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \therefore \xi^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi^y \pm \xi^x)$$

を導入すると、 $h_{xx} = 0, h_{xy} \neq 0$ のときのメトリックの x^\pm 軸に関する成分は、2 階共変テンソルの変換則より

$$\begin{pmatrix} h_{++} & h_{+-} \\ h_{-+} & h_{--} \end{pmatrix} = R(+45^\circ)^T \begin{pmatrix} 0 & h_{xy} \\ h_{xy} & 0 \end{pmatrix} R(+45^\circ) = R(-45^\circ) \begin{pmatrix} 0 & h_{xy} \\ h_{xy} & 0 \end{pmatrix} R(+45^\circ) = \begin{pmatrix} h_{xy} & 0 \\ 0 & -h_{xy} \end{pmatrix}$$

となる。これは $h_{xx} \neq 0, h_{xy} = 0$ のときのメトリックの xy 座標系に関する成分と同じ形をしているから、重力波の偏りは図 17 の振動状態を 45 度回転させたパターンになることが分かる。

実際、上の結果より固有距離の式をあからさまに書くと

$$ds^2 = -dt^2 + (1 - h_{xy})dx_+^2 + (1 + h_{xy})dx_-^2 + dz^2$$

となり、ここから図 18 のように x^\pm 方向の固有距離が伸びている瞬間には x^\mp 方向の固有距離が縮むことが見て取れる。

このように $h_{\mu\nu}$ は 2 階共変テンソルとして変換されることを考慮しなければならず、上式 (8) の両辺を単純にベクトル成分と見て線形結合

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{xy}, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi^- = 0$$

を作っても、図 18 のような振動状態が導かれないのはこのためであると考えられる。

平面波の厳密解 (p.272~)

省略する。

幾何光学：曲がった時空中の波動 (p.274~)

重力波 (メトリックのズレ $h_{\alpha\beta}$) が重力源によって作られる重力場 (メトリック $g_{\alpha\beta}$) の中を伝わる場合にも (全メトリック $g_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$)、 $h_{\alpha\beta}$ を摂動と扱うことで同様に解析できる。その結果は定性的には、電磁波が複雑な媒質中を運動する場合と非常に似たものとなる。

電磁波に対する幾何光学近似と同様に、重力波も波長と振動周期が十分短い場合にはヌル測地線 [光線軌道] を移動する。このとき重力レンズ効果によって集められるのは光だけでなく、重力波も収束して強度を増す。

ただし電磁波と比べて重力波は物質との相互作用が弱く、物質を通過する際、物質の影響をほとんど受けない。このため重力波は宇宙の遠方からの情報を我々にとどけてくれる。

9.2 重力波の検出

重力波の検出器として主に

- 質量共鳴型検出器 (バー型検出器)
 - 検出装置の基本的な仕組みは、
重力波を外力の項とする強制減衰調和振動子の式 (9.45) から説明される。
- レーザー干渉計

の説明がされているけれど、本稿では省略する。なおバー型検出器は主流でなくなりつつある。

9.2 について

■バー型検出器の運動方程式 (9.33), (9.34) について 図 9.2(p.279) の右向きを x 軸正の向きとすると、のびは $\xi = x_2 - x_1 - l_0$: (9.35) であり、運動方程式は式 (9.33), (9.34) の代わりに

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= k\xi - \nu\dot{x}_1, \\ m\ddot{x}_2 &= -k\xi - \nu\dot{x}_2 \end{aligned}$$

となると考えられる。しかしながらこれらを辺々引き、式 (9.35) の代わりに $\omega_0^2 = 2k/m, 2\gamma = \nu/m$:(9.35) とおくと (γ の定義が異なる), 式 (9.36):

$$\ddot{\xi} + 2\gamma\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = 0$$

が得られることに変わらない。式 (9.40), (9.41), (9.45) に対しても同様の指摘ができる。

9.3 重力波の発生

簡単な評価 (p.296)

質量 M の重力波の源からオーダー M の距離では、“強い”重力波は $h_{\mu\nu} = O(1)$ の振幅を持つ。重力波は遠方で r^{-1} のように小さくなるから、源から距離 R 離れた位置では振幅は M/R 程度に減衰している。これを具体的に評価すると、地球にやってくる重力波の振幅は非常に小さいことが分かる (例えば $M = 10M_\odot, R = 10^{23}\text{m}$ のとき $M/R \sim 10^{-17}$)。

遅い運動による波動の発生 (p.296~)

ローレンツ・ゲージの下での弱い重力波に対する方程式

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi T_{\mu\nu}$$

を用い、重力波の放出を解析する (以下、添字 μ, ν はほとんど何の役割も果たさない)。その際、次の仮定を置く。

- 源の振動数 Ω での正弦振動 $T_{\mu\nu} = S_{\mu\nu}(x^i)e^{-i\Omega t}$.
 - 実際の源も多くは周期性を持っている。一般の時間依存性は正弦運動の重ね合せ。
- 源の空間的な拡がりや放出される重力波の波長に比べて短い。
 - 遅い運動の仮定と呼ばれる [本稿次節で補足]。

解を

$$\bar{h}_{\mu\nu} = B_{\mu\nu}(x^i)e^{-i\Omega t}$$

の形に仮定すると、 $B_{\mu\nu}$ は

$$(\nabla^2 + \Omega^2)B_{\mu\nu} = -16\pi S_{\mu\nu}$$

を満たさなければならない。源の内部の原点に関する球座標 r を定義すると、物理的に妥当な解は外向きの球面波

$$B_{\mu\nu} = \frac{A_{\mu\nu}}{r} e^{i\Omega r}$$

である [このとき $\bar{h}_{\mu\nu} \sim e^{i\Omega(r-t)}/r$ なので、これは外向きに伝播する球面波を表す]。 $B_{\mu\nu}$ に対する式を用いると、遅い運動の仮定の下で $A_{\mu\nu}$ は

$$A_{\mu\nu} = 4J_{\mu\nu}, \quad J_{\mu\nu} \equiv \int S_{\mu\nu} d^3x$$

と定められる。以上より

$$\bar{h}_{\mu\nu} = 4 \frac{J_{\mu\nu}}{r} e^{i\Omega(r-t)}$$

を得る.

保存則 $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ を考慮すると [共変微分を用いなくて良く, この式は根拠として源が「重力以外の力によって運動」(p.301 下から 2 行目) していることを表している],

$$J^{\mu 0} = 0, \quad \bar{h}^{\mu 0} = 0$$

が見出される.

ところで遅い運動の系では $T^{00} \simeq \rho$ (ニュートン質量密度) なので,

$$I^{lm} \equiv \int T^{00} x^l x^m d^3x = D^{lm} e^{-i\Omega t}$$

という量は質量分布の四重極モーメントとなる. これを用いて上の結果は

$$\bar{h}_{jk} = -2\Omega^2 D_{jk} e^{i\Omega(r-t)}/r$$

と表せることを確かめられる. [これが最終的な結果であり, 与えられた源の運動 (D_{jk}) から放出される重力波 \bar{h}_{jk} を定める式と見なすことができる. なおすぐ後で TT ゲージをとるので, 時間成分 $\bar{h}_{0\mu}$ はゼロとなって考える必要がなくなる.]

ここでも波が z 方向に進む場合を考えて TT ゲージをとる.

$$\bar{h}_{zi}^{\text{TT}} = 0, \quad \bar{h}_{xx}^{\text{TT}} = -\bar{h}_{yy}^{\text{TT}}.$$

さらにトレースフリーあるいは還元四重極モーメント

$$\tilde{I}_{jk} = I_{jk} - \frac{1}{3}\delta_{jk}I_l^l$$

を導入すると [本稿ではチルダで表した, 電荷分布に対するトレースレスの 4 重極モーメントは例えば文献 [3, p.111]], 上の結果は

$$\bar{h}_{zi}^{\text{TT}} = 0, \quad \bar{h}_{xx}^{\text{TT}} = -\bar{h}_{yy}^{\text{TT}} = -\Omega^2(\tilde{I}_{xx} - \tilde{I}_{yy})e^{i\Omega r}/r, \quad \bar{h}_{xy}^{\text{TT}} = -2\Omega^2\tilde{I}_{xy}e^{i\Omega r}/r$$

となる.

「遅い運動による波動の発生 (p.296~)」について

■「第二の仮定は, 遅い運動の仮定とよばれる. というのは, ……」(p.296 下 2 行~p.297, l.2) について $S_{\mu\nu} \neq 0$ の領域, すなわち源の拡がりの程度を ε と書く. また以下では光速をあからさまに c と書く. このとき源の物体要素の速度を v とすると, 放出される重力波の周期は $T \sim \varepsilon/v$, したがって波長は $\lambda \sim \varepsilon c/v$ の程度と考えられる. よって $\varepsilon \ll \lambda$ の仮定は遅い運動 $v \ll c$ の仮定に対応している [3, p.195].

なお電磁波の放射に関して言えば, $\varepsilon \ll \lambda$ の仮定の下で場を ε/λ のべきに展開することが可能となり, 放射の場は双極放射, 4 重極放射, 磁気双極放射などによって表されることになる [3, pp.195–197, pp.210–212]. 他方, 重力波は質量分布の四重極モーメントを用いて記述され (式 (9.83), 式 (9.105)), 「波動方程式の厳密解 (p.305)」が対応する議論にあたる.

■ $B_{\mu\nu}$ の式 (9.68) について 9.7 節の練習問題 29 がその証明になっているけれど, 非斉次の Helmholtz 方程式 (9.67) の Green 関数が球面波の形をとることから, この結果は十分もっともらしく見える [4, pp.189–190].

■式 (9.71) について 球面 $r = \varepsilon$ は源の外側である.

$$\left(\frac{d}{dr}B_{\mu\nu}\right)_{r=\varepsilon} = \left(-\frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{i\Omega}{\varepsilon}\right)A_{\mu\nu}e^{i\Omega\varepsilon}$$

の右辺における括弧内第 2 項は第 1 項の $\varepsilon\Omega(\ll 1)$ 倍程度なので無視できる.

■式 (9.81) について これはテンソルピリアル定理と呼ばれ, 4.10 節の練習問題 23 で証明するよう要求される. ここでこれを証明しよう. 保存則 (9.77): $T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$ より

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2} \int T^{00} x^l x^m d^3x &= \frac{d}{dt} \int (\partial_0 T^{00}) x^l x^m d^3x = \frac{d}{dt} \int (-\partial_j T^{0j}) x^l x^m d^3x = \frac{d}{dt} \int T^{0j} \partial_j (x^l x^m) d^3x \\ &= \int (\partial_0 T^{j0}) \partial_j (x^l x^m) d^3x = \int (-\partial_k T^{jk}) \partial_j (x^l x^m) d^3x = \int T^{jk} \partial_j \partial_k (x^l x^m) d^3x \\ &= 2 \int T^{lm} d^3x : (9.81).\end{aligned}$$

■振動数 Ω の成分 (9.82b) について 源 $T_{\mu\nu}$ が単一の振動数 Ω を持っていて, pp.300-303 の例のように I_{jk} は Ω と異なる振動数成分を持ち得る. そこで

$$J_{jk}e^{-i\Omega t} = \int T_{jk} d^3x = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \int T^{00} x_j x_k d^3x = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} I_{jk}$$

の最右辺に振動数 ω の Fourier 成分 $I_{jk} = D_{jk}e^{-i\omega t}$ を代入すると, 式 (9.83) の代わりに

$$\bar{h}_{jk} = -2\omega^2 D_{jk} e^{i(\Omega r - \omega t)} / r$$

を得る. しかしながら式 (9.92) を見ると, あたかも Ω を源 $T_{\mu\nu}$ の持つ単一の振動数ではなく, I_{jk} の持つ個々の振動数と再定義しているようである. I_{jk} の Fourier 成分 (9.82b) を個別に考えれば良いのは, 波動方程式の線形性による (p.300 下から 4,3 行).

■源が放出する重力波を表す解 (9.83) について

$$J_{jk}e^{-i\Omega t} = \int T_{jk} d^3x = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \int T^{00} x_j x_k d^3x = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} (D_{jk}e^{-i\Omega t}) = -\frac{1}{2} \Omega^2 D_{jk}e^{-i\Omega t}$$

である. ただし最後の等号では $D_{jk}e^{-i\Omega t}$: (9.82b) において, 時間依存性は全て $e^{-i\Omega t}$ が担っていることを用いた. これを $\bar{h}_{\mu\nu}$ の式 (9.74) に代入して式 (9.83) を得る.

■TT ゲージでの式 (9.85) について 式 (9.83): $\bar{h}_{jk} = -2\Omega^2 I_{jk} e^{i\Omega r} / r$ より

$$\bar{h}_{xx} = -2\Omega^2 I_{xx} e^{i\Omega r} / r, \quad \bar{h}_{yy} = -2\Omega^2 I_{yy} e^{i\Omega r} / r.$$

ここで TT ゲージでは $\bar{h}_{xx}^{\text{TT}} = -\bar{h}_{yy}^{\text{TT}}$ より $I_{xx} = -I_{yy}$ なので

$$\bar{h}_{xx}^{\text{TT}} = -\Omega^2 (I_{xx} - I_{yy}) e^{i\Omega r} / r, \quad \bar{h}_{yy}^{\text{TT}} = -\Omega^2 (I_{yy} - I_{xx}) e^{i\Omega r} / r.$$

最後に式 (9.87) のトレースフリー四重極モーメント \tilde{I}_{jk} に対して

$$\tilde{I}_{xx} - \tilde{I}_{yy} = I_{xx} - I_{yy}$$

であり, これを代入して式 (9.85) を得る.

例 (p.300～), 大きさのオーダーの評価 (p.303～), 波動方程式の厳密解 (p.305)
要約を省略する.

「例 (p.300～)」について

■振動子の四重極モーメント (9.88) について 四重極モーメントの定義式 (9.82a) は質点に関する和

$$I^{lm} = \sum m x^l x^m$$

に書き換えられる. 式 (9.88) では空間座標が

$$(x_1, 0, 0), \quad (x_2, 0, 0), \quad x_2 = -x_1 = \frac{1}{2}l_0 + A \cos \omega t$$

で与えられる 2 粒子の振動に対してこれを評価している.

■「 I_{xx} の正弦関数部分だけが, ……用いられる」(p.300, 下から 5 行目) について 式 (9.88) の定数項の寄与は, 式 (9.83) で $\Omega = 0$ と置いて評価するとゼロになる.

■振動数 2ω に対するパターン (9.92) について

$$\tilde{I}_{xx} = \frac{2}{3}I_{xx} = \frac{2}{3}mA^2e^{-2i\omega t}, \quad \tilde{I}_{yy} = \tilde{I}_{zz} = -\frac{1}{3}\tilde{I}_{xx} = -\frac{1}{3}mA^2e^{-2i\omega t}, \quad \tilde{I}_{xy} = 0$$

および $\Omega = 2\omega$ を式 (9.84) に代入すれば良い.

■ x 方向の輻射の式 (9.99) について 式 (9.84-86) で $z \rightarrow x, x \rightarrow y, y \rightarrow z$ の置き換えをすると

$$\bar{h}_{xi}^{\text{TT}} = 0, \quad \bar{h}_{yy}^{\text{TT}} = -\bar{h}_{zz}^{\text{TT}} = -\Omega^2(\tilde{I}_{yy} - \tilde{I}_{zz})e^{i\Omega r}/r, \quad \bar{h}_{yz}^{\text{TT}} = -2\Omega^2\tilde{I}_{yz}e^{i\Omega r}/r$$

となる. $\Omega = 2\omega$ と置き, これを式 (9.97) の \tilde{I}_{jk} に対して評価すれば, 式 (9.99) が係数 1/2 を除いて得られる.

「大きさのオーダーの評価 (p.303～)」について

■「ビリアル定理」(p.303 下から 3 行目) について 相対論におけるビリアル定理とその証明は文献 [3, pp.95-96] ここでは遅い運動の仮定 $v \ll c$ により, 非相対論的なビリアル定理を考えて $\frac{1}{2}mv^2 \sim m\phi_0$ とすれば良い.

■「ちょうど電荷の保存則が電磁気学で単極輻射の存在を禁止しているように, ……」(p.304 下から 5,4 行目) について 式 (9.104) の箇所がその具体的な説明に当たると考えられる.

9.4 重力波によって運ばれるエネルギー

本稿では「概観」(pp.306-308) を要約するに留める.

重力波が源からエネルギーを持ち去ることによる源のエネルギー損失の効果は, 重力波の間接的な証拠となり得る. そこで本節では線形理論の範囲で, 我々が重力波について学んだことを活用してエネルギー損失の公式を求める. 検出器が波からエネルギーを受け取ると, 検出器の“下流”では“上流”よりも波のエネルギーは小さくなる. これは検出器の振動子が放射する, 入射波と同じ振動数 Ω の波が, 下流ではもとの波と打ち消

し合うように干渉して振幅が小さくなることとして理解できる。このことから波によって運ばれるエネルギーを、与えられた波の振幅の関数として簡単に表現する。

■単位ベクトル成分の全方向にわたる平均の公式 (9.128), (9.129) について 全立体角にわたる平均を $\overline{(\dots)}$ で表すと、式 (9.128), (9.129) はそれぞれ

$$\overline{n_j n_k} \equiv \int n_j n_k \frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{1}{3} \delta_{jk}, \quad \overline{n_i n_j n_k n_l} \equiv \int n_i n_j n_k n_l \frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{1}{15} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

を意味する ($d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$)。9.7 節の練習問題 45 で誘導に従ってこれらを証明することになる*3。

第 2 式 (9.129) について

$$\overline{n_i n_j n_k n_l} = C (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

とおき、 $i = j, k = l$ として添字 i, k について和をとると、

$$1 = C \left\{ 3^2 + 2 \sum_{i,k} (\delta_{ik})^2 \right\} = 15C, \quad \therefore C = \frac{1}{15}$$

と定まる。

なお $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ の 3 成分の (一般に奇数個の成分の) 積 $n_i n_j n_k$ は、 $\mathbf{n} \rightarrow -\mathbf{n}$ と置き換えると符号が入れ替わる。よって全方向の \mathbf{n} に関するその平均

$$\overline{n_i n_j n_k} = \int n_i n_j n_k \frac{d\Omega}{4\pi}$$

は、逆方向からの寄与と相殺してゼロになる。

9.5 天体物理的な重力波源

4 種類の重力波源として連星系、自転している中性子星、重力崩壊する天体、ビッグバンの説明がされているけれど、本稿では省略する。

*3 文献 [3, pp.211–212] にも同じ説明が見られる。

$$\mathbf{n} = (\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta)$$

と極座標表示し、平均を直接計算するには及ばない。

10 球対称星

10.1 球対称時空の座標

■球座標での平坦な空間 (p.335) Minkowski 空間において, $r, t = \text{const}$ の二次元球の線要素 dl を

$$dl^2 = r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \equiv r^2 d\Omega^2$$

と書いて立体角の 2 乗 $d\Omega^2$ を定義すると, その係数 r^2 を用いて二次元球の

$$\text{円周は } 2\pi r, \quad \text{表面積は } 4\pi r^2$$

と表される.

■曲った時空中での二次元球 (p.336) 球対称な時空とは, 線要素 dl が

$$dl^2 = f(r', t)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

という形をとる 2 次元球をとることができる時空である. $f(r', t) \equiv r^2$ によって曲率座標 (または面積座標) r を定義すると, $r, t = \text{const}$ の二次元球の

$$\text{円周は } 2\pi r, \quad \text{表面積は } 4\pi r^2$$

と表される. 必ずしも r は球の中心からの距離という意味を持たない. 実際, 図 19 のように球対称な時空の中心が時空の内部に含まれない場合さえある.

■二次元球を $t = \text{一定}$ の三次元空間にはりめぐらすこと (p.336~) 二次元球における基底 $\vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi$ は \vec{e}_r と直交するから

$$g_{r\theta} = \vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta = 0, \quad g_{r\phi} = \vec{e}_r \cdot \vec{e}_\phi = 0.$$

球対称時空

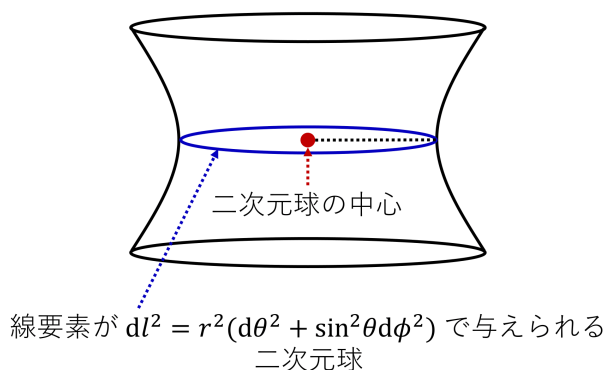


図 19 中心が時空の内部に含まれない球対称時空

■球対称時空 (p.337) 時空の球対称性は二次元球内の基底 $\vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi$ が \vec{e}_t と直交することを意味し,

$$g_{0\theta} = \vec{e}_t \cdot \vec{e}_\theta = 0, \quad g_{0\phi} = \vec{e}_t \cdot \vec{e}_\phi = 0$$

となる. このため球対称時空の一般的なメトリックは

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + g_{rr}dr^2 + 2g_{0r}dtdr + r^2d\Omega^2$$

によって与えられる.

10.1 について

■立体角の2乗 $d\Omega^2$ について 式 (10.2): $d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ は立体角 $d\Omega = d\theta \times \sin\theta d\phi$ の2乗には一致しない.

■式 (10.4) について メトリックを与える式 (10.4) では式 (10.3): $dl^2 = r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$ より $g_{\theta\phi} = 0$ となることを考慮した.

■球対称時空のメトリック (10.5) について $g_{0\theta} = 0, g_{0\phi} = 0$ は時空が静的であると仮定しなくても, 時空の球対称性から要請されている. 一方, 球対称時空のメトリック (10.5) においては $g_{0r} \neq 0$ であり, 静的な時空を考へてはじめて $g_{0r} = 0$ となる (8.2 節参照).

10.2 静的な球対称時空

■メトリック (p.337~)

- (i) メトリックが t に依らない \rightarrow 定常
- (ii) (i) に加えて $t \rightarrow -t$ としても幾何学が不変 \rightarrow 静的

と定義する. (ii) の条件を要求すると g_{0r} はゼロになる. よって $g_{00} < 0, g_{rr} > 0$ が各時空点で成り立てば,

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)}dt^2 + e^{2\Lambda(r)}dr^2 + r^2d\Omega^2$$

とおける. 星の遠方で平坦な時空に対する式

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2d\Omega^2$$

に移行するためには,

$$\Phi(r), \Lambda(r) \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty)$$

を課せば良い.

■メトリックに現れる項の物理的解釈 (p.338~)

Λ の意味 半径 r_1 から r_2 までの [動径方向に沿う] 固有距離は, その上での線要素が $dl^2 = e^{2\Lambda}dr^2$ で与えられるから

$$\int_{r_1}^{r_2} e^{\Lambda} dr$$

である.

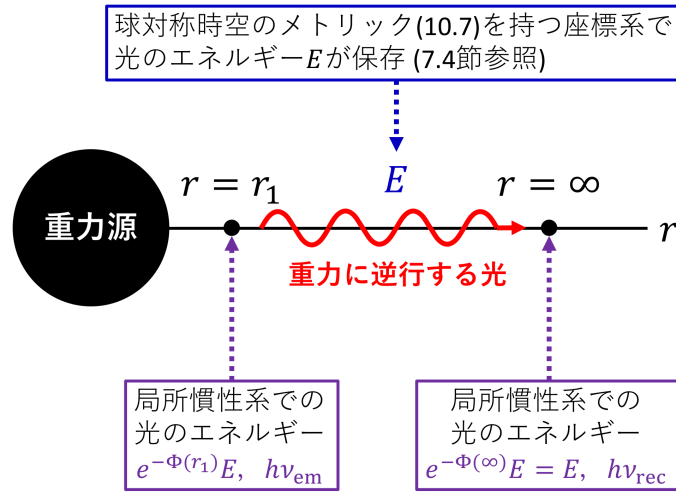


図 20 赤方偏移

Φ の意味 Φ は赤方偏移 z と

$$z \equiv \frac{\lambda_{rec}}{\lambda_{em}} - 1 = \frac{\nu_{em}}{\nu_{rec}} - 1 = e^{-\Phi(r_1)} - 1$$

のように関係付けられる (図 20 参照).

■ アインシュタイン・テンソル (p.340) 本稿次節を参照せよ.

10.2 について

■ 「 $\Lambda^{\bar{0}}_{\bar{0}} = -1, \Lambda^{\bar{i}}_{\bar{j}} = \delta^{\bar{i}}_{\bar{j}}$ だから」 (式 (10.6) の 1 行上) について 直接的にはむしろ

$$(\Lambda^{\mu}_{\bar{\nu}}) = \left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\bar{\nu}}} \right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を用い,

$$g_{\bar{0}\bar{0}} = \Lambda^{\mu}_{\bar{0}} \Lambda^{\nu}_{\bar{0}} g_{\mu\nu} = \Lambda^{\bar{0}}_{\bar{0}} \Lambda^{\bar{0}}_{\bar{0}} g_{00} = g_{00}, \quad \text{etc.}$$

とすれば良い.

■ 静的で球対称な時空のメトリックを与える式 (10.7) について 長さの次元を持つ座標 t, r の選択により g_{00}, g_{rr} が無次元量となっていることも, これらを $-e^{2\Phi}, e^{2\Lambda}$ とおくことを可能にしている.

■ 式 (10.11): $E^* = -\vec{U} \cdot \vec{p} = e^{-\Phi} E$ について 観測者系 $\bar{\mathcal{O}}$ において観測者自身の速度は $\vec{U}_{obs} = (1, \mathbf{0})$, 粒子の運動量は $\vec{p} = (\bar{E}, \vec{p})$ であることから, 観測されるエネルギーは式 (2.35): $\bar{E} = -\vec{p} \cdot \vec{U}_{obs}$ で与えられる. $\bar{\mathcal{O}}$ は局所慣性系なのでメトリックは $\eta_{\mu\nu}$ であり, 特殊相対論の式 $E^* = -\vec{p} \cdot \vec{U}_{obs}$ を用いて良い. これはスカラーなのでその値が座標系に依らないことに注意すると, メトリックが式 (10.7):

$$ds^2 = -e^{2\Phi} dt^2 + e^{2\Lambda} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

によって与えられる実験室系において右辺の値を評価して良い。実験室系に対しても観測者は「(瞬間的に) 静止」(p.239, 1.6) しているとすると、その速度は

$$\vec{U}_{\text{obs}} = (U^0, \mathbf{0}) = (e^{-\Phi}, \mathbf{0}) \quad (\because -1 = \vec{U}_{\text{obs}} \cdot \vec{U}_{\text{obs}} = g_{00}(U^0)^2 = -e^{2\Phi}(U^0)^2)$$

なので、

$$E^* = -\vec{p} \cdot \vec{U}_{\text{obs}} = -p_0 U^0 = -(-E)e^{-\Phi} = Ee^{-\Phi} : (10.11)$$

を得る。

■赤方偏移の別の見方 光が重力源から逃げる際にエネルギーを失い、振動数が $\nu_{\text{em}} \rightarrow \nu_{\text{rec}} = \nu_{\text{em}} e^{\Phi(r_1)}$ と減少することは次のようにも考えられる。式 (10.7):

$$ds^2 = -e^{2\Phi} dt^2 + e^{2\Lambda} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

で与えられる、時間座標 t に依存しないメトリックを持つ実験室系ではエネルギー (10.10): $p_0 = -E$ が保存する (7.4 節参照)。よってこの系で測った振動数 ν は光線に沿って一定であり、 dt 中に $\nu dt = \frac{E}{h} dt$ 回振動する。局所慣性系では対応する固有時間 $d\tau = e^{\Phi} dt$ 中に

$$\nu dt = \nu e^{\Phi} d\tau \equiv \nu' d\tau$$

回振動するから、 $\nu' = e^{-\Phi} \nu$ は

$$e^{-\Phi(\infty)} \nu = \nu \rightarrow e^{-\Phi(r_1)} \nu$$

と減少する。

■アインシュタイン・テンソル (p.340) について 式 (10.7):

$$ds^2 = -e^{2\Phi} dt^2 + e^{2\Lambda} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

で与えられるメトリックに対して、未知関数 $\Phi(r), \Lambda(r)$ を用いた Einstein テンソルの表式 (10.14–17) が天の下りに与えられている。これについて文献 [3, pp.334–336] (ランダウ=リフシッツ『場の古典論』§ 100) における Schwarzschild 解の導出を通して補足する。

次節で確かめるように、

$$ds^2 = e^{\nu} c^2 dt^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) - e^{\lambda} dr^2, \quad \lambda = \lambda(r, t), \quad \nu = \nu(r, t)$$

で与えられるメトリック (時間座標 t に対する依存性も仮定されている) に対して、Einstein テンソル $G^{\mu}_{\nu} \equiv R^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{2} \delta^{\mu}_{\nu} R$ のゼロでない成分は

$$\begin{aligned} G^0_1 &= e^{-\nu} \frac{\dot{\lambda}}{r}, \\ G^1_0 &= -e^{-\lambda} \frac{\dot{\lambda}}{r}, \\ G^0_0 &= -e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) + \frac{1}{r^2}, \\ G^1_1 &= e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2}, \\ G^2_2 = G^3_3 &= -\frac{1}{2} e^{-\lambda} \left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{\nu' \lambda'}{2} \right) + \frac{1}{2} e^{-\nu} \left(\ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \frac{\dot{\lambda} \dot{\nu}}{2} \right) \end{aligned}$$

となる。ここに $(x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, r, \theta, \phi)$ であり、プライムは r による微分、ドットは $x^0 = ct$ による微分を表す。 $(g_{\mu\nu})$ は対角的なので、例えば

$$G_{01} = g_{0\alpha} G^{\alpha}_1 = g_{00} G^0_1$$

のように計算できることに注意すると、

$$\begin{aligned} G_{01} &= \frac{\dot{\lambda}}{r}, \\ G_{10} &= \frac{\dot{\lambda}}{r}, \\ G_{00} &= e^{\nu} \left\{ -e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) + \frac{1}{r^2} \right\}, \\ G_{11} &= \frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} - e^{\lambda} \frac{1}{r^2}, \\ G_{22} &= -r^2 G^2_2, \\ G_{33} &= -r^2 \sin^2 \theta G^3_3 \end{aligned}$$

を得る。

さて、ここで考えているメトリックは式 (10.7):

$$ds^2 = -e^{2\Phi} dt^2 + e^{2\Lambda} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad \Phi = \Phi(r), \quad \Lambda = \Lambda(r)$$

で与えられるものと符号が異なる。ところが下表の定義式等により、メトリックの全成分の符号を入れ替えても Einstein テンソル $G_{\mu\nu}$ は不変である。よって式 (10.7) で与えられるメトリックに対する Einstein 方程式の表式 (10.14-17) は、上記の Einstein テンソルの表式において

$$c = 1, \quad \nu = 2\Phi, \quad \lambda = 2\Lambda$$

とおき、 Φ, Λ の時間座標 t による微分を落とし、Einstein テンソルの成分を指定するラベルを $(0, 1, 2, 3) \rightarrow (0, r, \theta, \phi)$ と付け替えて得られる。

定義式等	文献 [3, pp.334-336]	シュッツ 『相対論入門』
$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (g_{\beta\mu,\nu} + g_{\beta\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\beta})$	(86.3)	(6.32)
$R^{\lambda}_{\mu\nu\rho} \equiv \Gamma^{\lambda}_{\mu\rho,\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu,\rho} + \Gamma^{\lambda}_{\alpha\nu} \Gamma^{\alpha}_{\mu\rho} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\rho} \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$	(91.4)	(6.63)
$R_{\mu\nu} \equiv R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu}$	(92.6)	(6.91)
$R \equiv g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$	(92.9)	(6.92)

Schwarzschild 解の導出過程

Schwarzschild 解は中心対称な重力場を表す Einstein 方程式の解である。本節では

エリ・デ・ランダウ, イェ・エム・リフシッツ, 2015, ランダウ=リフシッツ理論物理学教程

場の古典論 (原書第 6 版)(恒藤敏彦, 広重徹訳), 東京図書株式会社, 東京, 333-336

における Schwarzschild 解の導出について、省略された計算過程の詳細を示す。

中心対称な重力場に対して、 ds^2 の表式が

$$ds^2 = e^{\nu} c^2 dt^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) - e^{\lambda} dr^2, \quad \lambda = \lambda(r, t), \quad \nu = \nu(r, t) \quad (100.2)$$

という形になるような極座標 $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, r, \theta, \phi)$ をとれる。このとき計量テンソルの全成分は

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} e^\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad \therefore (g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} e^{-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}$$

で与えられる。ここで λ, ν は無次元量であることに注意する。このことは以降の計算を進めていく上で、検算に役立つ。

さて、未知関数 $\lambda(r, t), \nu(r, t)$ を Einstein 方程式から定めれば、時空の幾何学が決定される。そこで Einstein 方程式に現れる Ricci テンソルやスカラー曲率を、未知関数 $\lambda(r, t), \nu(r, t)$ を用いて表すことを考える。(なおはじめから λ と ν が座標時間 t に依らないような定常解を仮定すれば、以下の計算を大幅に簡略化できる。)

Christoffel 記号の計算

まず $\lambda(r, t), \nu(r, t)$ を用いて Christoffel 記号を表そう。 $(g_{\mu\nu})$ の非対角成分はゼロだから、Christoffel 記号

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) \quad (86.3)$$

の α, μ, ν が相異なるものはゼロになる。よってゼロでない Christoffel 記号 $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ は、対称な添字 μ, ν が等しいものと異なるものに分類すると

$$\text{対称な添字が等しいもの} \quad \Gamma^\mu_{\nu\nu} = -\frac{1}{2} g^{\mu\mu} \partial_\mu g_{\nu\nu} \quad (\mu, \nu \text{ について和をとらない}) \quad (9)$$

$$\text{対称な添字が異なるもの} \quad \Gamma^\mu_{\nu\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\mu} \partial_\nu g_{\mu\mu} (= \Gamma^\mu_{\mu\nu}) \quad (\mu \neq \nu, \mu \text{ について和をとらない}) \quad (10)$$

に限られる。以下、 $x^1 = r$ による微分をプライムで、 $x^0 = ct$ による微分をドットで表す。

式 (9) の形の Christoffel 記号は以下の 16 個である。

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{00} &= \frac{1}{2} e^{-\nu} \partial_0 e^\nu = \frac{\dot{\nu}}{2}, & \Gamma^0_{11} &= \frac{1}{2} e^{-\nu} \partial_0 e^\lambda = \frac{1}{2} \dot{\lambda} e^{\lambda-\nu}, \\ \Gamma^0_{22} &= \frac{1}{2} e^{-\nu} \partial_0 r^2 = 0, & \Gamma^0_{33} &= \frac{1}{2} e^{-\nu} \partial_0 (r^2 \sin^2 \theta) = 0, \\ \Gamma^1_{00} &= \frac{1}{2} (-e^{-\lambda}) (-e^\nu)' = \frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda}, & \Gamma^1_{11} &= \frac{1}{2} (-e^{-\lambda}) (e^{-\lambda})' = \frac{\lambda'}{2}, \\ \Gamma^1_{22} &= \frac{1}{2} (-e^{-\lambda}) (-r^2)' = -r e^{-\lambda}, & \Gamma^1_{33} &= \frac{1}{2} (-e^{-\lambda}) (-r^2 \sin^2 \theta)' = -r e^{-\lambda} \sin^2 \theta, \\ \Gamma^2_{00} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r^2}\right) \partial_\theta e^\nu = 0, & \Gamma^2_{11} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r^2}\right) \partial_\theta e^{-\lambda} = 0, \\ \Gamma^2_{22} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r^2}\right) \partial_\theta (-r^2) = 0, & \Gamma^2_{33} &= -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r^2}\right) \partial_\theta (-r^2 \sin^2 \theta) = -\sin \theta \cos \theta, \\ \Gamma^3_{00} &= -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}\right) \partial_\phi e^\nu = 0, & \Gamma^3_{11} &= -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}\right) \partial_\phi (-e^\lambda) = 0, \\ \Gamma^3_{22} &= -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}\right) \partial_\phi (-r^2) = 0, & \Gamma^3_{33} &= -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}\right) \partial_\phi (-r^2 \sin^2 \theta) = 0. \end{aligned}$$

式 (10) 左辺の形の Christoffel 記号は以下の 12 個である。

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{10} &= \frac{1}{2} e^{-\nu} \partial_r e^\nu = \frac{\nu'}{2}, & \Gamma^0_{20} &= \frac{1}{2} e^{-\nu} \partial_\theta e^\nu = 0, \\ \Gamma^0_{30} &= \frac{1}{2} e^{-\nu} \partial_\phi e^\nu = 0, & \Gamma^1_{01} &= \frac{1}{2} (-e^{-\lambda}) \partial_0 (-e^\lambda) = \frac{\dot{\lambda}}{2}, \\ \Gamma^1_{21} &= \frac{1}{2} (-e^{-\lambda}) \partial_\theta (-e^\lambda) = 0, & \Gamma^1_{31} &= \frac{1}{2} (-e^{-\lambda}) \partial_\phi (-e^\lambda) = 0, \\ \Gamma^2_{02} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r^2}\right) \partial_\theta (-r^2) = 0, & \Gamma^2_{12} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r^2}\right) \partial_r (-r^2) = \frac{1}{r}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^2_{32} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r^2} \right) \partial_\phi(-r^2) = 0, & \Gamma^3_{03} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right) \partial_0(-r^2 \sin^2 \theta) = 0, \\ \Gamma^3_{13} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right) \partial_r(-r^2 \sin^2 \theta) = \frac{1}{r}, & \Gamma^3_{23} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right) \partial_\theta(-r^2 \sin^2 \theta) = \frac{1}{\tan \theta}.\end{aligned}$$

以上で教科書の式 (100.3) に与えられている, ゼロでない Christoffel 記号の全成分が網羅されている。

Ricci テンソル, スカラー曲率の計算

曲率テンソル

$$R^\lambda_{\mu\nu\rho} \equiv \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\rho} - \partial_\rho \Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \Gamma^\lambda_{\sigma\nu} \Gamma^\sigma_{\mu\rho} - \Gamma^\lambda_{\sigma\rho} \Gamma^\sigma_{\mu\nu} \quad (91.4)$$

に対して, Ricci テンソルとスカラー曲率はそれぞれ

$$R_{\mu\nu} \equiv R^\lambda_{\mu\lambda\nu}, \quad (92.6)$$

$$R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (92.9)$$

で定義される。先に求めた Christoffel 記号の表式を用いて, Ricci テンソルとスカラー曲率は以下のように計算される。その際,

$$\text{対称性} \quad R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu} \quad \Rightarrow \quad R^\mu_{\nu} = g^{\mu\lambda} R_{\lambda\nu} = g^{\mu\lambda} R_{\nu\lambda} = R_{\nu}^{\mu}$$

にも注意する。

- R_{00} の計算 $R_{00} = R^\mu_{0\mu 0} = \partial_\mu \Gamma^\mu_{00} - \partial_0 \Gamma^\mu_{0\mu} + \Gamma^\mu_{\nu\nu} \Gamma^\nu_{00} - \Gamma^\mu_{0\nu} \Gamma^\nu_{0\mu}$ の最右辺について,
- 第 1 項の Γ^μ_{00} , 第 2 項の $\Gamma^\mu_{0\mu}$ がゼロでない値を持つのはいずれも $\mu = 0, 1$ のときである。
 - 第 3 項の Γ^ν_{00} がゼロでない値を持つのは $\nu = 0, 1$ のときであり,
 - $\nu = 0$ に対して $\Gamma^\mu_{\nu\nu}$ がゼロでない値を持つのは $\mu = 0, 1$ のとき,
 - $\nu = 1$ に対して $\Gamma^\mu_{\nu\nu}$ がゼロでない値を持つのは $\mu = 0, 1, 2, 3$ のときである。
 - 第 4 項の $\Gamma^\mu_{0\nu}$ がゼロでない値を持つのは $(\mu, \nu) = (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$ のときである。
- よって

$$\begin{aligned}R_{00} &= \cancel{\partial_0 \frac{\nu'}{2}} + \partial_1 \left(\frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda} \right) \Leftarrow \partial_\mu \Gamma^\mu_{00} \\ &\quad - \cancel{\partial_0 \frac{\dot{\nu}}{2}} - \partial_0 \frac{\dot{\lambda}}{2} \Leftarrow -\partial_0 \Gamma^\mu_{0\mu} \\ &\quad + \cancel{\left(\frac{\dot{\nu}}{2} \right)^2} + \frac{\dot{\lambda} \dot{\nu}}{2} + \left(\frac{\nu'}{2} + \frac{\lambda'}{2} + \frac{1}{r} \times 2 \right) \frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda} \Leftarrow \Gamma^\mu_{\nu\nu} \Gamma^\nu_{00} \\ &\quad - 2 \times \frac{\nu'}{2} \cdot \frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda} - \cancel{\left(\frac{\dot{\nu}}{2} \right)^2} - \cancel{\left(\frac{\dot{\lambda}}{2} \right)^2} \Leftarrow -\Gamma^\mu_{0\nu} \Gamma^\nu_{0\mu} \\ &= \left(\frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda} \right)' - \frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda} \dot{\nu}}{4} - \frac{\nu'^2}{4} e^{\nu-\lambda} + \left(\frac{\lambda'}{2} + \frac{2}{r} \right) \frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda} - \frac{\dot{\lambda}^2}{4} \\ &= \left(\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu' \lambda'}{4} + \frac{\nu'}{r} \right) e^{\nu-\lambda} - \frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda} \dot{\nu}}{4} - \frac{\dot{\lambda}^2}{4}.\end{aligned}$$

- R_{01} の計算 $R_{01} = R^\mu_{0\mu 1} = \partial_\mu \Gamma^\mu_{01} - \partial_1 \Gamma^\mu_{0\mu} + \Gamma^\mu_{\nu\nu} \Gamma^\nu_{01} - \Gamma^\mu_{1\nu} \Gamma^\nu_{0\mu}$ の最右辺について,
- 第 1 項の Γ^μ_{01} , 第 2 項の $\Gamma^\mu_{0\mu}$ がゼロでない値を持つのはいずれも $\mu = 0, 1$ のときである。
 - 第 3 項の Γ^ν_{01} がゼロでない値を持つのは $\nu = 0, 1$ のときであり,
 - $\nu = 0$ に対して $\Gamma^\mu_{\nu\nu}$ がゼロでない値を持つのは $\mu = 0, 1$ のとき,
 - $\nu = 1$ に対して $\Gamma^\mu_{\nu\nu}$ がゼロでない値を持つのは $\mu = 0, 1, 2, 3$ のときである。
 - 第 4 項の $\Gamma^\nu_{0\mu}$ がゼロでない値を持つのは $(\mu, \nu) = (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$ のときである。

よって

$$\begin{aligned}
 R_{01} &= \cancel{\partial_0 \frac{\nu'}{2}} + \cancel{\partial_1 \frac{\dot{\lambda}}{2}} \Leftarrow \partial_\mu \Gamma^\mu_{01} \\
 &\quad - \cancel{\partial_1 \frac{\dot{\nu}}{2}} - \cancel{\partial_1 \frac{\dot{\lambda}}{2}} \Leftarrow -\partial_1 \Gamma^\mu_{0\mu} \\
 &\quad + \left(\frac{\dot{\nu}}{2} + \frac{\dot{\lambda}}{2} \right) \frac{\nu'}{2} + \left(\frac{\nu'}{2} + \frac{\lambda'}{2} + \frac{1}{r} \times 2 \right) \frac{\dot{\lambda}}{2} \Leftarrow \Gamma^\mu_{\mu\nu} \Gamma^\nu_{01} \\
 &\quad - \frac{\dot{\lambda}}{2} e^{\lambda-\nu} \frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda} - \frac{\nu'}{2} \frac{\dot{\nu}}{2} - \frac{\dot{\lambda}}{2} \frac{\nu'}{2} - \frac{\lambda'}{2} \frac{\dot{\lambda}}{2} \Leftarrow -\Gamma^\mu_{1\nu} \Gamma^\nu_{0\mu} \\
 &= \frac{\dot{\lambda}}{r} (= R_{10}).
 \end{aligned}$$

■ R_{02} の計算 $R_{02} = R^\mu_{0\mu 2} = \partial_\mu \Gamma^\mu_{02} - \partial_2 \Gamma^\mu_{0\mu} + \Gamma^\mu_{\mu\nu} \Gamma^\nu_{02} - \Gamma^\mu_{2\nu} \Gamma^\nu_{0\mu}$ の最右辺について、

- 第1項における Γ^μ_{02} , 第3項における Γ^ν_{02} の形の Christoffel 記号は全てゼロである。
- 第2項について, $x^2 = \theta$ 依存性を持つ Christoffel 記号は $\Gamma^2_{33}, \Gamma^3_{23}, \Gamma^1_{33}$ のみであり, いずれも $\Gamma^\mu_{0\mu}$ の形ではない。
- 第4項の $\Gamma^\mu_{2\nu}$ がゼロでない値を持つのは $(\mu, \nu) = (1, 2), (2, 1), (3, 3)$ のときであり, いずれに対しても $\Gamma^\nu_{0\mu} = 0$ となる。

よって

$$R_{02} = 0 (= R_{20}).$$

■ R_{03} の計算 $R_{03} = R^\mu_{0\mu 3} = \partial_\mu \Gamma^\mu_{03} - \partial_3 \Gamma^\mu_{0\mu} + \Gamma^\mu_{\mu\nu} \Gamma^\nu_{03} - \Gamma^\mu_{3\nu} \Gamma^\nu_{0\mu}$ の最右辺について、

- 第1項における Γ^μ_{03} , 第3項における Γ^ν_{03} の形の Christoffel 記号は全てゼロである。
- 第2項は, $x^3 = \phi$ 依存性を持つ Christoffel 記号が存在しないからゼロになる。
- 第4項の $\Gamma^\mu_{3\nu}$ がゼロでない値を持つのは $(\mu, \nu) = (1, 3), (2, 3), (3, 1), (3, 2)$ のときであり, いずれに対しても $\Gamma^\nu_{0\mu} = 0$ となる。

よって

$$R_{03} = 0 (= R_{30}).$$

■ R_{11} の計算 $R_{11} = R^\mu_{1\mu 1} = \partial_\mu \Gamma^\mu_{11} - \partial_1 \Gamma^\mu_{1\mu} + \Gamma^\mu_{\mu\nu} \Gamma^\nu_{11} - \Gamma^\mu_{1\nu} \Gamma^\nu_{1\mu}$ の最右辺について、

- 第1項の Γ^μ_{11} がゼロでない値を持つのは $\mu = 0, 1$ のときである。
- 第3項の Γ^ν_{11} がゼロでない値を持つのは $\nu = 0, 1$ のときであり,
 - $\nu = 0$ に対して $\Gamma^\mu_{\mu\nu}$ がゼロでない値を持つのは $\mu = 0, 1$ のとき,
 - $\nu = 1$ に対して $\Gamma^\mu_{\mu\nu}$ がゼロでない値を持つのは $\mu = 0, 1, 2, 3$ のときである。
- 第4項の $\Gamma^\mu_{1\nu}$ がゼロでない値を持つのは $(\mu, \nu) = (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)$ のときである。

よって

$$\begin{aligned}
 R_{11} &= \partial_0 \left(\frac{\dot{\lambda}}{2} e^{\lambda-\nu} \right) + \cancel{\partial_1 \frac{\lambda'}{2}} \Leftarrow \partial_\mu \Gamma^\mu_{11} \\
 &\quad - \partial_1 \left(\frac{\nu'}{2} + \frac{\lambda'}{2} + \frac{1}{r} \times 2 \right) \Leftarrow -\partial_1 \Gamma^\mu_{1\mu} \\
 &\quad + \left(\frac{\dot{\nu}}{2} + \frac{\dot{\lambda}}{2} \right) \frac{\dot{\lambda}}{2} e^{\lambda-\nu} + \left(\frac{\nu'}{2} + \frac{\lambda'}{2} + \frac{1}{r} \times 2 \right) \frac{\lambda'}{2} \Leftarrow \Gamma^\mu_{\mu\nu} \Gamma^\nu_{11} \\
 &\quad - \left(\frac{\lambda'}{2} \right)^2 - \left(\frac{\nu'}{2} \right)^2 - \frac{\dot{\lambda}}{2} e^{\lambda-\nu} \frac{\dot{\lambda}}{2} \times 2 - \left(\frac{1}{r} \right)^2 \times 2 \Leftarrow -\Gamma^\mu_{1\nu} \Gamma^\nu_{1\mu} \\
 &= \partial_0 \left(\frac{\dot{\lambda}}{2} e^{\lambda-\nu} \right) - \frac{\nu''}{2} + \frac{\dot{\nu} \dot{\lambda}}{2} e^{\lambda-\nu} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} e^{\lambda-\nu} + \frac{\lambda' \nu'}{4} + \frac{\lambda'}{r} - \left(\frac{\nu'}{2} \right)^2 - 2 \left(\frac{\dot{\lambda}}{2} \right)^2 e^{\lambda-\nu}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \partial_0 \left(\frac{\dot{\lambda}}{2} e^{\lambda-\nu} \right) + \frac{\dot{\lambda}}{2} \left(\frac{\dot{\nu}}{2} - \frac{\dot{\lambda}}{2} \right) e^{\lambda-\nu} - \frac{\nu''}{2} + \frac{\lambda' \nu'}{4} + \frac{\lambda'}{r} - \frac{\nu'^2}{4} \\
&= \left\{ \frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}}{4} (\dot{\lambda} - \dot{\nu}) \right\} e^{\lambda-\nu} - \frac{\nu''}{2} + \frac{\lambda' \nu'}{4} + \frac{\lambda'}{r} - \frac{\nu'^2}{4}.
\end{aligned}$$

■ R_{12} の計算 $R_{12} = R^\mu_{1\mu 2} = \partial_\mu \Gamma^\mu_{12} - \partial_2 \Gamma^\mu_{1\mu} + \Gamma^\mu_{\mu\nu} \Gamma^\nu_{12} - \Gamma^\mu_{2\nu} \Gamma^\nu_{1\mu}$ の最右辺について、

- 第1項の Γ^μ_{12} がゼロでない値を持つのは $\mu = 2$ のときである。
ところが $\mu = 2$ のとき、 $\partial_\mu \Gamma^\mu_{12} = \partial_2 \frac{1}{r} = 0$ となる。
- 第2項について、 $x^2 = \theta$ 依存性を持つ Christoffel 記号は $\Gamma^2_{33}, \Gamma^3_{23}, \Gamma^1_{33}$ のみであり、いずれも $\Gamma^\mu_{1\mu}$ の形ではない。
- 第3項の Γ^ν_{12} がゼロでない値を持つのは $\nu = 2$ のときであり、 $\nu = 2$ に対して $\Gamma^\mu_{\mu\nu}$ がゼロでない値を持つのは $\mu = 3$ のときである。
 $(\mu, \nu) = (3, 2)$ のとき、 $\Gamma^\mu_{\mu\nu} \Gamma^\nu_{12} = \frac{\cot \theta}{r}$ となる。
- 第4項の $\Gamma^\nu_{2\nu}$ がゼロでない値を持つのは $(\mu, \nu) = (1, 2), (2, 1), (3, 3)$ のときであり、 $(\mu, \nu) = (1, 2), (2, 1)$ に対しては $\Gamma^\nu_{1\mu} = 0$ となる。 $(\mu, \nu) = (3, 3)$ のとき、 $-\Gamma^\mu_{2\nu} \Gamma^\nu_{1\mu} = -\frac{\cot \theta}{r}$ となる。

よって

$$R_{12} = \frac{\cot \theta}{r} - \frac{\cot \theta}{r} = 0 (= R_{21}).$$

■ R_{13} の計算 $R_{13} = R^\mu_{1\mu 3} = \partial_\mu \Gamma^\mu_{13} - \partial_3 \Gamma^\mu_{1\mu} + \Gamma^\mu_{\mu\nu} \Gamma^\nu_{13} - \Gamma^\mu_{3\nu} \Gamma^\nu_{1\mu}$ の最右辺について、

- 第1項の Γ^μ_{13} がゼロでない値を持つのは $\mu = 3$ のときである。
ところが $\mu = 3$ のとき、 $\partial_\mu \Gamma^\mu_{13} = \partial_3 \frac{1}{r} = 0$ となる。
- 第2項は、 $x^3 = \phi$ 依存性を持つ Christoffel 記号が存在しないからゼロになる。
- 第3項の Γ^ν_{13} がゼロでない値を持つのは $\nu = 3$ のときであり、 $\nu = 3$ に対して $\Gamma^\mu_{\mu\nu} = 0$ となる。
- 第4項の $\Gamma^\mu_{3\nu}$ がゼロでない値を持つのは $(\mu, \nu) = (1, 3), (2, 3), (3, 1), (3, 2)$ のときであり、いずれに対しても $\Gamma^\nu_{1\mu} = 0$ となる。

よって

$$R_{13} = 0 (= R_{31}).$$

■ R_{22} の計算 $R_{22} = R^\mu_{2\mu 2} = \partial_\mu \Gamma^\mu_{22} - \partial_2 \Gamma^\mu_{2\mu} + \Gamma^\mu_{\mu\nu} \Gamma^\nu_{22} - \Gamma^\mu_{2\nu} \Gamma^\nu_{2\mu}$ の最右辺について、

- 第1項の Γ^μ_{22} がゼロでない値を持つのは $\mu = 1$ のときである。
- 第2項の $\Gamma^\mu_{2\mu}$ がゼロでない値を持つのは $\mu = 3$ のときである。
- 第3項の Γ^ν_{22} がゼロでない値を持つのは $\nu = 1$ のときである。
- 第4項の $\Gamma^\mu_{2\nu}$ がゼロでない値を持つのは $(\mu, \nu) = (1, 2), (2, 1), (3, 3)$ のときである。

よって

$$\begin{aligned}
R_{22} &= \partial_1(-re^{-\lambda}) \Leftarrow \partial_\mu \Gamma^\mu_{22} \\
&\quad - \partial_2(\cot \theta) \Leftarrow -\partial_2 \Gamma^\mu_{2\mu} \\
&\quad + \left(\frac{\nu'}{2} + \frac{\lambda'}{2} + \frac{1}{r} \times 2 \right) (-re^{-\lambda}) \Leftarrow \Gamma^\mu_{\mu\nu} \Gamma^\nu_{22} \\
&\quad - \left(-re^{-\lambda} \right) \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \left(-re^{-\lambda} \right) - \cot^2 \theta \Leftarrow -\Gamma^\mu_{2\nu} \Gamma^\nu_{2\mu} \\
&= \partial_1(-re^{-\lambda}) + \left(\frac{\nu'}{2} + \frac{\lambda'}{2} \right) (-re^{-\lambda}) - \partial_2(\cot \theta) - \cot^2 \theta \\
&= \left\{ -1 + r \left(\frac{\lambda'}{2} - \frac{\nu'}{2} \right) \right\} e^{-\lambda} + 1. \quad \left(\because -\partial_2(\cot \theta) - \cot^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = 1 \right)
\end{aligned}$$

■ R_{23} の計算 $R_{23} = R^\mu_{2\mu 3} = \partial_\mu \Gamma^\mu_{23} - \partial_3 \Gamma^\mu_{2\mu} + \Gamma^\mu_{\mu\nu} \Gamma^\nu_{23} - \Gamma^\mu_{3\nu} \Gamma^\nu_{2\mu}$ の最右辺について、

- 第1項の Γ^μ_{23} がゼロでない値を持つのは $\mu = 3$ のときである。
ところが $\mu = 3$ のとき、 $\partial_\mu \Gamma^\mu_{23} = \partial_3 \cot \theta = 0$ となる。
- 第2項は、 $x^3 = \phi$ 依存性を持つ Christoffel 記号が存在しないからゼロになる。

- 第3項の Γ^ν_{23} がゼロでない値を持つのは $\nu = 3$ のときであり、 $\nu = 3$ に対して $\Gamma^\mu_{\mu\nu} = 0$ となる。
- 第4項の $\Gamma^\nu_{2\mu}$ がゼロでない値を持つのは $(\mu, \nu) = (1, 2), (2, 1), (3, 3)$ のときであり、
いずれに対しても $\Gamma^\mu_{3\nu} = 0$ となる。

よって

$$R_{23} = 0 (= R_{32}).$$

■ R_{33} の計算 $R_{33} = R^\mu_{3\mu 3} = \partial_\mu \Gamma^\mu_{33} - \partial_3 \Gamma^\mu_{3\mu} + \Gamma^\mu_{\mu\nu} \Gamma^\nu_{33} - \Gamma^\mu_{3\nu} \Gamma^\nu_{3\mu}$ の最右辺について、

- 第1項の Γ^μ_{33} がゼロでない値を持つのは $\mu = 1, 2$ のときである。
- 第2項は、 $x^3 = \phi$ 依存性を持つ Christoffel 記号が存在しないからゼロになる。
- 第3項の Γ^ν_{33} がゼロでない値を持つのは $\nu = 1, 2$ のときであり、
- $\nu = 1$ に対して $\Gamma^\mu_{\mu\nu}$ がゼロでない値を持つのは $\mu = 0, 1, 2, 3$ のとき、
- $\nu = 2$ に対して $\Gamma^\mu_{\mu\nu}$ がゼロでない値を持つのは $\mu = 3$ のときである。
- 第4項の $\Gamma^\mu_{3\nu}$ がゼロでない値を持つのは $(\mu, \nu) = (1, 3), (2, 3), (3, 1), (3, 2)$ のときである。

よって

$$\begin{aligned} R_{33} &= \partial_1(-r \sin^2 \theta e^{-\lambda}) + \partial_2(-\sin \theta \cos \theta) \Leftarrow \partial_\mu \Gamma^\mu_{33} \\ &\quad + \left(\frac{\nu'}{2} + \frac{\lambda'}{2} + \frac{1}{r} \times 2 \right) (-r \sin^2 \theta e^{-\lambda}) + \underbrace{\cot \theta (-\sin \theta \cos \theta)}_{-\cos^2 \theta} \Leftarrow \Gamma^\mu_{\mu\nu} \Gamma^\nu_{33} \\ &\quad - \underbrace{(-\sin \theta \cos \theta) \cot \theta \times 2}_{2 \cos^2 \theta} - \underbrace{(-r \sin^2 \theta e^{-\lambda}) \frac{1}{r} \times 2}_{\frac{1}{r} \times 2} \Leftarrow -\Gamma^\mu_{3\nu} \Gamma^\nu_{3\mu} \\ &= \partial_1(-r \sin^2 \theta e^{-\lambda}) + \partial_2(-\sin \theta \cos \theta) + \left(\frac{\nu'}{2} + \frac{\lambda'}{2} \right) (-r \sin^2 \theta e^{-\lambda}) + \cos^2 \theta \\ &= -e^{-\lambda} \sin^2 \theta \left\{ 1 + r \left(\frac{\nu'}{2} - \frac{\lambda'}{2} \right) \right\} + \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

■ Ricci テンソルの全成分 以上で Ricci テンソルの全成分が得られたことになる。これを混合テンソル R^μ_ν の形に書き換え、以下にまとめる。その際 $(g^{\mu\nu})$ は対角的なので、例えば

$$R^0_0 = g^{0\mu} R_{\mu 0} = g^{00} R_{00}$$

のように計算できることに注意すれば良い。

$$\begin{aligned} R^0_0 &= g^{00} R_{00} = e^{-\nu} R_{00}, & R_{00} &= \left(\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu' \lambda'}{4} + \frac{\nu'}{r} \right) e^{\nu-\lambda} - \frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda} \dot{\nu}}{4} - \frac{\dot{\lambda}^2}{4}, \\ R^0_1 &= g^{00} R_{01} = e^{-\nu} \frac{\dot{\lambda}}{r}, \\ R^0_2 &= g^{00} R_{02} = 0, \\ R^0_3 &= g^{00} R_{03} = 0, \\ R^1_0 &= g^{11} R_{10} = -e^{-\lambda} \frac{\dot{\lambda}}{r}, \\ R^1_1 &= g^{11} R_{11} = -e^{-\lambda} R_{11}, & R_{11} &= \left\{ \frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}}{4} (\dot{\lambda} - \dot{\nu}) \right\} e^{\lambda-\nu} - \frac{\nu''}{2} + \frac{\lambda' \nu'}{4} + \frac{\lambda'}{r} - \frac{\nu'^2}{4}, \\ R^1_2 &= g^{11} R_{12} = 0, \\ R^1_3 &= g^{11} R_{13} = 0, \\ R^2_0 &= g^{22} R_{20} = 0, \\ R^2_1 &= g^{22} R_{21} = 0, \\ R^2_2 &= g^{22} R_{22} = -\frac{1}{r^2} R_{22}, & R_{22} &= \left\{ -1 + r \left(\frac{\lambda'}{2} - \frac{\nu'}{2} \right) \right\} e^{-\lambda} + 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R^2_3 &= g^{22} R_{23} = 0, \\
R^3_0 &= g^{33} R_{30} = 0, \\
R^3_1 &= g^{33} R_{31} = 0, \\
R^3_2 &= g^{33} R_{32} = 0, \\
R^3_3 &= g^{33} R_{33} = -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} R_{33}, \quad R_{33} = -e^{-\lambda} \sin^2 \theta \left\{ 1 + r \left(\frac{\nu'}{2} - \frac{\lambda'}{2} \right) \right\} + \sin^2 \theta.
\end{aligned}$$

■スカラー曲率 R の計算 以上よりスカラー曲率 R は

$$\begin{aligned}
R &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \sum_{\mu=0}^3 g^{\mu\mu} R_{\mu\mu} \\
&= e^{-\lambda} \left(\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'}{r} \right) + e^{-\nu} \left(-\frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{4} - \frac{\dot{\lambda}^2}{4} \right) \Leftarrow g^{00} R_{00} \\
&+ e^{-\lambda} \left(\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4} - \frac{\lambda'}{r} \right) + e^{-\nu} \left(-\frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{4} - \frac{\dot{\lambda}^2}{4} \right) \Leftarrow g^{11} R_{11} \\
&\quad + e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{2r} - \frac{\lambda'}{2r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} \Leftarrow g^{22} R_{22} \\
&\quad + e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{2r} - \frac{\lambda'}{2r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} \Leftarrow g^{33} R_{33} \\
&= e^{-\lambda} \left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} + 2\frac{\nu'}{r} - 2\frac{\lambda'}{r} + \frac{2}{r^2} \right) + e^{-\nu} \left(-\ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{2} - \frac{\dot{\lambda}^2}{2} \right) - \frac{2}{r^2}
\end{aligned}$$

と求まる.

■Einstein テンソル Einstein 方程式の左辺 (Einstein テンソル)

$$R^\mu_\nu - \frac{1}{2} \delta^\mu_\nu R \equiv G^\mu_\nu$$

は $\mu \neq \nu$ に対して $G^\mu_\nu = R^\mu_\nu$ となる. このうちゼロでない成分は, 上記のように R^0_1 と R^1_0 がある. これ以外のゼロでない Einstein テンソル G^μ_ν の成分として, $\mu = \nu$ の成分を計算する. まず,

$$\begin{aligned}
G^0_0 &= e^{-\lambda} \left(\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'}{r} \right) + e^{-\nu} \left(-\frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{4} - \frac{\dot{\lambda}^2}{4} \right) \Leftarrow R^0_0 \\
&+ e^{-\lambda} \left(-\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu'\lambda'}{4} - \frac{\nu'}{r} + \frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + e^{-\nu} \left(\frac{\ddot{\lambda}}{2} - \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{4} + \frac{\dot{\lambda}^2}{4} \right) + \frac{1}{r^2} \Leftarrow -\frac{1}{2} \delta^0_0 R \\
&= -e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) + \frac{1}{r^2}, \\
G^1_1 &= e^{-\lambda} \left(\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4} - \frac{\lambda'}{r} \right) + e^{-\nu} \left(-\frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{4} - \frac{\dot{\lambda}^2}{4} \right) \Leftarrow R^1_1 \\
&+ e^{-\lambda} \left(-\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\lambda'}{r} - \frac{\nu'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + e^{-\nu} \left(\frac{\ddot{\lambda}}{2} - \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{4} + \frac{\dot{\lambda}^2}{4} \right) + \frac{1}{r^2} \Leftarrow -\frac{1}{2} \delta^1_1 R \\
&= -e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2}
\end{aligned}$$

である. 次に

$$R^2_2 = -\frac{1}{r^2} \left[\left\{ -1 + r \left(\frac{\lambda'}{2} - \frac{\nu'}{2} \right) \right\} e^{-\lambda} + 1 \right] = -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left[\left\{ -1 + r \left(\frac{\lambda'}{2} - \frac{\nu'}{2} \right) \right\} e^{-\lambda} \sin^2 \theta + \sin^2 \theta \right] = R^3_3$$

に注意すると,

$$\begin{aligned}
G^2_2 &= G^3_3 \\
&= e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{2r} - \frac{\lambda'}{2r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} \Leftrightarrow R^2_2 = R^3_3 \\
&\quad + e^{-\lambda} \left(-\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\lambda'}{r} - \frac{\nu'}{r} + \frac{\nu'\lambda'}{4} \right) + e^{-\nu} \left(\frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}^2}{4} - \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{4} \right) + \frac{1}{r^2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\delta^2_2 R = -\frac{1}{2}\delta^3_3 R \\
&= -\frac{1}{2}e^{-\lambda} \left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{\nu'\lambda'}{2} \right) + \frac{1}{2}e^{-\nu} \left(\ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{2} \right)
\end{aligned}$$

を得る.

Einstein 方程式, Schwarzschild 解

以上より Einstein 方程式 (95.6): $R^\mu_\nu - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu R = \frac{8\pi k}{c^4}T^\mu_\nu$ は, 未知関数 $\lambda(r, t), \nu(r, t)$ に対する式

$$\frac{8\pi k}{c^4}T^1_1 = -e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2}, \quad (100.4)$$

$$\frac{8\pi k}{c^4}T^2_2 = \frac{8\pi k}{c^4}T^3_3 = -\frac{1}{2}e^{-\lambda} \left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{\nu'\lambda'}{2} \right) + \frac{1}{2}e^{-\nu} \left(\ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{2} \right), \quad (100.5)$$

$$\frac{8\pi k}{c^4}T^0_0 = -e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) + \frac{1}{r^2}, \quad (100.6)$$

$$\frac{8\pi k}{c^4}T^1_0 = -e^{-\lambda} \frac{\dot{\lambda}}{r} \quad (100.7)$$

になる. 真空中, すなわち, 場を生ずる質量の外側での中心対称な場を考え $T^\mu_\nu = 0$ とおくと,

$$\text{式 (100.4)} \Rightarrow e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = 0, \quad (100.8)$$

$$\text{式 (100.6)} \Rightarrow e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 0, \quad (100.9)$$

$$\text{式 (100.7)} \Rightarrow \dot{\lambda} = 0 \quad (100.10)$$

が得られる. 式 (100.8) と式 (100.9) を辺々足すと, $f(t)$ を時間だけの関数として

$$\lambda' + \nu' = 0, \quad \therefore \lambda + \nu = f(t) \quad (100.11)$$

となる.

ところで ds^2 の表式 (100.2) の形を壊すことなく, 時間に $t = f(t')$ という形の任意の変換を施すことができる. これは ν に任意の時間の関数を加えることと同等である. この任意性を利用すると, 一般性を失うことなく

$$\lambda + \nu = 0$$

とおくことができる. ここで式 (100.10) より λ は時間に依らないから $\nu = -\lambda$ も時間に依らず, 真空中の中心対称な重力場は静的な場となることが結論される.

式 (100.9) は

$$1 = e^{-\lambda}(1 - r\lambda') = (re^{-\lambda})', \quad \therefore e^{-\lambda} = 1 - \frac{r_g}{r}$$

と積分される (r_g は積分定数). 重力源となる星の質量を m とすると, 重力場が弱いときの式 (87.12): $g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2}$ における重力ポテンシャル ϕ に対して Newton の万有引力の法則 (99.4): $\phi = -\frac{km}{r}$ が満たされるためには $r_g = \frac{2km}{c^2}$ ととれば良い^{*4}. 定数 r_g は重力半径と呼ばれる. こうして Schwarzschild 解

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) (cdt)^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} \quad (100.14)$$

が得られる ($r > r_g$).

^{*4} ここで ds^2 の表式 (100.2) における極座標 r を, Newton の万有引力の法則 (99.4): $\phi = -\frac{km}{r}$ における r と同一視した.

10.3 静的な完全流体を源とするアインシュタイン方程式

■ ストレス-エネルギーテンソル (p.340) 式 (10.7):

$$ds^2 = -e^{2\Phi} dt^2 + e^{2\Lambda} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

で与えられる球対称時空のメトリックに対して、星を構成している流体が静止しているとき、流体の速度は $\vec{U} = (e^{-\Phi}, \mathbf{0})$ となるから、ストレス-エネルギーテンソル

$$T^{\mu\nu} = (p + \rho)U^\mu U^\nu + pg^{\mu\nu}$$

の全成分は

$$\text{式 (10.20): } T_{00} = (p + \rho)(-e^\Phi)^2 + p(-e^{2\Phi}) = \rho e^{2\Phi},$$

$$\text{式 (10.21): } T_{rr} = rg_{rr} = pe^{2\Lambda},$$

$$\text{式 (10.22): } T_{\theta\theta} = pg_{\theta\theta} = pr^2,$$

$$\text{式 (10.23): } T_{\phi\phi} = pg_{\phi\phi} = pr^2 \sin^2 \theta \quad (\text{教科書では最右辺の } r^2 \text{ が落ちている})$$

となる。また、これ以外の成分 T_{0i}, T_{i0}, T_{ij} (ただし $i \neq j$) は、 $U^i = 0$ および $(g_{\mu\nu})$ が対角的であることからゼロとなる。

■ 状態方程式 (p.341) 流体に対して

$$p = p(\rho)$$

という形の状態方程式を仮定する。例えばエントロピーが一定の場合を考えると

$$p = p(\rho, S = \text{const}).$$

である。

■ 運動方程式 (p.341)

$$T^{r\alpha}_{;\alpha} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\rho + p) \frac{d\Phi}{dr} = -\frac{dp}{dr} \quad (11)$$

(静止流体に対する重力 (左辺) と圧力勾配 (右辺) のつり合い).

■ アインシュタイン方程式 (p.341~) Einstein 方程式 $G_{00} = 8\pi T_{00}$ により

$$G_{00} = \frac{1}{r^2} e^{2\Phi} \frac{d}{dr} [r(1 - e^{2\Lambda})] = \frac{2}{r^2} e^{2\Phi} \frac{dm(r)}{dr}, \quad m(r) \equiv \frac{1}{2} [r(1 - e^{2\Lambda})],$$

$$8\pi T_{00} = 8\pi \rho e^{2\Phi}$$

を等置すると,

$$dm(r) = 4\pi r^2 \rho(r) dr \quad (12)$$

となる。そこで $m(r)$ を質量関数と呼ぶ。

また Einstein 方程式 $G_{rr} = 8\pi T_{rr}$ により

$$G_{rr} = -\frac{1}{r^2} e^{2\Lambda} (1 - e^{-2\Lambda}) + \frac{2}{r} \Phi', \quad 8\pi T_{rr} = 8\pi p e^{2\Lambda}$$

を等置すると,

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{m(r) + 4\pi r^3 p}{r(r - 2m(r))} \quad (13)$$

となる.

以上の式 (11), 式 (12), 式 (13) および状態方程式 $p = p(\rho)$ から, 4 つの未知量 Φ, m, ρ, p が定まる.

10.3 について

■保存則 $T^{r\alpha}_{;\alpha} = 0$ から運動方程式 (10.27) の導出

$$0 = T^{r\alpha}_{;\alpha} = T^{r\alpha}_{,\alpha} + T^{\mu\alpha}\Gamma^r_{\mu\alpha} + T^{r\mu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}$$

において $g_{\mu\nu}$ と $T_{\mu\nu}$, したがって $T^{\mu\nu}$ は対角的なので

$$T^{rr}_{,r} + \sum_{\mu=0}^3 T^{\mu\mu}\Gamma^r_{\mu\mu} + T^{r\alpha}\Gamma^{\alpha}_{r\alpha} = 0$$

を得る.

ここで左辺第 1 項について, 式 (10.20-23) のストレス-エネルギーテンソルは

$$\begin{cases} T_{00} = \rho e^{2\Phi}, \\ T_{rr} = p e^{2\Lambda}, \\ T_{\theta\theta} = r^2 p, \\ T_{\phi\phi} = r^2 \sin^2 \theta p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T^{00} = (-e^{2\Phi})^{-2} \rho e^{2\Phi} = \rho e^{-2\Phi}, \\ T^{rr} = (e^{2\Lambda})^{-2} p e^{2\Lambda} = p e^{-2\Lambda}, \\ T^{\theta\theta} = (r^2)^{-2} r^2 p = \frac{p}{r^2}, \\ T^{\phi\phi} = (r^2 \sin^2 \theta)^{-2} r^2 \sin^2 \theta p = \frac{p}{r^2 \sin^2 \theta} \end{cases}$$

となるので

$$T^{rr}_{,r} = (p e^{-2\Lambda})_{,r} = (p_{,r} - 2p\Lambda_{,r}) e^{-2\Lambda}$$

である.

次に左辺第 2 項を考える. $\{\Gamma^r_{\mu\mu}\}$ (μ で和をとらない) について

$$\Gamma^r_{\mu\mu} = \frac{1}{2} g^{r\alpha} (g_{\alpha\mu,\mu} + g_{\mu\alpha,\mu} - g_{\mu\mu,\alpha}) = \frac{1}{2} g^{rr} (2g_{r\mu,\mu} - g_{\mu\mu,r})$$

より

$$\begin{cases} \mu = 0 \text{ のもの} & \Gamma^r_{00} = \frac{1}{2} g^{rr} (-g_{00,r}) = -\frac{1}{2} e^{-2\Lambda} (-e^{2\Phi})_{,r} = \Phi_{,r} e^{-2(\Lambda-\Phi)}, \\ \mu = r \text{ のもの} & \Gamma^r_{rr} = \frac{1}{2} g^{rr} g_{rr,r} = \frac{1}{2} e^{-2\Lambda} (e^{2\Lambda})_{,r} = \Lambda_{,r}, \\ \mu = \theta \text{ のもの} & \Gamma^r_{\theta\theta} = \frac{1}{2} g^{rr} (-g_{\theta\theta,r}) = -\frac{1}{2} e^{-2\Lambda} \times 2r = -r e^{-2\Lambda}, \\ \mu = \phi \text{ のもの} & \Gamma^r_{\phi\phi} = \frac{1}{2} g^{rr} (-g_{\phi\phi,r}) = -\frac{1}{2} e^{-2\Lambda} \times 2r \sin^2 \theta = -r \sin^2 \theta e^{-2\Lambda} \end{cases}$$

だから

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=0}^3 T^{\mu\mu}\Gamma^r_{\mu\mu} &= \rho e^{-2\Phi} \times \Phi_{,r} e^{-2(\Lambda-\Phi)} + p e^{-2\Lambda} \times \Lambda_{,r} + \frac{1}{r^2} p \times (-r e^{-2\Lambda}) + \frac{p}{r^2 \sin^2 \theta} \times (-r \sin^2 \theta e^{-2\Lambda}) \\ &= \left(\rho \Phi_{,r} + p \Lambda_{,r} - \frac{2p}{r} \right) e^{-2\Lambda} \end{aligned}$$

となる.

最後に左辺第 3 項において

$$\begin{aligned}
 \Gamma^{\alpha}_{r\alpha} &= \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (g_{\beta r, \alpha} + g_{\alpha\beta, r} - g_{r\alpha, \beta}) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=0}^3 g^{\alpha\alpha} g_{\alpha\alpha, r} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ (-e^{-2\Phi})(-e^{2\Phi})_{,r} + e^{-2\Lambda}(e^{-2\Lambda})_{,r} + \frac{1}{r^2}(r^2)_{,r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}(r^2 \sin^2 \theta)_{,r} \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left(2\Phi_{,r} + 2\Lambda_{,r} + 2 \cdot \frac{2}{r} \right) \\
 &= \Phi_{,r} + \Lambda_{,r} + \frac{2}{r}
 \end{aligned}$$

である.

以上より

$$\begin{aligned}
 0 &= T^{r\alpha}_{;\alpha} \\
 &= (p_{,r} - 2p\Lambda_{,r})e^{-2\Lambda} + \left(\rho\Phi_{,r} + p\Lambda_{,r} - 2\frac{p}{r} \right) e^{-2\Lambda} + \left(\Phi_{,r} + \Lambda_{,r} + \frac{2}{r} \right) p e^{-2\Lambda} \\
 &= \{ p_{,r} + (p + \rho)\Phi_{,r} \} e^{-2\Lambda} \\
 \Leftrightarrow (\rho + p) \frac{d\Phi}{dr} &= -\frac{dp}{dr} : (10.27)
 \end{aligned}$$

を得る.

なお左辺の Φ は重力ポテンシャルの対応物ではあるけれど、重力ポテンシャルそのものではないことに注意する.

■ Einstein 方程式の (r, r) 成分 (10.31) の導出 $m(r)$ の定義式

$$m \equiv \frac{1}{2} r(1 - e^{-2\Lambda}), \quad \therefore e^{-2\Lambda} = 1 - \frac{2m}{r}, \quad \therefore (g_{rr})e^{2\Lambda} = \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}} : (10.29)$$

を用いて Einstein 方程式 $G_{rr} = 8\pi T_{rr}$, すなわち

$$-\frac{1}{r^2} e^{2\Lambda} (1 - e^{-2\Lambda}) + \frac{2}{r} \Phi' = 8\pi p e^{2\Lambda}$$

から Λ を消去すると

$$\begin{aligned}
 \Phi' &= \frac{r}{2} \left\{ 8\pi p + \frac{1}{r^2} (1 - e^{-2\Lambda}) \right\} e^{2\Lambda} \\
 &= \frac{r}{2} \left(8\pi p + \frac{1}{r^2} \frac{2m}{r} \right) \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}} \\
 &= \frac{4\pi r^3 p + m}{r^2} \frac{r}{r - 2m} \\
 &= \frac{4\pi r^3 p + m}{r(r - 2m)} : (10.31)
 \end{aligned}$$

を得る. 教科書において最右辺の p が ρ となっているのは誤りと考えられる.

■基礎方程式 (10.27), (10.30), (10.31) の説明順序について 教科書では式 (10.28):

$$m(r) \equiv \frac{1}{2}r(1 - e^{-2\lambda}), \quad \therefore g_{rr} = e^{2\lambda} = \frac{1}{2 - \frac{2m(r)}{r}}$$

によって $m(r)$ を定義した結果, Einstein 方程式の (0, 0) 成分が $m(r)$ を意味付ける式 (10.30):

$$dm(r) = 4\pi r^2 \rho(r) dr$$

になった.

逆に式 (10.30): $dm(r) = 4\pi r^2 \rho(r) dr$ によって質量関数 $m(r)$ を定義すると Einstein 方程式の (0, 0) 成分は

$$g_{rr} = e^{2\lambda} = \frac{1}{2 - \frac{2m(r)}{r}}$$

を意味することになり, ここから Einstein 方程式の (r, r) 成分は式 (10.31):

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{m(r) + 4\pi r^3 p}{r(r - 2m(r))}$$

に書き換えられる.

10.4 外部時空

■シュワルツシルト・メトリック (p.342~) 星の外部を考えると $p = 0, \rho = 0$ なので,

$$\begin{aligned} \text{基礎方程式 (12): } \frac{dm(r)}{dr} &= 4\pi r^2 \rho(r) \quad \rightarrow \quad m(r) = M, \\ \text{基礎方程式 (13): } \frac{d\Phi}{dr} &= \frac{m(r) + 4\pi r^3 p}{r(r - 2m(r))} \quad \rightarrow \quad \frac{d\Phi}{dr} = \frac{m}{r(r - 2m)} \end{aligned}$$

となり,

$$m(r) = M, \quad e^{2\lambda} = \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}, \quad e^{2\Phi} = 1 - \frac{2M}{r}$$

を得る. よって星の外部のメトリックは Schwarzschild メトリック

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} + r^2 d\Omega^2$$

の形となる.

■メトリックの一般性 (p.343) 星が崩壊する場合のように, メトリックが静的でないときにも, 球対称かつ無限遠で平坦となるのは Schwarzschild メトリックのみである (Birkhoff の定理).

10.4 について

■その他の基礎方程式 星の外部では $p = 0, \rho = 0$ なので, 状態方程式 (10.25): $p = p(\rho)$ は考える必要がなく, また基礎方程式 (11):

$$(\rho + p) \frac{d\Phi}{dr} = - \frac{dp}{dr}$$

は自動的に満たされている.

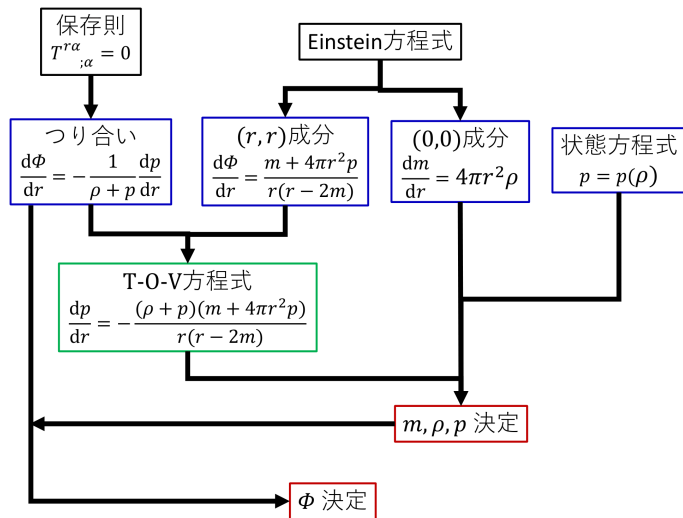


図 21 基礎方程式の導出から未知量 Φ, m, ρ, p の決定までの流れ

■式 (10.35): $e^{2\Phi} = 1 - \frac{2M}{r}$ の導出

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{M}{r(r-2M)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r(r-2M)} - \frac{1}{r} \right), \quad 2\Phi = \ln \left| \frac{r-2M}{r} \right| + A, \quad e^{2\Phi} = B \left(1 - \frac{2M}{r} \right)$$

であり (A, B は任意定数), $r \rightarrow \infty$ のとき $\Phi \rightarrow 0$ となることを要求すると $B = 1$ と定まるので, 式 (10.35):

$$e^{2\Phi} = 1 - \frac{2M}{r}$$

を得る.

■メトリックの一般性 (p.343) について 文献 [3, pp.234-236] において球対称な重力場に対する Schwarzschild 解の導出を通して, Birkhoff の定理を証明したことになる.

10.5 星の内部構造

$$\text{基礎方程式 (11): } \frac{d\Phi}{dr} = -\frac{1}{\rho+p} \frac{dp}{dr}, \quad \text{基礎方程式 (13): } \frac{d\Phi}{dr} = \frac{m(r) + 4\pi r^3 p}{r(r-2m(r))}$$

を等置すると T-O-V 方程式

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{(\rho+p)(m+4\pi r^3 p)}{r(r-2m)}$$

を得る. T-O-V 方程式の導出から未知量 Φ, m, ρ, p の決定までの流れを図 21 にまとめておく.

■方程式の一般的解法 (p.344~) T-O-V 方程式および基礎方程式 (12): $\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho$ から 2 つの積分定数が現れる. これを決定するための条件を考える.

局所的平坦性定理に注意して $r = 0$ の点で時空が局所的に平坦になることを要求すると,

$$g_{rr} = \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}} \rightarrow 1 \quad (r \rightarrow 0)$$

とならなければならないので*5, $r \rightarrow 0$ よりも速く $m \rightarrow 0$ とならなければならない. そこで1つ目の条件として

$$m(r=0) = 0$$

が得られる. もう1つの条件として $r=0$ における中心密度 ρ_c (したがって $p_c = p(\rho_c)$) を与えると, それに応じて星のモデルが決まる.

ここで T-O-V 方程式における $r-2m$ について, ふつうの星の場合, 星の内部で $r-2m > 0$ であることを説明する. $r \rightarrow 0$ よりも速く $m \rightarrow 0$ となることから, $r=0$ の近くでは $r-2m > 0$ である. 次に r の増大に伴って $r-2m$ が減少する場合を考える. $r-2m$ の符号が入れ替わる直前には $r-2m \simeq \varepsilon (> 0)$ となり, T-O-V 方程式によれば圧力勾配は $1/\varepsilon$ に比例する負の値をとる. このため $r-2m=0$ となる r に達する前に圧力は急激に減少して $p=0$ となる. ところが $p=0$ は星の外部を意味するから, 星の内部では $r-2m > 0$ となっている.

すると T-O-V 方程式

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{(\rho+p)(m+4\pi r^3 p)}{r(r-2m)}$$

より $\frac{dp}{dr} < 0$ となって, 圧力は中心から外に向かって単調に減少する. $p=0$ となる星の表面 $r=R$ において

$$g_{rr} = \begin{cases} \frac{1}{1-\frac{2m(r)}{r}} & (r \leq R) \\ \frac{1}{1-\frac{2M}{r}} & (r \geq R) \end{cases}$$

の連続性を要求すると

$$M = m(R) \equiv \int_0^R \rho(r) 4\pi r^2 dr$$

となる. ただしこれは $4\pi r^2 dr$ が, 動径座標の幅 dr を持つ球殻の固有体積

$$\int_{\text{球殻}} d^3x \sqrt{-g} = \int_{\text{球殻}} dr d\theta d\phi e^{\Lambda+\Phi} r^2 \sin\theta = e^{\Lambda+\Phi} 4\pi r^2 dr$$

と異なるため, 流体要素の固有エネルギーとは見なせない. ここで得られた M を用いて

$$g_{00}(r=R) = -e^{2\Phi(r=R)} = 1 - \frac{2M}{R}$$

であることから, Φ に対する微分方程式 (11): $(\rho+p) \frac{d\Phi}{dr} = -\frac{dp}{dr}$ の積分定数が定まる.

星の内部のメトリックを決める以上の議論においてはじめて, $r=0$ が星の, したがって時空の内部の点であると仮定したことに注意する.

■ニュートンの星の構造 (p.346) Newton 的な極限

$$\begin{aligned} g_{rr} = \frac{1}{1-\frac{2m}{r}} \simeq 1 & \rightarrow m \ll r, \\ p \ll \rho & \rightarrow 4\pi r^3 p \ll 4\pi r^3 \rho \sim m \end{aligned}$$

*5 丁寧に述べると, $r=0$ を中心とする微小な半径 ε の円について, 半径の固有長さ $\sqrt{g_{rr}}\varepsilon$ と円周の固有長さ $2\pi\varepsilon$ の比が 2π にならなければならないことから, $g_{rr}=1$ が要求される.

を考えると, T-O-V 方程式は

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{(\rho+p)(m+4\pi r^3 p)}{r(r-2m)} \simeq -\frac{\rho m}{r^2}$$

となる (青字の項を無視した). このように重力を支えるのに必要な圧力勾配は, 一般相対論の場合と比べて Newton 的な場合の方が小さくなる.

10.5 について

■T-O-V 方程式 (10.39) の訂正 式 (10.31) の訂正 $\rho \rightarrow p$ に伴って,

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{(\rho+p)(m+4\pi r^3 \rho)}{r(r-2m)} \rightarrow \frac{dp}{dr} = -\frac{(\rho+p)(m+4\pi r^3 p)}{r(r-2m)}$$

と訂正する.

■「式 (10.39) により圧力は中心から外に向かって単調に減少する」(p.344, 1.20) について 「方程式の一般的解法 (p.344~)」の最終段落「ふつうの星の場合には $2m(r) < r$ がつねに成り立つ……」(p.346, 1.5~) を参照.

■固有体積の式 (10.42) について Jacobian として 3次元計量テンソル γ_{ij} の行列式 γ の平方根 $\sqrt{\gamma}$ ではなく,

$$g \equiv \begin{vmatrix} -e^{2\Phi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\Lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{vmatrix} = -e^{2(\Phi+\Lambda)} r^4 \sin^2 \theta$$

に対して $\sqrt{-g}$ を用いなければならない. γ は

$$\gamma = \frac{-g}{g_{00}} = e^{2\Lambda} r^4 \sin^2 \theta$$

によって与えられる [3, pp.262-263].

■T-O-V 方程式の Newton 的極限 (10.44) について 式 (10.44):

$$\frac{dp}{dr} \simeq -\frac{\rho m}{r^2}$$

が「ニュートン的な星の平衡状態の方程式そのものである」(p.346, 1.19) ことについて, 流体の単位体積中の質量 ρ が重力場 (動径成分 $-m/r^2$) から受ける重力が右辺であり, 流体の単位体積に働く圧力が右辺で表される.

10.6 星の内部の厳密解

■シュワルツシルトの密度一定の内部解 (p.347~) 高密度の中性子性などを念頭に, [近似的に] $\rho = (\text{一定})$ の場合を考えると

$$\text{基礎方程式 (12): } \frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \quad \rightarrow \quad m(r) = \begin{cases} \rho \times \frac{4}{3}\pi r^3 & (r \leq R) \\ \rho \times \frac{4}{3}\pi R^3 \equiv M & (r \geq R) \end{cases}$$

となる。これを用いて残りの未知変数 p, Φ は

$$\begin{aligned} \text{T-O-V方程式} &\rightarrow p = \rho \frac{(1 - 2Mr^2/R^3)^{1/2} - (1 - 2M/R)^{1/2}}{3(1 - 2M/R)^{1/2} - (1 - 2Mr^2/R^3)^{1/2}}, \\ \text{式 (11): } (\rho + p) \frac{d\Phi}{dr} = -\frac{dp}{dr} &\rightarrow e^\Phi = \frac{3}{2} \sqrt{1 - \frac{2M}{R}} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{2Mr^2}{R^3}} \quad (r \leq R) \end{aligned}$$

と決定され、同時に $M/R < 4/9$ も見出される。

■ブハダールの内部解 (p.348～) [人為的なモデルとして] 状態方程式

$$\rho = 12(p_* p)^{1/2} - 5p$$

を考えると (p_* は任意定数), これは

1. 星の内部すべての点で因果律を破らないように,
局所的な音速 $(dp/d\rho)^{1/2}$ を 1 より小さくし得る.
2. Newton 的極限で $n = 1$ のポリトロープ
(Newton 理論で厳密に解ける数少ない場合の 1 つ) に一致する.

この状態方程式に対する解は Buchdahl によって

$$\begin{aligned} e^{2\Phi} &= (1 - 2\beta)(1 - \beta - u)(1 - \beta - u)^{-1}, \\ e^{2\Lambda} &= (1 - 2\beta)(1 - \beta - u)(1 - \beta - u)^{-1}(1 - \beta + \beta \cos Ar')^{-2}, \\ p(r) &= A^2(1 - 2\beta)u^2[8\pi(1 - \beta + u)^2]^{-1}, \\ \rho(r) &= 2A^2(1 - 2\beta)u \left(1 - \beta - \frac{3}{2}u\right) [8\pi(1 - \beta + u)^2]^{-1} \end{aligned}$$

と求められた。ただしここで新たな任意定数 β を導入し,

$$u(r') \equiv \beta \frac{\sin Ar'}{Ar'}, \quad A^2 \equiv \frac{288\pi p_*}{1 - 2\beta}, \quad r(r') = r' \frac{1 - \beta + u(r')}{1 - 2\beta}$$

によって $u(r') \equiv u$ および p_* に代わる定数 A , r に代わる座標 r' を定義した。

β は $\beta \rightarrow 0$ が非相対論的極限に対応するようなパラメーターであること、モデルは $0 < \beta < 1/6$ で有効となり、相対論的な領域までカバーしていることが分かる。

10.6 について

■密度一定の場合の T-O-V 方程式 (10.48) について T-O-V 方程式 (10.39) を

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{(\rho + p)(m + 4\pi r^3 \rho)}{r(r - 2m)} \rightarrow \frac{dp}{dr} = -\frac{(\rho + p)(m + 4\pi r^3 p)}{r(r - 2m)}$$

と訂正したことに注意する。

■式 (10.49) の導出 式 (10.48) を変数分離すると

$$\int \frac{dp}{(\rho + p)(\rho + 3p)} = -\frac{4}{3}\pi \int \frac{rdr}{1 - \frac{8\pi\rho}{3}r^2}$$

となる。左辺の積分は

$$\int \frac{dp}{(\rho+p)(\rho+3p)} = \frac{1}{2\rho} \int \left(\frac{1}{\frac{\rho}{3}+p} - \frac{1}{\rho+p} \right) dp = \frac{1}{2\rho} \ln \left(\frac{\frac{\rho}{3}+p}{\rho+p} \right) + \text{const.}$$

と計算できる。一方、右辺の積分は

$$\int \frac{rdr}{1 - \frac{8\pi\rho}{3}r^2} = -\frac{3}{16\pi\rho} \int \frac{d\left(1 - \frac{8\pi\rho}{3}r^2\right)}{1 - \frac{8\pi\rho}{3}r^2} = -\frac{3}{16\pi\rho} \ln \left| 1 - \frac{8\pi\rho}{3}r^2 \right| + \text{const.}$$

と実行できるので

$$\ln \left(\frac{\frac{\rho}{3}+p}{\rho+p} \right) = \frac{1}{2} \ln \left| 1 - \frac{8\pi\rho}{3}r^2 \right| + \text{const.}, \quad \therefore \frac{\frac{\rho}{3}+p}{\rho+p} = \text{const} \times \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{1/2}$$

となる。密度 ρ は星内部の位置に依らずに一定であり、 $r \rightarrow 0$ で $p \rightarrow p_c$, $\frac{m}{r} \rightarrow 0$ となることから積分定数を定めると、式 (10.49):

$$\frac{\rho+3p}{\rho+p} = \frac{\rho+3p_c}{\rho+p_c} \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{1/2}$$

を得る。

■式 (10.50) の導出 式 (10.49) に $r = R$ での値 $m = M, p = 0$ を代入すると

$$\frac{\rho+3p_c}{\rho+p_c} \left(1 - \frac{2M}{R} \right)^{1/2} = 1, \quad (14)$$

$$\therefore \frac{\rho+3p_c}{\rho+p_c} \left(1 - \frac{8\pi\rho R^2}{3} \right)^{1/2} = 1 \quad (15)$$

となる。式 (15) を R^2 について解くと式 (10.50):

$$R^2 = \frac{3}{8\pi\rho} \left\{ 1 - \left(\frac{\rho+p_c}{\rho+3p_c} \right)^2 \right\}$$

を得る。

■式 (10.51) の導出 式 (14) を p_c について解くと

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{2M}{R} \right)^{-1/2} &= \frac{\rho+3p_c}{\rho+p_c} = 3 - \frac{2\rho}{\rho+p_c}, \\ \therefore p_c &= \frac{2\rho}{3 - \left(1 - \frac{2M}{R} \right)^{-1/2}} - \rho = \rho \frac{-1 + \left(1 - \frac{2M}{R} \right)^{-1/2}}{3 - \left(1 - \frac{2M}{R} \right)^{-1/2}} = \rho \frac{1 - \left(1 - \frac{2M}{R} \right)^{1/2}}{3 \left(1 - \frac{2M}{R} \right)^{1/2} - 1} : (10.51) \end{aligned}$$

を得る。

■式 (10.52) の導出 式 (10.49):

$$\frac{\rho+3p}{\rho+p} = \frac{\rho+3p_c}{\rho+p_c} \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{1/2}$$

の各項を

$$\begin{aligned}\frac{\rho + 3p}{\rho + p} &= 3 - \frac{2\rho}{\rho + p}, \\ \frac{\rho + 3p_c}{\rho + p_c} &= \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{-1/2} : (14), \\ \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{1/2} &= \left(1 - \frac{2Mr^2}{R^3}\right)^{1/2} \quad \left(\because m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho = M \frac{r^3}{R^3}\right)\end{aligned}$$

と書き換えて p について解くと

$$\begin{aligned}p &= -\rho + \frac{2\rho}{3 - \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{-1/2} \left(1 - \frac{2Mr^2}{R^3}\right)^{1/2}} \\ &= \rho \frac{-1 + \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{-1/2} \left(1 - \frac{2Mr^2}{R^3}\right)^{1/2}}{3 - \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{-1/2} \left(1 - \frac{2Mr^2}{R^3}\right)^{1/2}} \\ &= \rho \frac{\left(1 - \frac{2Mr^2}{R^3}\right)^{1/2} - \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{1/2}}{3 \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{1/2} - \left(1 - \frac{2Mr^2}{R^3}\right)^{1/2}} : (10.52)\end{aligned}$$

を得る。ここに現れる 2 つの根号 $\sqrt{1 - \frac{2M}{R}}$, $\sqrt{1 - \frac{2Mr^2}{R^3}}$ について, $\frac{M}{R} < \frac{4}{9}$ より

$$\frac{2Mr^2}{R^3} \leq \frac{2M}{R} \leq \frac{8}{9}$$

なので, その中身が正となることが保証される。

■「これが…… M/R についての一般的な上限である」(p.348, l.10,11) について 少なくとも $\rho =$ (一定) の場合には式 (10.51):

$$p_c = \rho \frac{1 - \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{1/2}}{3 \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{1/2} - 1}$$

が成り立つ。右辺は $R > \frac{9}{4}M$ のときに (分母) > 0 となり, またこのとき (分子) > 0 となるから, 「半径が $(9/4)M$ より小さい一様密度の星は存在しない」(10.7 節, 第 1 文)。

■ Φ の式 (10.54) について 「式 (10.27) から Φ を求めれば」(p.348, l.12) とあるけれど, T-O-V 方程式の下でこれと同等な式 (10.31):

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{m + 4\pi r^3 p}{r(r - 2m)} = \frac{\frac{Mr}{R^3} + 4\pi r p}{1 - \frac{2Mr^2}{R^3}}$$

を考える。 p の式 (10.52) より最右辺において

$$\frac{Mr}{R^3} + 4\pi r p = \frac{Mr}{R^3} \left(1 + 3 \frac{\left(1 - \frac{2Mr^2}{R^3}\right)^{1/2} - \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{1/2}}{3 \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{1/2} - \left(1 - \frac{2Mr^2}{R^3}\right)^{1/2}}\right) = \frac{Mr}{R^3} \frac{\left(1 - \frac{2Mr^2}{R^3}\right)^{1/2}}{\frac{3}{2} \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{1/2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2Mr^2}{R^3}\right)^{1/2}}$$

なので, これは

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{\frac{Mr}{R^3}}{\left(1 - \frac{2Mr^2}{R^3}\right)^{1/2} \left\{ \frac{3}{2} \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{1/2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2Mr^2}{R^3}\right)^{1/2} \right\}}$$

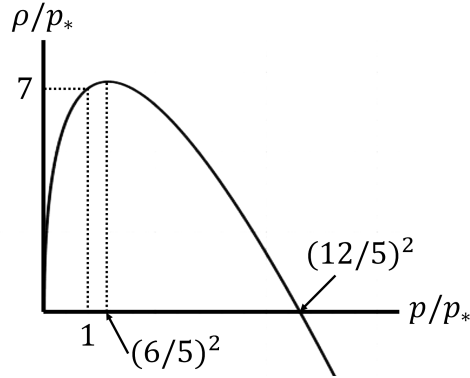


図 22 Buchdahl の内部解における状態方程式

と書き換えられる。また境界条件 (10.53): $g_{00}(R) = -e^{2\Phi(R)} = -\left(1 - \frac{2M}{R}\right)$ は

$$\Phi(R) = \ln \sqrt{1 - \frac{2M}{R}}$$

と書き換えられる。式 (10.54) の

$$\Phi(r) = \ln \left(\frac{3}{2} \sqrt{1 - \frac{2M}{R}} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{2Mr^2}{R^3}} \right)$$

は確かにこれらの微分方程式と境界条件を満たしている。

■音速が光速を超えない条件 (10.57) について Buchdahl の考えた状態方程式 (10.55):

$$\rho = 12(p_* p)^{1/2} - 5p$$

の概形は図 22 のようである。圧力が密度とともに単調増加する領域

$$0 < \frac{d\rho}{dp} = 6\sqrt{\frac{p_*}{p}} - 5 \Leftrightarrow p < \left(\frac{6}{5}\right)^2 p_*$$

を考えると、音速 $(dp/d\rho)^{1/2}$ が 1 より小さくなる条件は

$$1 < \frac{d\rho}{dp} = 6\sqrt{\frac{p_*}{p}} - 5 \Leftrightarrow p < p_*$$

であり、このとき $\rho < 7p_*$ である。

■式 (10.64–67) の確認 教科書の式 (10.64–67) の説明を補足しつつまとめる。

r の値をゼロから増大させたとき、したがって r' の値をゼロから増大させたとき、はじめて $u(r') \equiv \beta \frac{\sin Ar'}{Ar'}$: (10.58) がゼロとなる r' の値は $Ar' = \pi$ によって与えられる。

次に $e^{2\Phi}$ の式 (10.60), $e^{2\Lambda}$ の式 (10.61) に星の表面 $r' = \pi/A \equiv R'$ での値 $u = 0$, $Ar' = \pi$ を代入すると、式 (10.64):

$$\begin{aligned} \exp(2\Phi(r' = R')) &= (1 - 2\beta)(1 - \beta)(1 - \beta)^{-1} = (1 - 2\beta), \\ \exp(2\Lambda(r' = R')) &= (1 - 2\beta)(1 - \beta)(1 - \beta)^{-1}(1 - 2\beta)^{-2} = (1 - 2\beta)^{-1} \end{aligned}$$

を得る. また式 (10.59): $r(r') = r' \frac{1-\beta+u(r')}{1-2\beta}$ に表面 $r' = R'$ での値 $u = 0$ を代入すると, 式 (10.65):

$$R \equiv r(R') = R' \frac{1-\beta}{1-2\beta} = \frac{\pi}{A} \frac{1-\beta}{1-2\beta}$$

を得る.

ここで式 (10.43): $g_{00}(r=R) = -e^{2\Phi(r=R)} = -(1 - \frac{2M}{R})$ と式 (10.64): $e^{2\Phi(r=R)} = 1 - 2\beta$ を等置すると

$$\beta = \frac{M}{R}$$

が見出される. さらに赤方偏移の式 (10.13): $z = e^{-\Phi(r=R)} - 1$ に式 (10.64): $e^{2\Phi(r=R)} = 1 - 2\beta$ を代入すると, 式 (10.66):

$$z_S = (1 - 2\beta)^{-1/2} - 1$$

を得る. この赤方偏移は重力によってもたらされており, 重力の弱い非相対論的極限では $z_S = 0$ となる. これは $\beta = 0$ に対応する.

最後に星の質量の式 (10.67) は

$$\begin{aligned} M &= R\beta \\ &= \frac{\pi\beta(1-\beta)}{(1-2\beta)A} \quad (\because R \text{ の式 (10.65)}) \\ &= \left(\frac{\pi}{288p_*(1-2\beta)} \right)^{1/2} \beta(1-\beta) \quad (\because A \text{ の式 (10.58)}) \end{aligned}$$

として得られる.

■ p/ρ の最大値 (10.69) について 式 (10.68):

$$\frac{p}{\rho} = \frac{1}{2}u \left(1 - \beta - \frac{3}{2}u \right)^{-1}$$

において, 星の内部 $0 \leq r' \leq R' = \pi/A$ では $u(r') \equiv \beta \frac{\sin Ar'}{Ar'} \geq 0$ である. ところで左辺 $\frac{p}{\rho}$ は正なので, 右辺において $1 - \beta - \frac{3}{2}u$ もまた正であることが要求される. このことと $0 \leq r' \leq R' = \pi/A$ の範囲では $u(r')$ は r' の単調減少関数となることを考え合わせると, p/ρ は r' の増大に伴って単調減少することが分かる. よって p/ρ は $r' = 0$ で最大値 (10.69): $\beta(2 - 5\beta)^{-1}$ をとる ($\lim_{r' \rightarrow 0} \frac{\sin Ar'}{Ar'} = 1$).

■ 「この式の値が $1/7$ より小さい」 (p.350, 1 番下の行) について 状態方程式 (10.55) の両辺を p で割り, 式 (10.57): $p < p_*$ を用いると

$$\frac{\rho}{p} = 12\sqrt{\frac{p_*}{p}} - 5 > 7, \quad \therefore \frac{p}{\rho} < \frac{1}{7}$$

となる. よって $\frac{p_c}{\rho_c} < \frac{1}{7}$ である.

10.7 現実の星と重力崩壊

■ プハダールの定理 (p.351) 任意のモデルにおいて半径が $9M/4$ より小さい星は崩壊する (Buchdahl の定理). 星が崩壊している間, 崩壊の後には外部は Schwarzschild メトリックを持つ.

■恒星質量程度のブラックホールの形成 (p.351～) 星の進化のあらすじを以下にまとめる*6.

- 水素がヘリウムに変わる核反応が定常的に起こっている星 = 主系列星
- 中心核領域の水素がヘリウムに変わると、中心核はエネルギー源を失い収縮し始める
 - 中心核は圧縮され、高温になる (→ 崩壊してブラックホールになることがある)
 - ヘリウムが炭素と酸素に変換される核反応が開始する
 - エネルギーが放出され、恒星の外層は膨張する
 - 表面温度は低くなる = 赤色巨星
 - 光度 [内部からのエネルギー流束] が大部分の物質を吹き飛ばし、惑星状星雲を作る
 - $\left\{ \begin{array}{l} \text{量子力学的圧力に支えられた白色矮星 (中心部分の温度が低い場合)} \\ \text{核反応によりケイ素や鉄が作られる (中心部分の温度が高い場合)} \end{array} \right.$

次に星の回転や磁場を考慮しない場合を考える。

- 軽い星 …… 重力を量子力学的圧力で支えられる。
- 十分に重い星 …… 重力を量子力学的圧力で支えきれず、中心核は崩壊する。
 - 恒星が重すぎなければ、
原子核の反発力により物質ははね返され (II 型超新星爆発)、中性子星が残る。
 - 恒星の質量がもっと大きい場合、
 γ 線バーストを伴いながら恒星質量程度のブラックホールになる。

最後に星の化学組成を考える。

- 種族 I …… 太陽に似た元素組成を持つ。最近形成された恒星の大部分が属する。
- 種族 III …… ビッグバンで生み出された水素とヘリウムのみから成り、第一世代の恒星と呼ばれる。
短時間で中間質量ブラックホール
(恒星質量ブラックホールと超大質量ブラックホールの間の質量を持つ) になる。

■量子力学的圧力 (p.354～) 体積 V の中の電子気体を考えると、運動量空間の体積要素 h^3/V の中に 2 つの状態 (スピン “上向き” と “下向き”) がある。よって冷却された N 個の電子が $0 \leq p \leq p_f$ (p_f : Fermi 運動量) の運動量状態を埋め尽くしたとすると、

$$N = \int_0^{p_f} 2 \cdot \frac{4\pi p^2 dp}{h^3/V} = V \frac{8\pi}{3} \frac{p_f^3}{h^3}$$

となる。これは粒子数密度 $n \equiv \frac{N}{V} = \frac{8\pi}{3} \frac{p_f^3}{h^3}$ によって Fermi 運動量が

$$p_f = \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{1/3} h n^{1/3}$$

と決まることを意味する。電子のエネルギー密度は

$$\rho \equiv \frac{E}{V}, \quad E = \int_0^{p_f} (m^2 + p^2)^{1/2} \cdot 2 \cdot \frac{4\pi p^2 dp}{h^3/V}$$

*6 矢印は時間順序または (緩やかな) 因果関係を表す。

と表される。

以上の Fermi 運動量 p_f とエネルギー密度 ρ の表式を第一法則 $dE = -pdV$ と考え合わせると、電子の [量子力学的] 圧力 p の表式が見出される*7。相対論的極限では

$$p \simeq \frac{1}{3}\rho$$

であり、これは光子気体の満たす関係と同じである。

■白色矮星 (p.356～) ふつうの星が圧縮されると、主に原子核気体によってもたらされる重力を、電子気体の量子力学的圧力が支える状態となる。原子核気体の質量密度を ρ と書き*8、星の質量を M 、半径を R 、密度 ρ の典型的な値を $\bar{\rho}$ 、圧力 p の典型的な値を \bar{p} とすると

$$\begin{aligned} M &= R^3 \bar{\rho}, \\ \text{力のつり合い } \frac{dp}{dr} &= -\frac{\rho m}{r^2} \quad \rightarrow \quad \frac{\bar{p}}{R} = \bar{\rho} \frac{M}{R^2}, \\ \text{相対論的な電子の状態方程式 } p &= \frac{1}{3}\rho_e \quad \rightarrow \quad \bar{p} = k \bar{\rho}^{4/3}, \quad k \equiv \frac{2\pi}{3h^3} \left(\frac{3h^3}{8\pi\mu m_p} \right)^{4/3} \end{aligned}$$

である (m_p は陽子の質量, μ は電子数と核子数の比)。ここから質量の値を評価すると $M \sim M_\odot$ となる。これは電子気体の量子力学的圧力が支え得る最大質量 (Chandrasekhar 限界質量) の目安を与える。

■中性子星 (p.357～)

- 白色矮星の密度 $\rho \lesssim 10^{10} \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ よりも高い中心密度を持つ安定な星としては、 $\rho \gtrsim 10^{16} \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ の中性子星がある。
- 中性子星では中性子の密度 ρ が重力の源であり、中性子の量子力学的圧力 $p = \frac{1}{3}\rho$ がこれを支えている。Newton 重力の式を用いることができず、上限質量を与える単純な方法はない。
- 星の中心では中性子が分解してクォークになっている可能性がある。このような場合に対する状態方程式が数多く提唱されており、それによれば中性子星の上限質量は $1.5M_\odot$ から $2.5M_\odot$ の範囲にあるとまでは言える。
- 連星系のパルサーを成す中性子星に対して質量を測定すると、その値は $1.4M_\odot$ のまわりに集中していることが分かる。
(相手の星からガスが流入して星が回転する場合、質量の上限は引き上げられる。)

10.7 について

■量子力学的圧力の式 (10.77) について 第一法則

$$p = -\frac{dE}{dV} = -\frac{d}{dV}(\rho V) = -V \frac{d\rho}{dV} - \rho$$

の最右辺における $\frac{d\rho}{dV}$ を考える。

$$\rho = \int_0^{p_f} f(p) dp, \quad f(p) \equiv (m^2 + p^2)^{1/2} \frac{8\pi p^2}{h^3}$$

*7 運動量と圧力に同じ記号 p が用いられているけれど、誤解の恐れはないだろう。

*8 電子気体のエネルギー密度と混同しないように注意する。

と書き, ρ の V 依存性が積分の上限 p_f にのみ含まれることに注意すると

$$\frac{d\rho}{dV} = \frac{dp_f}{dV} \frac{d}{dp_f} \int_0^{p_f} f(p) dp = f(p_f) \frac{dp_f}{dV}$$

と計算できる. よって p.355, l.17 の式

$$p = -V \frac{8\pi p_f^2}{h^3} (m^2 + p_f^2)^{1/2} \frac{dp_f}{dV} - \rho$$

を得る.

ここで

$$\begin{aligned} V \frac{dp_f}{dV} &= V \frac{dn}{dV} \frac{dp_f}{dn} \\ &= V \left(-\frac{N}{V^2} \right) \frac{dp_f}{dn} = -n \frac{dp_f}{dn} \quad (n = N/V \text{ を繰り返し用いた}) \\ &= -\frac{1}{3} \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{1/3} h n^{1/3} = -\frac{1}{3} p_f \quad (p_f \text{ の式 (10.75) を繰り返し用いた}) \end{aligned}$$

とすると式 (10.77):

$$p = \frac{8\pi}{3h^3} p_f^3 (m^2 + p_f^2)^{1/2} - \rho$$

を得る.

■ 相対論的極限の式 (10.78), (10.79) について ρ の式 (10.76) において, 積分範囲 $0 \leq p \leq p_f$ 全体にわたって $(m^2 + p^2)^{1/2} \simeq p$ と近似すると, 相対論的極限の式 (10.78):

$$\rho \simeq \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{p_f} p^3 dp = \frac{2\pi}{h^3} p_f^4$$

を得る. また p の式 (10.77) において $(m^2 + p_f^2)^{1/2} \simeq p_f$ と近似すると

$$\begin{aligned} p &\simeq \frac{8\pi}{3h^3} p_f^4 - \rho \\ &\simeq \frac{8\pi}{3h^3} p_f^4 - \frac{2\pi}{h^3} p_f^4 = \frac{2\pi}{3h^3} p_f^4 \simeq \frac{1}{3} \rho : (10.79) \quad (\rho \text{ の式 (10.78) を繰り返し用いた}) \end{aligned}$$

を得る.

■ 「それらの気体は同じ温度であり, ……小さな運動量をもつ」 (p.356, l.10~12) について $\sqrt{m^2 + p^2} \sim kT$ による.

■ 質量密度の式 (10.80) について $\rho = (\text{核子質量}) \times (\text{核子数密度})$ において

$$(\text{核子質量}) \simeq m_p, \quad (\text{核子数密度}) \simeq \mu n_e$$

とすれば良い.

■相対論的な電子の状態方程式 (10.81) について 式 (10.80) の質量密度と区別するために電子気体のエネルギー密度を ρ_e と書くと, 状態方程式 (10.79): $p = \frac{1}{3}\rho_e$ は

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{3}\rho_e \\ &= \frac{1}{3} \frac{2\pi p_f^4}{h^3} \quad (\because \rho_e \text{ の式 (10.78)}) \\ &= \frac{2\pi}{3h^3} \left(\frac{3h^3}{8\pi} \right)^{4/3} n_e^{4/3} \quad (\because p_f \text{ の式 (10.75)}) \\ &= \frac{2\pi}{3h^3} \left(\frac{3h^3}{8\pi\mu m_p} \right)^{4/3} \rho^{4/3} \quad (\because \rho \text{ の式 (10.80)}) \\ &= k\rho^{4/3} : (10.81), \quad k \equiv \frac{2\pi}{3h^3} \left(\frac{3h^3}{8\pi\mu m_p} \right)^{4/3} \end{aligned}$$

と書き換えられる.

■質量の式 (10.85) の数係数について 式 (10.83): $M = R^3\bar{\rho}$ の代わりに数係数を補った $M = \frac{4}{3}\pi R^3\bar{\rho}$ を用いれば

$$\begin{aligned} k\bar{\rho}^{1/3} &= \frac{M}{R} : (10.84) \\ &= M \left(\frac{4\pi\bar{\rho}}{3M} \right)^{1/3} = \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} M^{2/3}\bar{\rho}^{1/3}, \quad \therefore M = \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{1/2} k^{3/2} \end{aligned}$$

となって式 (10.85) の中央の表現を得る. 一方, 式 (10.85) の最右辺の表現を得るには, 数係数 $\frac{4}{3}\pi$ を除いて得られる式 $M = k^{3/2}$ を用いなければならない. なおここでは大雑把な評価をしているため, 正確な数係数を求めることはあまり意味がない.

第 10 章のまとめ

最後に第 10 章の内容を簡単にまとめておく (ここでは 10.7 節の内容は割愛する).
静的な球対称時空のメトリックは

$$ds^2 = -e^{2\Phi} dt^2 + e^{2\Lambda} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

によって与えられ, 2つの未知関数 $\Lambda(r), \Phi(r)$ を含む (10.1 節, 10.2 節).

Einstein 方程式より, 星の外部 (真空) のメトリックは

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

で表される Schwarzschild メトリックとなる (10.4 節).

一方, 星の内部を考えると, 星を構成している流体に関して熱力学的に独立な 2 変数 p, ρ と, メトリックの未知関数 $\Lambda(r), \Phi(r)$ を合わせた 4 つの未知量がある. これらを決定する 4 つの基礎方程式が見出される (10.3 節, 10.5 節). 基礎方程式の導出から未知量 Φ, m, ρ, p (質量関数 $m(r)$ は $\Lambda(r)$ に関係付けられる) の決定までの流れについて, 10.5 節の要約における図 21 にまとめてある.

基礎方程式を解析的に解けるかは状態方程式の形に左右される. 10.6 節では

- 密度が一定の場合に対する解の導出
- Buchdahl の考えた (やや人為的な) 状態方程式に対する解の紹介

が成された.

11 シュワルツシルト幾何学とブラックホール

11.1 シュワルツシルト時空での質点の運動

Schwarzschild メトリックは球対称ブラックホールの幾何学でもある。

■ニュートン重力におけるブラックホール (p.367～) ブラックホールと同じような天体は 2 世紀ほど前に想像されていた。Newton 理論においても天体の質量を固定して半径を小さくすると、その表面から放出された光子は脱出できなくなることが分かる。実際、質量 M 、半径 R の星の表面から初速 v で投げ出された粒子が脱出できなくなる条件

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} \geq 0$$

は、与えられた質量 M および光速 $v = c$ (ここでは $c = 1$ とおかない) に対して半径の条件

$$R \geq \frac{2GM}{c^2}$$

を与える ($R < \frac{2GM}{c^2}$ となると光は脱出できなくなる)。太陽質量に対して光が脱出できなくなる半径は数 km となる。

- 中性子星の合体によりブラックホールが形成され得る。
- 半径 $R = \frac{2GM}{c^2}$ のブラックホールの平均密度

$$\bar{\rho} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \propto \frac{1}{M^2}$$

は質量 M が大きいほど小さい。

キューサーを活動させているブラックホールの質量は $10^9 M_\odot$ 程度であると考えられており、このとき密度 $\bar{\rho}$ は水のそれと同程度である。

ブラックホールは光が「表面」から外へ出ることはなく、またその表面は「何もない空間」であるという点で上記の Newton 的な暗い星と異なる。

■保存量 (p.369～) 座標系 (t, r, θ, ϕ) に対しても四元運動量 $p^\mu = dx^\mu/d\tau$ によって定義される (7.4 節とその補足を参照)。光子に対しては固有時間 τ を用いることができないので [$d\tau = ds = 0$ となるから]、代わりに (アフィン) パラメーター λ を用いる: $p^\mu = dx^\mu/d\lambda$ 。 $p^r = dr/d\lambda$ はパラメーター λ の定義と見なされる。さて、対称性と保存則の関係 (7.4 節) を思い出すと、メトリックが時間に依らないことから

$$m \neq 0 \text{ の粒子に対して } \tilde{E} \equiv -p_0/m, \quad \text{光子に対して } E \equiv -p_0$$

が保存し、メトリックが ϕ に依らないことから

$$m \neq 0 \text{ の粒子に対して } \tilde{L} \equiv p_\phi/m, \quad \text{光子に対して } L \equiv p_\phi$$

が保存する [$g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2 \theta$ なので、メトリックは r と θ には依存している]。角運動量 p_ϕ の保存により運動

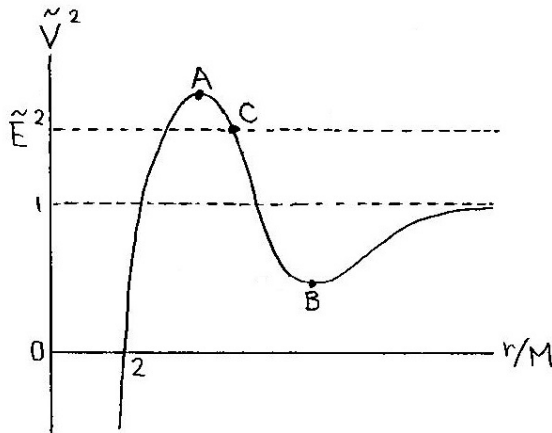


図 23 $(\tilde{L}/M)^2 > 12$ のとき

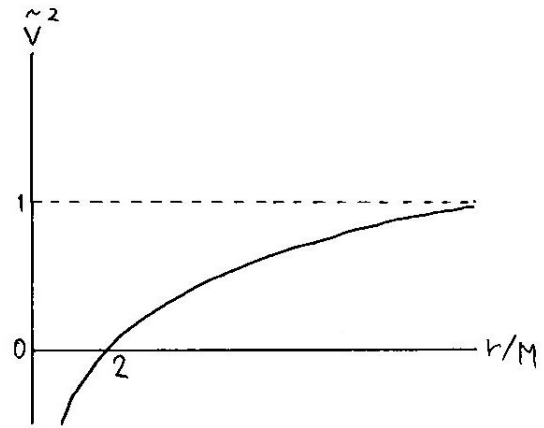


図 24 $(\tilde{L}/M)^2 \leq 12$ のとき

は 1 つの平面上に拘束される．これを $\theta = \pi/2$ の赤道面に選ぶと， $\vec{p} \cdot \vec{p} = -m^2$ は

$$m \neq 0 \text{ の粒子に対して } \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + \tilde{V}^2(r) = \tilde{E}^2, \quad \tilde{V}^2(r) \equiv \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left(1 + \frac{\tilde{L}^2}{r^2} \right),$$

$$\text{光子に対して } \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + V^2(r) = E^2, \quad V^2(r) \equiv \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{L^2}{r^2}$$

を与える．[以降の議論は非相対論的力学において，中心対称な場の中を運動する粒子のエネルギーと角運動量の保存則を用いて，動径の時間変化 $\frac{dr}{dt}$ と軌道 $\frac{dr}{d\phi}$ を調べたのと類似の議論である．]

■軌道のタイプ (p.371～) $m \neq 0$ の粒子に対する有効ポテンシャル $\tilde{V}^2(r)$ の概形は図 23，図 24 のようである．光子に対する有効ポテンシャル $V^2(r)$ の概形は図 25 のようである．ここで上式を τ または λ で微分すると

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dr} \tilde{V}^2(r), \quad \frac{d^2r}{d\lambda^2} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dr} V^2(r)$$

となるから，粒子は $\tilde{V}^2(r)$ または $V^2(r)$ の小さくなる方に加速される．こうして図 23，図 25 における極大 A は不安定な円軌道に，図 23 における極小 B は安定な円軌道に対応する．また図 23，図 25 の点 C は転回点に対応し，この高さのエネルギーでは粒子が無限遠からやって来て無限遠に飛び去る運動が起こる (Newton 重力における双曲線軌道に対応する)．さらに図 23，図 25 において十分大きなエネルギー \tilde{E}^2, E^2 の値を考えると，粒子は $r = 0$ に到達し得る．しかし実際にはその前に星の表面に衝突している．

■近日点移動 (p.375～) 円軌道に対して座標時間で測った周期を求めると

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{M}}$$

となり，Newton 重力での結果と一致する．

相対論では安定な円軌道から少しずれた軌道は近日点移動を示す．太陽に近く相対論的な効果が比較的顕著に現れる水星に対し，測定された近日点移動の値は，一般相対論によってはじめて説明可能となった．

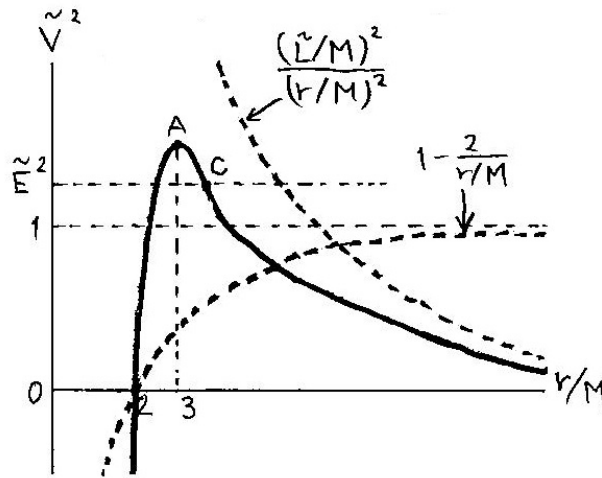


図 25 概形は \tilde{L} の値に依らない

近日点移動を調べよう。軌道は

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \frac{\tilde{E}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(1 + \frac{\tilde{L}^2}{r^2}\right)}{\tilde{L}^2/r^4}$$

によって与えられる。変数 r の代わりに $u \equiv 1/r$ を考え、Newton 理論の円軌道における値 $u = M/\tilde{L}^2$ からのずれ $y \equiv u - M/\tilde{L}^2$ を導入すると、これは y に対する式

$$\left(\frac{dy}{d\phi}\right)^2 = \frac{\tilde{E}^2 + M^2/\tilde{L}^2 - 1}{\tilde{L}^2} + \frac{2M^4}{\tilde{L}^6} + \frac{6M^3}{\tilde{L}^4}y + \left(\frac{6M^2}{\tilde{L}^2} - 1\right)y^2$$

に書き換えられる (ほぼ円軌道の場合を考え、 y^3 の項を無視した)。解は

$$y = y_0 + A \cos(k\phi + B), \quad k = \left(1 - \frac{6M^2}{\tilde{L}^2}\right)^{1/2}$$

という形をとる。よって y 、したがって r がもとの値に戻るまでの ϕ の変化は 2π と異なり、ある近日点から

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{k} - 2\pi \simeq 6\pi \frac{M}{r}$$

だけ進んだ方向に次の近日点が来ることになる。最後の近似では非相対論的極限 $M/r \ll 1$ を考えており、軌道がほぼ円軌道で $\Delta\phi \ll 1$ ($\Leftrightarrow M^2/\tilde{L}^2 \ll 1$) としている (この後 p.381 で説明されるように、 $M/r \ll 1 \Rightarrow M^2/\tilde{L}^2 \ll 1$ である)。

■連星パルサー (p.380～) 連星パルサーには近日点 (近星点) 移動が大きく、一般相対論の検証に適したものがあ。実際には星の既知の質量から近星点の移動を計算するのではなく、逆に近星点移動は赤方偏移とともに、星の質量や軌道の傾きを求める手掛かりとなる。

■ポスト・ニュートンの重力 (p.381～) 近日点移動は Newton 重力の運動に対する、重力の弱い星の遠方 $M/r \ll 1$ での相対論的補正という意味でポスト Newton 効果と呼べる。ここで $M/r \ll 1$ は、

- Newton 重力の言葉でいえば、重力ポテンシャルの大きさ M/r が小さいことを意味する。
- Newton 重力での円運動では $v^2 = M/r$ だから、運動が遅いことを含意する。

Schwarzschild メトリックは $M/r \ll 1$ の弱い重力に対して近似的に

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{2M}{r}\right) dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

となる。一方、Newton 重力を再現するメトリックは

$$\begin{aligned} ds^2 &= - (1 + 2\phi)dt^2 + (1 - 2\phi)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \\ &= - \left(1 - \frac{2M}{\bar{r}}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{2M}{\bar{r}}\right) (d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\Omega^2) \quad \left(\because \phi = -\frac{M}{\bar{r}}\right) \end{aligned}$$

となる。 $M/r, M, \bar{r}$ のとき近似的にこれらが一致するためには、Newton 重力を再現するメトリックを持つ球座標 \bar{r} が Schwarzschild 座標 r と

$$\bar{r} = r - M$$

によって関係付けられていけば良い。

■重力による光の屈折 (p.383～) 光子の軌道は

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{1}{r^2 \left[\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\right]^{1/2}}$$

によって与えられる ($b \equiv L/E$ は衝突パラメーター)。変数 r の代わりに $u \equiv 1/r$ を考え、 $y \equiv u(1 - Mu)$ を導入すると、 $Mu \ll 1$ のときこれは

$$\phi = \phi_0 + \frac{2M}{b} + \arcsin(by) - 2M \left(\frac{1}{b^2} - y^2\right)^{1/2}$$

を解に持つ (ϕ_0 は入射方向)。ここから光は軌道全体で $\Delta\phi = 4M/b$ だけ曲げられることが分かる。

Newton 理論においても粒子は重力によって曲げられるため、光子もまた曲げられると考えられる。しかし Newton 理論による計算では屈折角は $2M/b$ であり、一般相対論の予言する値の半分となる。これは Newton 理論を決めるメトリックが $g_{00} = -(1 - 2M/r)$ であるのに対し、一般相対論では $g_{rr} = 1 + 2M/r$ も同じだけ平坦な場合からずれていることと関係している。

■重力レンズ効果

- われわれが空を見たときには重力レンズ効果による二重像は見えないが、高性能の望遠鏡で宇宙のより遠くを観測したときには、銀河団に光を曲げられ、望遠鏡の位置に多重像を生み出すような銀河の集団が、重力源となる銀河団のさらに向こうに存在する可能性が高い。
 - 多重の像を認識できるほど銀河団による光の屈折角は大きい。
- 重力レンズの増光作用により遠方の天体を観測できるため、初期の宇宙を調べられる。
- 重力レンズ効果を観測すると、それを引き起こすダークマターが存在することが分かる。
- 重力レンズ効果を引き起こすダークな恒星質量程度の天体があるらしいが、その正体は 2010 年時点では謎である。

11.1 について

■ $V^2(r), \tilde{V}^2(r)$ の概形 (図 11.1-3(p.372,p.374)) と極値を与える r の値 (11.17) について $\rho \equiv r/M, \Lambda \equiv \tilde{L}/M$ と無次元化すると (光子に対しては $\Lambda \equiv L/M$)

$$\tilde{V}^2 = \left(1 - \frac{2}{\rho}\right) \left(1 + \frac{\Lambda^2}{\rho^2}\right), \quad V^2 = \left(1 - \frac{2}{\rho}\right) \frac{\Lambda^2}{\rho^2}$$

であり, これに対して

$$\frac{d}{d\rho} \tilde{V}^2 = \frac{2}{\rho^3} (\rho^2 + \Lambda^2 \rho + 3\lambda^2), \quad \frac{d}{d\rho} V^2 = \frac{2\Lambda^2}{\rho^4} (3 - \rho)$$

となることから分かる.

■ 最小の円軌道半径 (11.19) について 図 11.1(p.372) の点 B に対応する安定な円軌道の半径

$$\rho \equiv \frac{r}{M} = \frac{\Lambda^2}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{12}{\Lambda^2}}\right)$$

は $\Lambda \equiv \tilde{L}/M$ の減少に伴って減少する.

■ 「軌道は $r = 2M$ を通り抜けて決してもどってこない」 (p.374 下から 3 行目) について 非相対論的力学において $r \rightarrow 0$ とすると遠心力ポテンシャルの寄与が効いてきて, 粒子は $r = 0$ に到達できないのとは事情が異なっている.

■ 「その半径 R は $2M$ より大きく」 (p.375, l.2) について Buchdahl の定理 (p.351) より $R > \frac{9}{4}M > 2M$ である.

■ 「(安定な) 円軌道」 (p.375, l.5) について 半径の式 (11.17) の複号のいずれに対しても, それを平方することで, もととなる式 (11.20) が得られるから, 円軌道の周期の計算結果 (11.25) は理論的には不安定な円軌道に対しても正しい.

■ 式 (11.21) について 左辺を $\tilde{E} \rightarrow \tilde{E}^2$ と訂正する.

■ 「ニュートン理論での円軌道は, $u = M/\tilde{L}^2$ 」 (p.378, l.2) について 非相対論における式

$$\tilde{L} = r^2 \dot{\phi}, \quad mr \dot{\phi}^2 = \frac{Mm}{r^2}$$

から $\dot{\phi}$ を消去すると

$$u \equiv \frac{1}{r} = \frac{M}{\tilde{L}^2}$$

を得る.

■ 相対論的な軌道の式 (11.34-36) について 非相対論的な式 (11.31) の右辺に

$$2Mu^3 = 2M \left(y + \frac{M}{\tilde{L}^2}\right)^3 \simeq 6y^2 \frac{M^2}{\tilde{L}^2} + 6y \frac{M^3}{\tilde{L}^4} + \frac{2M^4}{\tilde{L}^6}$$

を加えて式 (11.34) を得る. ただし式 (11.34) 右辺における y の係数は $6M^3/\tilde{L}^2 \rightarrow 6M^3/\tilde{L}^4$ と訂正しなければならないと考えられる.

式 (11.34) の右辺を平方完成しよう.

$$\begin{aligned} & \frac{6M^3}{\tilde{L}^4}y + \left(\frac{6M^2}{\tilde{L}^2} - 1\right)y^2 \\ &= \frac{6M^3}{\tilde{L}^4}y - k^2y^2 \quad \left(k \equiv \left(1 - \frac{6M^2}{\tilde{L}^2}\right)^{1/2} : (11.36)\right) \\ &= -k^2\left(y - \frac{3M^3}{k^2\tilde{L}^4}\right)^2 + k^2\left(\frac{3M^3}{k^2\tilde{L}^4}\right)^2 \\ &= -k^2(y - y_0)^2 + k^2y_0^2 \quad \left(y_0 \equiv \frac{3M^3}{k^2\tilde{L}^4}\right) \end{aligned}$$

に注意して式 (11.34) を両辺 k^2 で割ると

$$\begin{aligned} \left(\frac{dy}{d(k\phi)}\right)^2 &= \left\{\frac{1}{k^2}\left(\frac{\tilde{E}^2 + M^2/\tilde{L}^2 - 1}{\tilde{L}^2} + \frac{2M^4}{\tilde{L}^6}\right) + y_0^2\right\} - (y - y_0)^2 = A^2 - (y - y_0)^2, \\ A &\equiv \frac{1}{k}\left(\frac{\tilde{E}^2 + M^2/\tilde{L}^2 - 1}{\tilde{L}^2} + \frac{2M^4}{\tilde{L}^6} + k^2y_0^2\right) \end{aligned}$$

となる (y_0, A の表式 (11.36) はこのように訂正されると考えられる). これは $y = y_0 + A \cos(k\phi + B)$: (11.35) とすると満たされる.

■式 (11.52) の第 2 式について 逐次代入により

$$u = \frac{y}{1 - Mu} \simeq y(1 + Mu) \simeq y\{1 + My(1 + Mu)\} = y(1 + My) + O(M^2u^2)$$

とすれば良い.

■式 (11.53) について

$$\frac{d\phi}{du} = \frac{d\phi}{dy} \frac{dy}{du} = \frac{d\phi}{dy}(1 - 2Mu) \simeq \frac{d\phi}{dy}(1 - 2My), \quad \frac{1}{\left(\frac{1}{b^2} - u^2 + 2Mu^3\right)^{1/2}} \simeq \frac{1}{\frac{1}{b^2} - y^2}$$

を等置して,

$$\frac{d\phi}{dy} \simeq \frac{1}{1 - 2My} \frac{1}{\frac{1}{b^2} - y^2} \simeq \frac{1 + 2My}{\frac{1}{b^2} - y^2} : (11.53)$$

を得る.

■式 (11.54) について

$$\phi = b \int \frac{1 + 2My}{\sqrt{1 - (by)^2}} dy$$

において $by = \sin \xi$ とおくと

$$b \int \frac{dy}{\sqrt{1 - (by)^2}} = \int d\xi = \arcsin(by) + \text{const.}$$

であり, $1 - (by)^2 = Y$ とおくと

$$2Mb \int \frac{ydy}{\sqrt{1 - (by)^2}} = -\frac{M}{b} \int \frac{dY}{\sqrt{Y}} = -2M \left(\frac{1}{b^2} - y^2 \right)^{1/2} + \text{const.}$$

なので

$$\phi = \arcsin(by) - 2M \left(\frac{1}{b^2} - y^2 \right)^{1/2} + \text{const.}$$

となる. $y \rightarrow 0$ のとき $\phi \rightarrow \phi_0$ となるように積分定数を定めると式 (11.54) を得る.

■ 「式 (11.22) で $dr/d\lambda = 0$ とおき」 (p.384, l.17) について 式 (11.12) の誤りである.

11.2 地平面の性質

■ 座標特異領域 (p.390~) Schwarzschild 座標では $r = 2M$ のときメトリック $g_{rr} = \frac{1}{1 - 2M/r}$ の分母がゼロになる. [座標に依らない] 幾何学的意味を調べ, この特異性が幾何学それ自体によるのか, 座標の質が悪いことによるのかを考える.

■ 落下粒子 (p.391~) $r = R (\geq 2M)$ から $r = 2M$ の面に, 動径沿いにまっすぐ落下する粒子を考える. 簡単のため $\tilde{E} = 1$ の場合を考えると, 落下に要する固有時間 $\Delta\tau$ は

$$\left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 = \frac{2M}{r}, \quad \therefore \Delta\tau = - \int_R^{2M} \frac{dr}{(2M/r)^{1/2}} = \frac{2M}{3} \left[\left(\frac{r}{2M} \right)^{3/2} \right]_{2M}^R$$

より有限である [これが座標系に依らない幾何学的性質に当たる]. 一方, $r = 2M$ の近くを考えて $\varepsilon \equiv r - 2M (\geq 0)$ とおくと, 対応する座標時間は

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\tau} &= U^0 = g^{00}U_0 = g^{00}p_0 = g^{00}(-\tilde{E}) = \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} \tilde{E} = \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1}, \quad (\because \tilde{E} = 1) \\ \therefore dt &= \frac{d\tau}{1 - \frac{2M}{r}} = \frac{dr}{\left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left(\frac{2M}{r} \right)^{1/2}} = \frac{-(\varepsilon + 2M)^{3/2} d\varepsilon}{(2M)^{1/2} \varepsilon} \end{aligned}$$

となって, $\varepsilon \rightarrow 0$ とすると発散する. これは座標時間の質が悪いことを意味する.

■ $r = 2M$ の内側 (p.392~) 次に $r = 2M$ の内側を考えて $\varepsilon \equiv 2M - r (\geq 0)$ とおくと [ε は微小でなくても良い], Schwarzschild メトリックは

$$ds^2 = \frac{\varepsilon}{2M - \varepsilon} dt^2 - \frac{2M - \varepsilon}{\varepsilon} d\varepsilon^2 + (2M - \varepsilon)^2 d\Omega^2$$

で与えられる. よって $r = 2M$ の内側では

- r が変化して得られる座標曲線は時間的世界線 (線に沿って $ds^2 < 0$)
- t が変化して得られる座標曲線は空間的世界線 (線に沿って $ds^2 > 0$)

となり, やはり座標の質が悪い.

落下粒子は時間的世界線をたどらなければならないから, $r = 2M$ の内側ではたえず r が変化し, $r = 0$ に到達する. また $r = 0$ は $r = 2M$ の内側のあらゆるヌル世界線の未来にあるから, 光子もまた $r = 0$ に戻される*9. $r = 2M$ を Schwarzschild 地平面と呼ぶ.

*9 このことは Kruskal-Szekeres 座標を用いた座標図 (図 11.11(p.396)) において明らかになる.

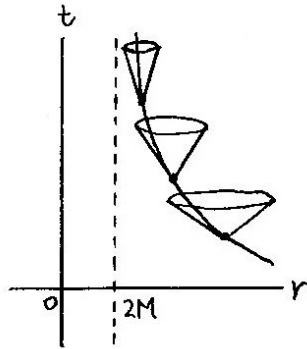


図 26 Schwarzschild 座標で見た粒子の世界線と局所的な光円錐

■座標系 (p.393～) Schwarzschild 座標の座標図では、各点での光円錐の傾き dt/dr は

$$0 = ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2, \quad \therefore \frac{dt}{dr} = \pm \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}$$

なので ($d\theta = 0, d\phi = 0$)、遠方で ± 1 であり、 r が $2M$ に近づくにつれて傾きは急になり、 $r \rightarrow 2M$ のとき $\pm\infty$ となる。粒子の世界線は光円錐の内側を通るので、その傾きはより急である。これが、粒子が面 $r = 2M$ に達するのに無限大の座標時間を要することの幾何学的描像である (図 26 参照)。

実は地平面は時空の一点であり、Schwarzschild 座標の質の悪さはこれを線 $r = 2M, -\infty < t < \infty$ に引きのばしていることに由来している。

■クルスカール-スゼッケル座標 (p.394～) Kruskal-Szekeres 座標 u, v は、座標図上での局所的な光円錐の傾きが時空点の位置に依らないような座標であり、

$$(u, v) = \begin{cases} \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} e^{r/4M} \left(\cosh \frac{t}{4M}, \sinh \frac{t}{4M}\right) & (r > 2M) \\ \left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{1/2} e^{r/4M} \left(\sinh \frac{t}{4M}, \cosh \frac{t}{4M}\right) & (r < 2M) \end{cases}$$

によって定義される。実際、Kruskal-Szekeres 座標 u, v を用いた場合の球対称時空のメトリックは

$$ds^2 = -\frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} (dv^2 - du^2) + r^2 d\Omega^2$$

によって与えられ、座標図上の局所的な光円錐の傾き dv/du は

$$ds^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad dv = \pm du$$

より ± 1 となる。ただし ds^2 の式における r は

$$\left(\frac{r}{2M} - 1\right) e^{r/2M} = u^2 - v^2$$

によって、 u と v を用いて表されているものと見る。

Kruskal-Szekeres 座標 u, v での座標図は図 27 のようである (θ と ϕ は一定として省略してある)。

- $r = (\text{一定})$ の線

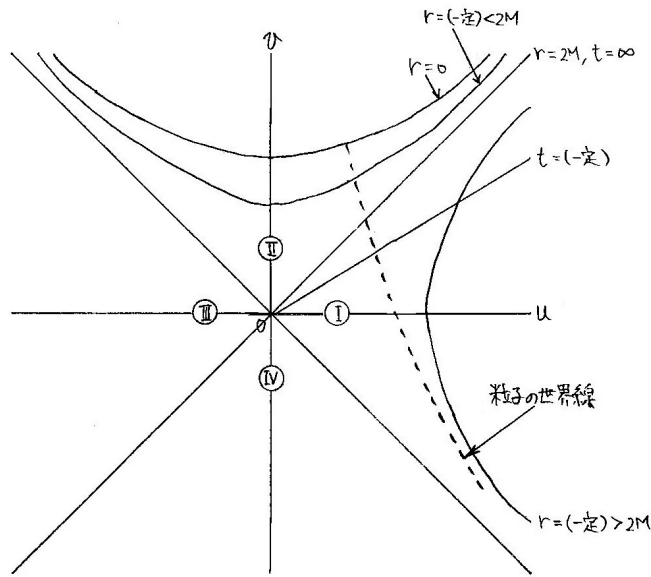


図 27 Kruskal-Szekeres 座標 u, v での座標図

- 領域 I の $r = (\text{一定}) > 2M$ の線要素は ± 1 より急な傾きを持ち，空間的.
- 領域 II の $r = (\text{一定}) < 2M$ の線要素は ± 1 より緩やかな傾きを持ち，時間的.
- $t = (\text{一定})$ の線
 - 原点を通る直線となる*¹⁰.
- 粒子の世界線は ± 1 よりも急な傾きを持つから，
 - $r > 2M$ の領域 I から $r < 2M$ の領域 II に入ると再び戻ることではなく $r = 0$ の線に達する.
 - $r = 0$ は“点”であるが，それは特異領域であり次元を考えることはできないから， $r = 0$ が線で表されていることは問題ない.
 - その境界線 $r = 2M, t = \infty$ が地平面である.
 - (r, t) 時空図ではこれが $r = 2M, -\infty < t < \infty$ に引きのばされている.
- 物体は有限の固有時間で地平面に達する.
 - しかし固有時間の一定間隔ごとに物体が電波を出すと，それを遠方で受け取るとき長い座標時間に引きのばされるので，遠方の観測者は物体が地平面に到達するまでに無限の時間がかかると結論する.

*¹⁰ 直線の式は

$$v/u = \tanh(t/4M) \quad (r > 2M)$$

で与えられる.

11.2 について

■Kruskal-Szekeres 座標でのメトリックの式 (11.67) の確認 $r > 2M$ のとき式 (11.65) より

$$\begin{aligned} du &= \frac{e^{r/4M}}{4M} \left\{ \frac{r/2M}{\sqrt{(r/2M) - 1}} \cosh(t/4M) dr + \sqrt{(r/2M) - 1} \sinh(t/4M) dt \right\}, \\ dv &= \frac{e^{r/4M}}{4M} \left\{ \frac{r/2M}{\sqrt{(r/2M) - 1}} \sinh(t/4M) dr + \sqrt{(r/2M) - 1} \cosh(t/4M) dt \right\} \end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned} du^2 - dv^2 &= \frac{e^{r/2M}}{(4M)^2} \left[\frac{(r/2M)^2}{(r/2M) - 1} dr^2 - \{(r/2M) - 1\} dt^2 \right] \\ &= \frac{e^{r/2M}}{(4M)^2} \frac{r}{2M} \left[\frac{1}{1 - (2M/r)} dr^2 - \{1 - (2M/r)\} dt^2 \right] \end{aligned}$$

を得る.

一方, $r < 2M$ のとき式 (11.66) より

$$\begin{aligned} du &= \frac{e^{r/4M}}{4M} \left\{ -\frac{r/2M}{\sqrt{1 - (r/2M)}} \sinh(t/4M) dr + \sqrt{1 - (r/2M)} \cosh(t/4M) dt \right\}, \\ dv &= \frac{e^{r/4M}}{4M} \left\{ -\frac{r/2M}{\sqrt{1 - (r/2M)}} \cosh(t/4M) dr + \sqrt{1 - (r/2M)} \sinh(t/4M) dt \right\} \end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned} du^2 - dv^2 &= \frac{e^{r/2M}}{(4M)^2} \left[-\frac{(r/2M)^2}{1 - (r/2M)} dr^2 + \{1 - (r/2M)\} dt^2 \right] \\ &= \frac{e^{r/2M}}{(4M)^2} \frac{r}{2M} \left[\frac{1}{1 - (2M/r)} dr^2 - \{1 - (2M/r)\} dt^2 \right] \end{aligned}$$

を得る.

以上より $r > 2M, r < 2M$ のいずれに対しても Schwarzschild メトリックの式 (11.1) は, Kruskal-Szekeres 座標 u, v を用いた式 (11.67) に書き換えられる.

11.3 一般のブラックホール

■ブラックホール形成の一般論 (p.398~)

- 現実にはブラックホールは物質の完全に球対称な重力崩壊によって形成されるのではなく, 複雑で動的な状況で形成され, 形成後も系のダイナミクスに参与する.
- 事象の地平面とは, 時空中にある, 遠方の観測者と交信可能な事象点と交信不可能な事象点の境界のことである.
 - 地平面は「時空」の境界であって, ある時刻に定義される空間の中の境界ではない.
- 地平面の定義により, その上から放出された光子は無限遠に到達することも地平面の内部に落下することもできないから, 境界上のヌル曲線は永遠に地平面上に存在する.

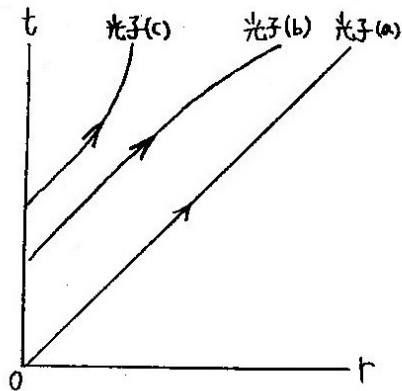


図 28 球対称崩壊の概略的な時空図

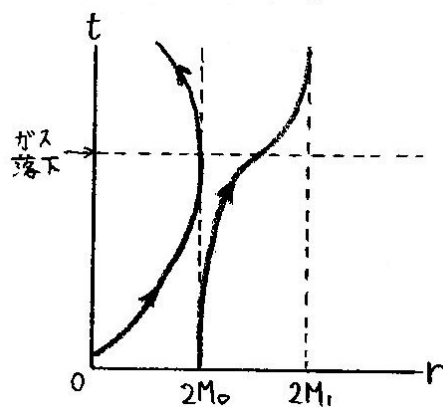


図 29 局所的捕捉面と本当の地平面

- 球対称星が崩壊してブラックホールが形成される過程で、
 図 28 の光子 (c) 以降に放出された光子は永久に地平面に閉じ込められる。
 このとき光子 (c) の軌跡が地平面を表すヌル曲線となる。
 これは地平面が半径ゼロから $2M$ まで成長することを意味する。
- ガスの落下によりブラックホールの質量が M_0 から M_1 に増大したとする。
 このとき球面 $r = 2M_0$ ははじめ事象の地平面のように見えるが、
 $r = 2M_0$ を形成していたヌル光線はガスの落下後には $r = 2M_1$ の内側にあるため、
 特異点に向かって落下していく。
 本当の地平面は最終的に $r = 2M_1$ の位置にくるヌル光線で構成されており、
 これはガスの落下前に $r = 2M_0$ の球面からゆっくりと離れていく光線であった (図 29 参照)。
 このように本当の地平面を知るには、時空の未来すべてを知り、
 捕捉される領域と捕捉されない領域の境界をたどるしかない。
 しかしそれは不可能である。
 そこで代わりに、ある時刻において外向きのヌル光線が広がっても収縮してもいかなる 2 次曲面である
 「局所的捕捉面」を定義する。

■ ブラックホールの一般的性質 (p.402~)

1. 孤立したブラックホールは定常状態になる。
 定常的な真空のブラックホールは、全質量 M と全角運動量 J だけで特徴付けられる。
 唯一の定常な真空ブラックホールは Kerr 解である。
2. ブラックホールが真空中にない場合には、電荷 Q 、磁気単極子モーメント F も持ち得る。
3. ほぼ球対称な重力崩壊では Kerr ブラックホールが後に残されることが考えられる。
4. ブラックホールを含んだいかなる動的過程においても、
 すべての地平面の面積の総和は時間とともに減少することはない (Hawking の面積定理)。
 → ブラックホールの合体は可能だが、分裂は不可能。
 - 定理の仮定は物質の局所的なエネルギー密度 (ρ) が正であることだけである。

- 定理とエントロピー増大則の類似性

→ ブラックホールは自然な形で熱力学に組み込まれる。

5. 地平面内には曲率の特異点が存在する。

これは一般相対性理論の適用限界を示しており、量子重力理論によって解消されると考えられている。

6. 漸近的平坦時空の特異的でない初期条件から出発すると、

地平面の外部にある特異点 (裸の特異点) は生まれにくいことを、Penrose は仮説として唱えている。

ビッグバンは裸の特異点である。

■カー・ブラックホール (p.406～) Kerr ブラックホールは角運動量の周りに軸対称であり、Boyer-Lindquist (ボイヤー-リンキスト) 座標 (t, r, θ, ϕ) を用いると、そのメトリックは

$$ds^2 = -\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} dt^2 - 2a \frac{2Mr \sin^2 \theta}{\rho^2} dt d\phi + \frac{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta}{\rho^2} \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2,$$

$$a \equiv J/M, \quad \Delta \equiv r^2 - 2Mr + a^2, \quad \rho^2 \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta$$

によって与えられる。メトリックは対称軸周りの角 ϕ と座標時間 t に依らないことが見て取れる。角運動量がゼロのとき ($a \equiv J/M = 0$)、これは Schwarzschild 時空の式

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + r^2(\sin^2 \theta d\phi^2 + d\theta^2) + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} dr^2$$

になる。

■慣性系の引きずり (p.407～) Kerr メトリックに対して $g_{t\phi}$ はゼロでない値を持つから、質量 $m \neq 0$ の粒子に対して

$$p^t \equiv m \frac{dt}{d\tau} = g^{tt} p_t + g^{t\phi} p_\phi, \quad p^\phi \equiv m \frac{d\phi}{d\tau} = g^{\phi\phi} p_\phi + g^{\phi t} p_t$$

である。ところでメトリックは ϕ に依存しないから、粒子の角運動量 p_ϕ は保存する [7.4 節]。そこで無限遠から一直線に落ちてくる粒子 ($p_\phi = 0$) を考えると、

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{p^\phi}{p^t} = \frac{g^{\phi t}}{g^{tt}} \equiv \omega(r, \theta)$$

となる。これは粒子が重力に“引きずられ”，ゼロでない角運動量を獲得することを意味する。[このように $p_\phi = 0$ と $d\phi/dt \neq 0$ は矛盾しない.]

■エルゴ領域 (p.409～) $g_{tt} > 0$ となる領域はエルゴ領域と呼ばれ、そこでは強い引きずりが起こる [エルゴ領域の名前の由来 (定義) は p.415 (ペンローズ過程) 参照]。この点を見るために、赤道面 $\theta = \pi/2$ 上で $r =$ (一定) の円に沿って放出された光子を考えると、

$$0 = ds^2 = g_{tt} dt^2 + 2g_{t\phi} dt d\phi + g_{\phi\phi} d\phi^2, \quad \frac{d\phi}{dt} = -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} \pm \sqrt{\left(\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}}\right)^2 - \frac{g_{tt}}{g_{\phi\phi}}}$$

となる。これは特に $g_{tt} = 0$ となる位置では

$$\frac{d\phi}{dt} = 0, -2 \frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}}$$

を与える。[$g_{\phi\phi} > 0$ であり (本稿次節で確認), $g_{t\phi}$ は a と異符号だから,] 第 2 の解 $\frac{d\phi}{dt} = -2\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}}$ は光子がブラックホールの回転と同じ方向に引きずられることを表し, 第 1 の解 $\frac{d\phi}{dt} = 0$ はブラックホールの回転と“逆向きに”放出された光子が動かないことを意味する。 $g_{tt} > 0$ となる領域では [2 解はいずれも a と同符号だから], 光子は (したがって質量を持つ粒子も) ブラックホールと同じ向きに回転しなければならない。

note 以上の結果は議論の進め方より,

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{t\phi}dtd\phi + g_{\phi\phi}d\phi^2 + g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2$$

という形のメトリックを持つ軸対称な重力場一般に成り立つと考えられる。

Kerr 解の場合, エルゴ領域は

$$r \leq r_0 \equiv M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}$$

で与えられる。 $r = r_0$ はエルゴ球と呼ばれる。

■カー・ブラックホールの地平面 (p.410～) Kerr 解の場合の地平面は $g_{rr} = \infty$ となる半径

$$r = r_+ \equiv M + \sqrt{M^2 - a^2}$$

である (証明は行わない)。よって $r_+ \leq r_0$ であり, 等号は極 $\theta = 0, \pi$ に対して成り立つ。

地平面 $r = r_+$ では

$$dt = 0, \quad dr = 0, \quad g_{rr} = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \Delta = 0$$

なので, 地平面は

$$dl^2 = \frac{(r_+^2 + a^2)^2}{\rho^2} \sin^2 \theta d\phi^2 + \rho^2 d\theta^2$$

で与えられる内在的メトリック (γ_{ij}) を持つ。よって地平面の表面積は

$$A = \int d\phi d\theta \sqrt{|\gamma_{ij}|} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta (r_+^2 + a^2) \sin \theta = 4\pi(r_+^2 + a^2)$$

と計算される。

■カー・メトリックの赤道面での光子の運動 (p.411～) Kerr 解に対して, 無限遠から一直線に落ちてくる粒子の引きずりによる角速度 $\omega = \frac{g_{t\phi}}{g_{tt}}$: (11.77) 右辺におけるメトリックの反変成分を調べると,

$$\omega = \frac{2Mra}{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta}$$

となる。これは常に (分母が正だから [本稿次節で確認]) ブラックホールの角運動量 $a \equiv J/M$ と同じ符号を持ち, また r の大きなところで r^{-3} のように小さくなる。

Kerr 時空の赤道面 $\theta = \pi/2$ を運動する $p^\theta = 0$ の光子に対して $\vec{p} \cdot \vec{p} = 0$ を書き下すと

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = \frac{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta}{r^4} (E - V_+)(E - V_-),$$

$$V_\pm(r) = \left[\omega \pm \left(\omega^2 - \frac{g^{\phi\phi}}{g^{tt}} \right)^{1/2} \right] L = \frac{2Mra \pm r^2 \Delta^{1/2}}{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta} L$$

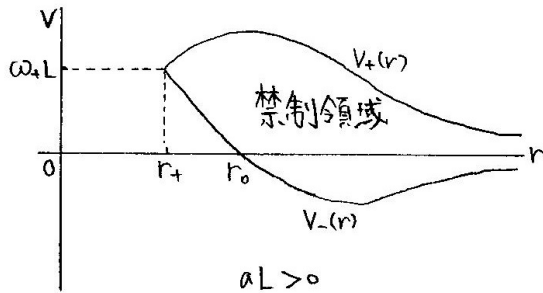


図 30 教科書の図 11.13(p.413) を改変

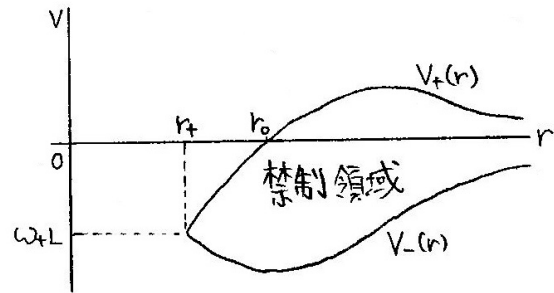


図 31 教科書の図 11.14(p.416) を改変

となる。 $aL > 0$ (光子の角運動量 L がブラックホールの角運動量 $a = J/M$ と同じ向き) の場合、 $V_{\pm}(r)$ の概形は図 30 のようであり、運動は $(dr/d\lambda)^2 > 0$ となる $E > V_+$ または $E < V_-$ の領域でのみ可能である。 $E > 0$ を持つ粒子は V_+ の頂上にぶつかる場合、無限遠に引き返し、 V_+ の頂上を超える場合、ブラックホールの中に落ち込んでいく。

次に $E < V_-$ を持つ光子を考える。 Lorentz 系に対して、あらゆる既知の粒子のエネルギーは正の値を持つ [自由粒子を考えている]。 負のエネルギーを持つのは、時間を過去にさかのぼる粒子に対してである。 と言うのも、そのような粒子に対して四元運動量は $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$ と変化するので、速度 \vec{U} を持つ観測者が測ったエネルギーは $-\vec{U} \cdot \vec{p} \rightarrow \vec{U} \cdot \vec{p}$ と符号が逆になるから [観測者の速度は $\vec{U} \rightarrow -\vec{U}$ と反転しない]。 さて、地平面近くの粒子の経路に対しても、適当な観測者 \vec{U} の測るエネルギー $-\vec{p} \cdot \vec{U}$ は正であることが要求される。 そこで例えば一定の r を保ち、粒子の角速度 ω で回転する観測者が測るエネルギー

$$E_{ZAMO} = -\frac{g_{\phi\phi}}{D}(E - \omega L) \quad \text{ただし} \quad D \equiv \begin{vmatrix} g_{tt} & g_{t\phi} \\ g_{t\phi} & g_{\phi\phi} \end{vmatrix} : (11.87)$$

が正である条件 $E > \omega L$ を考えると、これは $E < V_-$ の粒子に対しては満たされないことが分かる ($E = -p_t$ は [Kerr メトリックを持つ座標系におけるエネルギーであり、光子の軌道に沿って保存されるので、] 「無限遠で静止した観測者に対するエネルギー」 (p.414, 1.21) である)。

■ペンローズ過程 (p.415~) $aL < 0$ (粒子の角運動量 L がブラックホールの角運動量 $a = J/M$ と逆向き) の場合、 $V_{\pm}(r)$ の概形は図 31 のようになるので、運動可能領域 $E > V_+, E < V_-$ のうち地平面の近くの観測者に対するエネルギーが正となる $E > V_+$ の領域は、 $E < 0$ となり得る範囲 $r < r_0$ を含むことになる。 $r < r_0$ がエルゴ領域と呼ばれるのはこのためである (“エルゴ” はギリシャ語でエネルギーを意味する)。

粒子がエルゴ領域で 2 個の光子に分裂したとすると、そのうち一方はエネルギー $E < 0$ を持ち得る。 このときエネルギー保存則によりもう一方は $E > 0$ を持つ。 $aL < 0$ の場合には、 $V_{\pm}(r)$ の概形 (図 31) により $E < 0$ の光子は $r < r_0$ に留まるのに対し、 $E > 0$ の光子は $r > r_0$ へ抜け出し得る。 するとこの Penrose 過程において、ブラックホールのエネルギーは減少する。

- クェーサーのジェットは Penrose 過程で放出された荷電粒子かもしれない。
- Penrose 過程は Kerr ブラックホールに限らず、エルゴ領域が存在すればいつも起こる。
- エルゴ領域を持つ星の不安定性

星の持つエルゴドロイド〔ドーナツ状のエルゴ領域〕に捕捉された重力波は負のエネルギーを持つ。

しかし波というのは完全には局在せず、正のエネルギーを持って外にもれ出す。

これによりエルゴ領域の波は強くなり（絶対値のより大きな負のエネルギーを持ち）、

無限遠に逃げる波の振幅もまた増大する。

波は角運動量を持ち去るので、星の回転は減速し、いずれエルゴ領域は消失する。

● Kerr ブラックホールの安定性

一方、Kerr ブラックホールの場合、エルゴ領域の波は無限遠に逃げるだけでなく、地平面を抜けてブラックホールの中へも伝わる事ができる

($r_+ \leq r_0$, $r = r_+$: 地平面, $r = r_0$: エルゴ球)。

Kerr ブラックホールが安定なのはこのためと考えられる。

11.3 について

■ D の式 (11.89) の確認

$$D = \left(-\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \right) \frac{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta}{\rho^2} \sin^2 \theta - \left(-a \frac{2Mr \sin^2 \theta}{\rho^2} \right)^2$$

$$= \frac{\sin^2 \theta}{\rho^4} [(a^2 \sin^2 \theta - \Delta) \{ (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta \} - 4a^2 M^2 r^2 \sin^2 \theta]$$

の最右辺において、 $\sin^2 \theta$ の係数

$$a^2(r^2 + a^2)^2 + a^2 \Delta^2 - 4a^2 M^2 r^2$$

$$= a^2(r^2 + a^2)^2 + a^2(\Delta + 2Mr)(\Delta - 2Mr)$$

$$= a^2(r^2 + a^2)^2 + a^2(r^2 + a^2)(r^2 - 4Mr + a^2)$$

は

$$2a^2(r^2 + a^2)\Delta$$

$$= a^2(r^2 + a^2)(r^2 - 2Mr + a^2) + a^2(r^2 + a^2)(r^2 - 2Mr + a^2)$$

$$= a^2(r^2 + a^2)^2 + a^2(r^2 + a^2)\{(-2Mr) + (r^2 - 2Mr + a^2)\}$$

に一致する。よって D の式の $[\dots]$ 内は

$$-a^4 \Delta \sin^4 \theta + 2a^2(r^2 + a^2)\Delta \sin^2 \theta - \Delta(r^2 + a^2)^2$$

であり、これは

$$-\Delta \rho^4 = -\Delta(r^2 + a^2 - a^2 \sin^2 \theta)^2$$

$$= -\Delta \{ (r^2 + a^2)^2 - 2a^2(r^2 + a^2) \sin^2 \theta + a^4 \sin^4 \theta \}$$

に等しいから

$$D = \frac{\sin^2 \theta}{\rho^4} (-\Delta \rho^4) = -\Delta \sin^2 \theta : (11.89)$$

を得る。

■「この分母は式 (11.72) より, 至るところで正だから」(p.412, l.3) について

$$\begin{aligned} (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta &\geq (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \\ &= r^4 + r^2 a^2 + 2Mra^2 \quad (\because \Delta \equiv r^2 - 2Mr + a^2 : (11.72)) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

■式 (11.91) の確認

$$0 = g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = g^{tt} p_t^2 + g^{rr} p_r^2 + g^{\theta\theta} p_\theta^2 + g^{\phi\phi} p_\phi^2 + 2g^{t\phi} p_t p_\phi$$

において

$$p_t = -E, \quad g^{rr} p_r^2 = g_{rr} p_r^2 = g_{rr} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2, \quad p_\theta = 0, \quad p_\phi = L$$

とおくと

$$g^{tt} E^2 + g_{rr} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + g^{\phi\phi} L^2 - 2g^{t\phi} EL = 0$$

となるので $dr/d\lambda$ の式 (11.91) を得る.

■ $V_\pm(r)$ の式 (11.94),(11.95) の確認 式 (11.94) の $V_\pm(r)$ に対して

$$V_+ + V_- = 2\omega L, \quad V_+ V_- = \frac{g_{\phi\phi}}{g_{tt}} L^2$$

となるので $(E - V_+)(E - V_-)$ は式 (11.91) 最右辺の $[\dots]$ 内に一致する.

ここで式 (11.94) の

$$\omega^2 - \frac{g_{\phi\phi}}{g_{tt}} = \frac{(2Mra)^2 - \{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta\}(\Delta - a^2)}{\{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta\}^2}$$

において,

$$(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta = r^4 + r^2 a^2 + 2Mra^2, \quad \Delta - a^2 = r^2 - 2Mr$$

より

$$\begin{aligned} &(2Mra)^2 - \{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta\}(\Delta - a^2) \\ &= r^4 \left\{ \left(\frac{2Ma}{r} \right)^2 - \left(r^2 + a^2 + \frac{2M}{r} a^2 \right) \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \right\} \\ &= -r^4 (r^2 + a^2 - 2Mr) \\ &= -r^4 \Delta \end{aligned}$$

となることに注意すると, 式 (11.95) へと書き換えられる.

■「それがエルゴ球の位置 $r_0 = 2M$ であることは容易にわかる」(p.413, l.15,16) について エルゴ球の位置 (11.80) は $\theta = \pi/2$ に対して $r_0 = 2M$ となる. 一方, 式 (11.95) の V_- がゼロになる条件

$$\Delta^{1/2} = \frac{2M}{r}, \quad \therefore r^4 - 2Mr^3 + a^2 r^2 - 4M^2 a^2 = 0$$

は $r = r_0 = 2M$ を解に持つ.

■「どちらの曲線も地平面で $aL/2Mr_+ \equiv \omega_+L$ という値をもつ」(p.413, 1.16~p.414, 1.1) について

$$V_{\pm}(r_+) = \frac{2Mr_+a}{(r_+^2 + a^2)^2}L$$

の右辺における L の係数は、 ω の式 (11.90) において $r = r_+$ (したがって $\Delta = 0$) とおいたものに等しい：
 $V_{\pm}(r_+) = \omega_+L$. また r_+ は $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$ をゼロにする r の値なので

$$r_+^2 + a^2 = 2Mr_+$$

であることに注意すると、 $V_{\pm}(r_+) = aL/2Mr_+$ と書き換えられる.

■「彼が四元速度 $U^0 = A, U^\phi = \omega A, U^r = U^\theta = 0$ をもつことは容易にわかる」(p.414, 1 番下~p.415, 1.1) について

$$U^0 = \frac{dt}{d\tau} \equiv A, \quad U^\phi = \frac{d\phi}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \omega A, \quad U^r = \frac{dr}{d\tau} = 0, \quad U^\theta = \frac{d\theta}{d\tau} = 0.$$

また

$$\begin{aligned} -1 = \vec{U} \cdot \vec{U} &= g_{tt}(U^0)^2 + 2g_{t\phi}U^0U^\phi + g_{\phi\phi}(U^\phi)^2 \\ &= (g_{tt} + 2g_{t\phi}\omega + g_{\phi\phi}\omega^2)A^2 \\ &= \frac{1}{g_{\phi\phi}} \{g_{tt}g_{\phi\phi} - (g_{t\phi})^2\} \quad \left(\because \omega = -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} : (11.88) \right) \\ &= \frac{D}{g_{\phi\phi}} \quad (\because D = g_{tt}g_{\phi\phi} - (g_{t\phi})^2 : (11.87)) \end{aligned}$$

なので「 $A = g_{\phi\phi}/(-D)$ 」(p.415, 1.2) と定まる. ここで式 (11.71) の $g_{\phi\phi}$ は正であり (これは ω の式 (11.90) の分母が常に正であることとして確認済みである), 式 (11.89) より $D = -\Delta$ なので「 A は正定値」(p.415, 1.6) である.

11.4 天文学における現実のブラックホール

■恒星質量ブラックホール (p.420~)

- 連星系に属するブラックホールは、相手の星のガスを降着させ、X線を放出するのに対し、重い星の重力崩壊で形成された孤立したブラックホールは発見することが難しい.
- ブラックホールと中性子星を見分けるのに、質量と脈動を用いる.
 - 降着する天体が X 線で定期的な周期の脈動をしていれば、それはパルサーであってブラックホールではない.
 - 降着天体の推定質量が $5M_\odot$ を大きく超えるようであれば、それはブラックホールと考えられる.
- ブラックホールの候補. Cyg X-1($10M_\odot$ 程度), M33 X-7($70M_\odot$).
- たいていの天文学者は超新星爆発でブラックホールが生まれると考えている.

■超大質量ブラックホール

- われわれの銀河中心には $4.3 \times 10^6 M_\odot$ の超大質量ブラックホールがある.
- ブラックホールは銀河形成の過程と関連しているようであるが、その関連性がどのようなものかは明らかにはなっていない.

- クェーサー現象は、典型的には $10^9 M_{\odot}$ 程度のずっと重いブラックホールへガスが降着することで起きると考えられている。
- 銀河中心のブラックホール質量と、銀河中心部の星（銀河のバルジと呼ばれる）の速度分散の間には高い相関がある。ブラックホールの質量が大きいほど速度も大きい。
- ブラックホールは他のブラックホールとの合体により大きくなると考えられる。

■ 中間質量ブラックホール (p.424) $100 \sim 10^4 M_{\odot}$ 程度の質量のブラックホールを中間質量ブラックホールと呼ぶ。天文学者は、初代の星形成の時代に作られたと考えられる中間質量ブラックホールを重点的に探してきた。

■ 動的ブラックホール

- ブラックホールが他のブラックホールや星と衝突する場合は非常に動的なものとなる。
- 一般相対性理論に基づく数値シミュレーションにより、ブラックホールの合体に関して信頼できる可能性を出せるようになった。初期状態の非対称性により、合体において放出される重力波は特定の方向に運動量を運び出し、ブラックホールは反対方向に反跳される。これはキックと呼ばれ、ブラックホールは星の集団や渦状銀河の中心から放出される。

11.5 ブラックホールによる量子力学的輻射放出：ホーキング過程

Hawking はブラックホールの近くの電磁場に量子力学を適用し、ブラックホールはエネルギーを連続的に放射していることを示した。これに対する初等的な“もっともらしい議論”を与えよう。場の量子論によれば、真空では光子対 (エネルギー $\pm E$) が対生成し、エネルギー保存則を破る。しかしこれは $\Delta t = \hbar/(2\Delta E)$ 以下の短い時間の後に対消滅するため、エネルギー保存則は大きなスケールでは厳密に成り立っている。さて、一方が $E(\geq 0)$ 、他方が $-E$ のエネルギーを持つ光子対が地平面のすぐ外側で作られると、負エネルギー光子は時間 $\hbar/(2E)$ が経つ前に地平面の中に入る可能性がある。このとき負エネルギー光子はいったん地平面の中に入ると自由に伝播することができ、正エネルギー光子は無制限に逃げられる。これがブラックホールからの輻射を成す。

- 負エネルギー光子が地平面内を自由に伝播できること
簡単のために Schwarzschild メトリックを考える。
地平面内を光子が伝播できるためには、地平面内 $r < 2M$ の観測者

$$\vec{U} = (0, U^r, 0, 0) \quad \left(\vec{U} \cdot \vec{U} = -1 \Rightarrow U^r = - \left(\frac{2M}{r} - 1 \right)^{1/2} \right)$$

が観測する光子のエネルギー

$$-\vec{p} \cdot \vec{U} = - \left(\frac{2M}{r} - 1 \right)^{-1/2} p^r$$

が正、したがって $p^r < 0$ でなければならない。

ところが動径方向に運動するゼロ角運動量 $L = 0$ の光子に対して $E = \pm p^r$ なので (式 (11.12) 参照), この条件 $p^r < 0$ は E [Schwarzschild 座標におけるエネルギー $-p_0$] の符号に制約を与えない. よって $E < 0$ の光子は地平面内を自由に伝播できる.

- ブラックホールの放射する光子のエネルギー

はじめ地平面付近 $r = 2M + \varepsilon (\varepsilon > 0)$ に瞬間的に静止していた観測者

$$\vec{U} = (U^0, 0, 0, 0),$$

$$\left(\vec{U} \cdot \vec{U} = -g^{00} U_0^2 = -1 \Rightarrow -U_0 = \left(-\frac{1}{g^{00}} \right)^{1/2} = \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{1/2} \simeq \left(\frac{\varepsilon}{2M} \right)^{1/2} \right)$$

が地平面に落下する固有時間は $\Delta\tau \simeq 2(2M\varepsilon)^{1/2}$ なので, この系に対する光子のエネルギーは

$$\mathcal{E} = \frac{\hbar}{\Delta\tau} = \frac{\hbar}{2} (2M\varepsilon)^{-1/2}$$

である.

これを $-\vec{p} \cdot \vec{U} = -g^{00} p_0 U_0$ と等置すると, 光子の軌道上の保存エネルギー,

したがって無限遠にとどいたときに測定されるエネルギー [Schwarzschild 座標におけるエネルギー] は

$$E \equiv -p_0 = \frac{\hbar}{8\pi M}$$

となる.

これはブラックホールを温度

$$T = \frac{\hbar}{8\pi k M} \quad (k : \text{Boltzmann 定数})$$

の黒体としたときの黒体放射に特徴的なスペクトルとよく合っている.

- Penrose 過程との違い

Hawking 過程は

- エルゴ領域を持たないブラックホールでも起こる
- 不安定的な暴走を起こさない

という点で Penrose 過程と異なる.

- ブラックホールの輻射率は,

$$\begin{aligned} \text{地平面の表面積} \quad A &= 16\pi M^2 \quad (\text{式 (11.85) で } a = 0 \text{ とおく}), \\ \text{ブラックホールの温度} \quad T &= \frac{\hbar}{8\pi k M} \end{aligned}$$

に対して AT^4 に比例するので, これは M^{-2} に比例する.

よって $\frac{dM}{dt} \sim M^{-2}$ であり, ここからブラックホールの寿命は $\tau \sim M^3$ となる.

これが宇宙の年齢 10^{10} に収まるには, ブラックホールの質量は $M \lesssim 10^{12} \text{kg}$ でなければならない.

これは太陽質量 ($\sim 10^{30} \text{kg}$) に比べて小さいけれど,

宇宙のごく初期には 10^{12}kg のブラックホールができる可能性がある.

10^{12}kg のブラックホールの温度は 10^{11}K で $[T = \frac{\hbar}{8\pi k M}]$, 主に γ 線を放出する.

しかし観測される γ 線バーストは, ブラックホールの蒸発によるものと考えるには明るすぎる.

- Hawking の議論は光子の伝播が時空を変化させないことを仮定しており、典型的な光子のエネルギー E に対して $E \ll M$ が満たされるときにのみ正しい。
- 重力と熱力学の統一
Schwarzschild ブラックホールに対して
質量 M はそのエネルギー E , $T_H = \hbar/(8\pi kM)$ はその温度なので、

$$A = 16\pi M^2, \quad \therefore dM = \frac{\hbar}{8\pi kM} d\left(\frac{kA}{4\hbar}\right)$$

は $S = kA/4\hbar$ をエントロピー S とする解釈の下で、熱力学第一法則

$$dE = T_H dS$$

を表す。

このとき Hawking の面積定理 $\frac{dA}{dt} \geq 0$ は熱力学第二法則 $\frac{dS}{dt} \geq 0$ と見なせる。

- ブラックホールからの輻射は、地平面の形成の際に、
古典的な描像では消し去られた情報を運ぶことができるかもしれない。

11.5 について

■系の落下時間 (11.100),(11.101) について 式 (11.59): $d\tau = \frac{dr}{\tilde{E}^2 - 1 + \frac{2M}{r}}$ に一定値 $\tilde{E}^2 = 1 - \frac{2M}{2M+\varepsilon}$ を代入すると、式 (11.100):

$$\Delta\tau = - \int_{2M+\varepsilon}^{2M} \frac{dr}{\left(\frac{2M}{r} - \frac{2M}{2M+\varepsilon}\right)^{1/2}}$$

を得る。この積分は

$$\begin{aligned} \Delta\tau &= \left(\frac{2M+\varepsilon}{2M}\right)^{1/2} \int_{2M}^{2M+\varepsilon} \frac{r^{1/2} dr}{(2M+\varepsilon-r)^{1/2}} \\ &= 2 \left(\frac{2M+\varepsilon}{2M}\right)^{1/2} \int_0^{\sqrt{\varepsilon}} (2M+\varepsilon-X^2)^{1/2} dX \quad (X \equiv (2M+\varepsilon-r)^{1/2}) \\ &= 2\{1+O(\varepsilon)\}\{(2M\varepsilon)^{1/2} + O(\varepsilon^{3/2})\} \\ &= 2(2M\varepsilon)^{1/2} + O(\varepsilon^{3/2}) : (11.101) \end{aligned}$$

と評価できる。

■「揺らぎの時間 \hbar/\mathcal{E} 」(p.428, l.2) について $\frac{\hbar/2}{\mathcal{E}}$ となっていない。因子 1/2 の違いは結論 (11.104) の数係数に影響する。

■ E の式 (11.104) について $E = \mathcal{E} \cdot \frac{1}{-U_0} \cdot \frac{1}{-g^{00}}$ において

$$\mathcal{E} = \frac{\hbar}{2} \frac{1}{\sqrt{2M\varepsilon}}, \quad \frac{1}{-U_0} = \sqrt{\frac{2M}{\varepsilon}}, \quad \frac{1}{-g^{00}} = 1 - \frac{2M}{2M+\varepsilon} \simeq \frac{\varepsilon}{2M}$$

である。

■「ブラックホールからの輻射率は、 AT^4 に比例する」(p.429, l.15~16) について T^4 の温度依存性は、黒体放射に関する Stefan-Boltzmann の法則による。

■蒸発の最後の瞬間に放出されるエネルギー (11.110) について $\tau_0 = 10^{10}\text{yr}$, $M_0 = 10^{12}\text{kg}$ とすると式 (11.108) の比例係数は

$$\tau = \tau_0 \frac{M^3}{M_0^3}$$

と定まるので (式 (11.109)),

$$M = \left(\frac{\tau}{\tau_0/M_0^3} \right)^{1/3} = \left(\frac{(3 \times 10^7)^{-1}\text{yr}}{10^{10}\text{yr}/10^{3 \times 12}\text{kg}^3} \right)^{1/3} \sim 10^6\text{kg}$$

を得る. これに $c^2 = (3 \times 10^8\text{m}/2)^2$ をかけてエネルギーに換算すれば 10^{23}J 程度となる.

■「 $\hbar/(8\pi kM)$ はその温度だから」 (p.431, 1.7) について これは式 (11.105): $T = \hbar/(8\pi kM)$ の h を \hbar に置き換えたものである.

12 宇宙論

12.1 宇宙論とはどういうものか

全体としての宇宙 p. 441 ~

宇宙論 ---- 学際的

[復習: 例えば Schwarzschild メトリック (10.36) は $M/R \ll 1$ のとき平坦な時空のメトリックとなる]

一般相対論の重要となる $M/R \sim 1$ の系 [動的な重力に対する強度の評価は9.3節冒頭]

- コンパクト星, 崩壊した対象 ---- M に対し R が小さい
- 宇宙論 ---- 宇宙の一般的な質量密度 ρ に対して, M/R は

$$\frac{M}{R} = \frac{(4\pi R^3/3)\rho}{R} \propto R^2$$

に従って R とともに増大

一般相対論が重要でない $M/R \ll 1$ の系

銀河, 銀河団全体 (R を銀河程度に広げても, その中の質量 M は太陽質量から増大しない)

- ニュートン重力 → 境界条件に依存
- 一般相対論 → 時空は局所的に平坦である
- 宇宙の“果て”の形は局所的な対象の研究に影響しかい

宇宙論の舞台 p. 443 ~

オールドマンのボックス: 星からの光にも関わらず, 夜空は暗い

宇宙の膨張 → われわれに届く光は近隣の星からに限れる
→ 夜空は暗い (ボックスの解決)

インフレーション → { 宇宙の一様性, 密度ゆらぎ } を説明

12.2 宇宙論的動力学: 膨張宇宙の観測

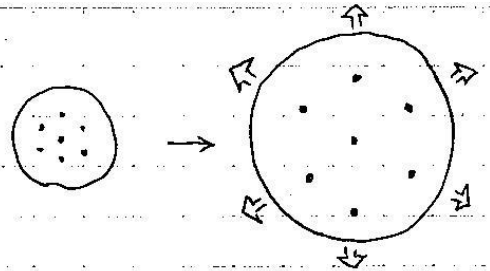
宇宙の一様性と等方性 p. 445 ~

- (i) 大きなスケールでの宇宙の一様性
- (ii) 等方性
- (iii) 宇宙の膨張の一様性

を仮定して良い。

宇宙の一樣、等方的な膨張 (右図)

→ 宇宙の一樣性・等方性を保持,
どの点から見ても各点は距離 d に比例した速度
 $v = Hd$
で後退.



- 各時刻で空間が一樣、等方で $v = Hd$ となる時間座標を持つ宇宙論的基準系をとれる
- $v = Hd$ が光速を超えない局所的な領域に限定しても、十分な観測領域が含まれる.

■ 「ハッブル時間 $t_H = H^{-1}$ ----- 宇宙が進化してきた時間の -----」 (p. 446 最下行 ~ p. 447, 2.3) について

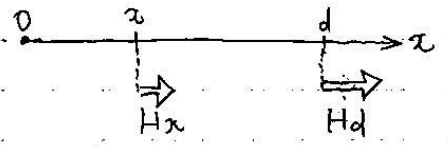
ハッブルパラメーターの次元は $[H] = [v/d] = T^{-1}$.

距離 d だけ離れた宇宙の果ての天体について


「過去の膨張速度は変化する」 (p. 447, 2.2) けれど (右図),

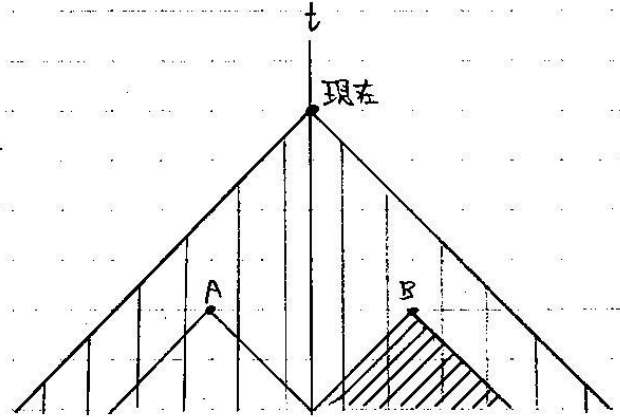
現在の速度 $v = Hd$ のまま果て $x = d$ まで移動して



仮定したときの所要時間 $d/v = 1/H$ は宇宙年齢の自然な目安を与えて考えられる.



宇宙のモデル: 宇宙原理 p. 447 ~

右図において光円錐  の外側の領域は
現在、観測できない未知の領域である。
この領域も一樣かつ等方的と仮定する
(= 宇宙原理, 凡庸性仮定).



A にとって未知の領域にある
B で観測可能な宇宙 () も
A で観測可能な宇宙同様、現在の我々には観測可能な領域 () 内にあり、
いずれも一樣・等方的と知っているから、もってこしい仮定として受け入れられる。

光円錐内部でも遠くて暗すぎる銀河や、宇宙がプラズマだったときに放射された過去からの光は
観測できないが、いずれ重力波を用いて観測できるようになるだろう。

宇宙論的メトリック p.449~

(i) 時空は完全に一様で等方である時間一定の超曲面でスライスすることができる

(ii) 銀河の平均的な静止系は同時性のこの定義と一致する

さらに各銀河がランダムな運動を持たないならば、

[空間の一様・等方性を保証するような座標系で空間座標 x^i が一定の位置には常に同じ銀河が存在するから] 個々の銀河が固定した空間座標 x^i を与える共動座標系を採用することができる。

以上の理想化の下で 時間一定の超曲面上の線要素を

$$dl^2(t) = R(t) h_{ij} dx^i dx^j, \quad R(t) = 1$$

と書けば、片膨張の一様性が保証される。次に

(ii)' $t = (\text{一定})$ によって与えられた同時の銀河が

銀河に固定した局所ローレンツ系を成す

$$\text{とす } 0 = \vec{e}_0 \cdot \vec{e}_i = g_{0i},$$

$$\therefore ds^2 = -dt^2 + dl^2(t)$$

最後に $t = t_0$ の超曲面内の線要素

$$dl^2 = h_{ij} dx^i dx^j \text{ が原点に関して球対称な形 } dl^2 = e^{2\lambda} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \text{ になり、}$$

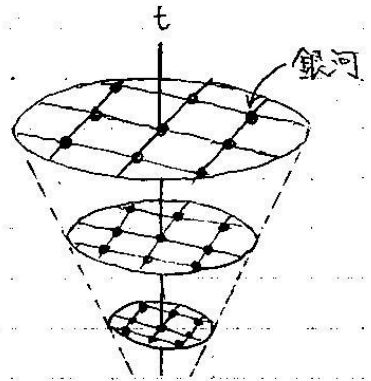
これが各点で一定の値をとる3次元リッチスカラーを与えることを要求する。

(これは一様・等方性の必要条件であるだけでなく、実は十分条件になっている)

するとロバートソン・ウォーカーのメトリック

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right] \quad (k=0, \pm 1)$$

が得られる [rは無次元]。



宇宙論的メトリック (p.449~) について

■ アインシュタインテンソル (12.8) について

原点の周りに球対称な空間の線要素 (12.7): $dl^2 = e^{2\lambda} dr^2 + r^2 d\Omega^2$ を

式 (12.6): $ds^2 = -dt^2 + R^2(t) h_{ij} dx^i dx^j$ の右辺第2項における $h_{ij} dx^i dx^j$ にとって、

$t = t_0$ でのメトリックを与える式は式 (10.7): $ds^2 = -e^{2\Phi} dt^2 + e^{2\lambda} dr^2 + r^2 d\Omega^2$ において

$\Phi = 0$ としたものが、このメトリックから得られるアインシュタインテンソルは

$$\text{式 (10.14)} \Rightarrow G_{00} = \frac{1}{r^2} e^{2\Phi} \frac{d}{dr} \left[r(1-e^{-2\lambda}) \right] \Big|_{\Phi=0} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r(1-e^{-2\lambda}) \right]$$

$$\text{式 (10.15)} \Rightarrow G_{rr} = \left[-\frac{1}{r^2} e^{2\lambda} (1-e^{-2\lambda}) + \frac{2}{r} \Phi' \right] \Big|_{\Phi=0} = -\frac{1}{r^2} e^{2\lambda} (1-e^{-2\lambda})$$

$$\text{式 (10.16)} \Rightarrow G_{\theta\theta} = r^2 e^{-2\lambda} \left[\Phi'' + (\Phi')^2 + \frac{\Phi'}{r} - \Phi' \lambda' - \frac{\lambda'}{r} \right] \Big|_{\Phi=0} = -r \lambda' e^{-2\lambda}$$

$$\text{式 (10.17)} \Rightarrow G_{\phi\phi} = \sin^2 \theta G_{\theta\theta}$$

} 式 (12.8)

■ トレース G の式 (12.9) について

3次元空間でのリッチ・スカラー R がいたるところ一定であることは

$$G \equiv g_{ij} G^{ij} = g_{ij} (R^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} R) = -\frac{1}{2} R$$

よって $G = k$ (一定) を意味する。

ただし最後の等号では、今考えている座標系でも

$$4 = \delta^{\mu}_{\mu} = g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = (-1)^2 + g^{ij} g_{ij}, \quad \therefore g^{ij} g_{ij} = 3$$

が成立することも用いた。

そこでトレース G を計算しよう。

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} e^{2\lambda} & & 0 \\ & r^2 & \\ 0 & & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = \begin{pmatrix} e^{-2\lambda} & & 0 \\ & 1/r^2 & \\ & & 1/r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

および $G_{\mu\nu}$ の式 (12.8) を用いて

$$G \equiv g^{ij} G_{ij} = g^{rr} G_{rr} + g^{\theta\theta} G_{\theta\theta} + g^{\phi\phi} G_{\phi\phi}$$

$$= e^{-2\lambda} \left\{ -\frac{1}{r^2} e^{2\lambda} (1 - e^{-2\lambda}) \right\} + \frac{1}{r^2} (-rN' e^{-2\lambda}) + \frac{r^2 \sin^2 \theta}{r^2 e^{2\lambda}} (-rN' e^{-2\lambda})$$

$$= \frac{-(1 - e^{-2\lambda}) - 2rN' e^{-2\lambda}}{r^2}$$

$$= -\frac{1}{r^2} \{ 1 - (re^{-2\lambda})' \} : (12.9) \text{ を得る.}$$

■ g_{rr} の式 (12.11) について

$$(re^{-2\lambda})' = 1 + r^2 k, \quad \therefore re^{-2\lambda} = r + \frac{k}{3} r^3 - A, \quad \therefore (g_{rr}) e^{2\lambda} = \frac{1}{1 + \frac{k}{3} r^2 - \frac{A}{r}} : (12.11)$$

■ 「球対称星の場合と同様に…… (10.5 節と比較せよ)」 (p. 452, l. 3, 4) について
p. 344 参照

■ 「 $k=3$ とする」 (p. 452 下から4行目) について

長さの次元を持つ定数 $a (> 0)$ を用い $k = \pm 1/a^2$ とする。

このとき無次元化した長さ $\tilde{r} \equiv r/a$ に対して

$$R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right] = \tilde{R}^2(t) \left[\frac{d\tilde{r}^2}{1 \mp \tilde{r}^2} + \tilde{r}^2 d\Omega^2 \right],$$

$\tilde{R} \equiv aR$ (この長さの次元を持つ)

となるから、 $k \geq 0$ に対して $k = \pm 1$ に変換される。

3種類の宇宙 p.453~

ロバートソン-ウォーカーのメトリック

$$ds^2 = -dt^2 + R^2 \left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right]$$

$k=0 \Rightarrow$ 平坦モデル

$$ds^2 = -dt^2 + \{ (dr')^2 + (r')^2 d\Omega^2 \}, \quad r' \equiv rR$$

$k=+1 \Rightarrow$ 閉じたモデル

$$ds^2 = -dt^2 + R^2 (d\chi^2 + \sin^2 \chi d\Omega^2), \quad d\chi^2 \equiv \frac{dr^2}{1-r^2}$$

空間部分は3次元球のメトリック

$k=-1 \Rightarrow$ 開いたモデル

$$ds^2 = -dt^2 + R^2 (d\chi^2 + \sinh^2 \chi d\Omega^2), \quad d\chi^2 = \frac{dr^2}{1+r^2}$$

空間部分は原点から一定の時間的間隔を持つ超曲面の線要素
(固有距離 $\int d\chi$ は半径 $R\chi$ に対して円周 $2\pi R \sinh \chi$)

3種類の宇宙 (p.453~) について

■ 閉じたモデルの式 (12.18) について

$k=+1$ のとき ロバートソン-ウォーカー・メトリックは

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t) \left[\underbrace{\frac{dr^2}{1-r^2}}_{\textcircled{1}} + \underbrace{r^2 d\Omega^2}_{\textcircled{2}} \right]$$

で与えられる。

① = $d\chi^2$: (12.16) と同じ χ として

$$\chi = \int^r \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} = \int^{\theta} \frac{\cancel{\cos \theta} d\theta}{\cancel{\cos \theta}} \quad (r \equiv \cos \theta)$$

$$= \theta + \text{const.}$$

$$= \arcsin r + \text{const.} \quad \text{において const} = 0 \text{ としたものを採用して}$$

$\chi = \arcsin r$: (12.17) と同じ (これは確かに無次元)。

これを②に代入して式 (12.18) を得る。

■ 「6.9節の練習問題33で、このメトリックは半径R(r)の三次元球面のメトリックであることを示した」
 (式(12.18)の下2行)について

6.9 練習問題 33

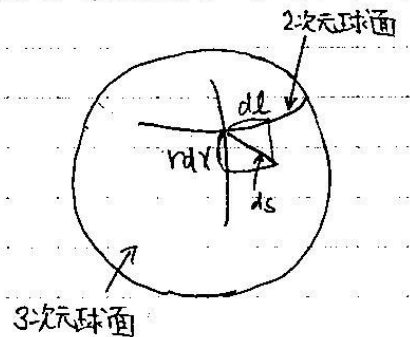
$$\begin{array}{l}
 (a) \quad x = r \sin \chi \sin \theta \cos \phi \\
 \quad y = r \sin \chi \sin \theta \sin \phi \\
 \quad z = r \sin \chi \cos \theta \\
 \quad w = r \cos \chi
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \rightarrow x^2 + y^2 \\
 = r^2 \sin^2 \chi \sin^2 \theta \\
 \rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \\
 = r^2 \sin^2 \chi \\
 \rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \\
 = r^2
 \end{array}$$

(b) $dw = -r \sin \theta d\chi$, etc. として正直に計算も行えば良いが、
 ここでは三次元球面、二次元球面とのアナロジーの助けを借りて、
 正しい結論も推定して済ませよう (これは結論の解釈に当たる)。

χ が一定の面は半径 $r \sin \chi$ の通常の球面だから、その上の線要素は
 $dl^2 = (r \sin \chi)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$ 。

これを右図のように三次元球面の“円周”方向の線要素と
 見たし、 χ 方向の線要素 $r d\chi$ と直交すると考えて

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= (r d\chi)^2 + dl^2 \\
 &= r^2 (d\chi^2 + \sin^2 \chi d\theta^2 + \sin^2 \chi \sin^2 \theta d\phi^2) \\
 \therefore g_{\chi\chi} &= r^2, \quad g_{\theta\theta} = r^2 \sin^2 \chi, \quad g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2 \chi \sin^2 \theta.
 \end{aligned}$$



p. 453 下から9行目「同様な座標変換で(12.6練習問題7)」とあるが、正しくは練習問題8(a)だろ。
練習問題8

(a) $dx^2 \equiv \frac{dr^2}{1+r^2}$, $\chi = \int \frac{dr}{\sqrt{1+r^2}} \stackrel{r=a\sinh\phi}{=} \int \frac{\cosh\phi}{\cosh\phi} d\phi = \phi + \text{const.} = a^{-1}r + \text{const.}$

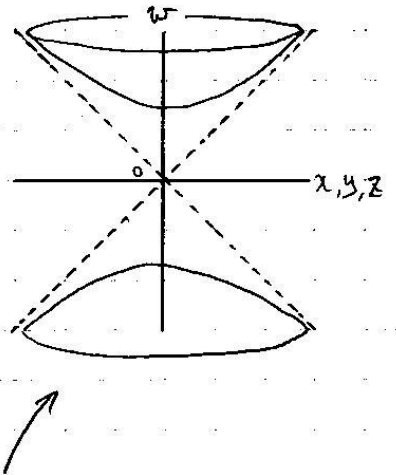
の最右辺において const=0 とする χ を導入し, $r = a\sinh\chi$,
 $\therefore ds^2 = -dt^2 + R^2(dx^2 + a^2\cosh^2\chi d\Omega^2) = (12.19)$
 とすれば良い。

(b) 双曲的ロバートソン-ウォーカーモデルの空間線要素(12.19):

$$dl^2 = R^2(t_0) \{ dx^2 + a^2 \cosh^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \}$$

は, θ, ϕ, χ による

$$\begin{cases} x = R(t_0) a \sinh \chi \sin \theta \cos \phi \\ y = R(t_0) a \sinh \chi \sin \theta \sin \phi \\ z = R(t_0) a \sinh \chi \cos \theta \\ w = R(t_0) \cosh \chi \end{cases} \rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = R^2 a^2 \sinh^2 \chi$$



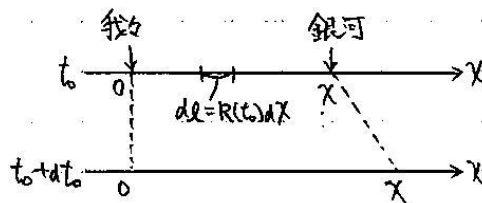
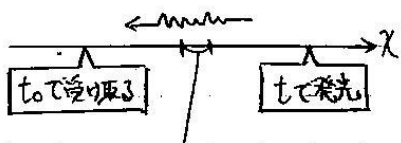
という外アリスされる x, y, z, w 空間の超曲面 $w^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = R^2(t_0)$ 上の線要素である。

距離の指標としての赤方偏移 p. 454 ~

近傍の宇宙 ----- 固有距離を pc (110-セ7) で測定

遠方 ----- 光を受け取るまでに時間がかかる。

「遠い \rightarrow 速く遠ざかる \rightarrow 赤方偏移・大」に注意し, 赤方偏移を指標に用いる。



(0) $ds^2 = -dt^2 + R^2(t) dx^2$ における

外アリス $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & R^2(t) \end{pmatrix}$ は χ にJSない

$\rightarrow R_\chi$ が保存

$$1+z = \frac{R(t_0)}{R(t)} \quad (12.21)$$

H は宇宙の瞬間的な膨張率である

$$H = \frac{\dot{R}}{R} \quad (12.22)$$

赤方偏移はドップラー効果であること
 $z = v$

- H も赤方偏移で表した式 (12.31):
 $H(z) = H_0 \left(1 - \frac{H_0}{H_0^2} z + \dots \right)$
- $H(t) = -\frac{\dot{z}}{1+z} : (12.32)$
 とる式 (12.28) と同等

距離の指標としての赤方偏移 (p.459) 補足

■ 「12.6の練習問題6で……みる」 (p.455, 2.13, 14) について

正しくは問題9である。これを解く。

(a) 光子に対して $\vec{p} \cdot \vec{p} = 0$ が座標系に依らずに成立するから

$$0 = g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = -(p^0)^2 + R^2(t) (p^x)^2$$

$$\Rightarrow |p^0| = R(t) |p^x| = R(t) g^{xx} |p^x| = \frac{1}{R(t)} |p^x|$$

「 p^0 が $R(t)$ に反比例」 (p.455, 2.13, 14)

$$0 = g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = -(p_r)^2 + (p_x)^2 / R^2(t)$$

$$\Rightarrow |p_r| = \frac{1}{R(t)} |p_x|$$

(b) 観測されたエネルギー $|p^0|$ (または $|p_r|$) が

$$\frac{|p_x|}{R(t)} \rightarrow \frac{|p_x|}{R(t)} \quad \text{と減じる}$$

$$1+z = \frac{\lambda(t)}{\lambda(t_0)} = \frac{|p_x|/R(t)}{|p_x|/R(t_0)} = \frac{R(t_0)}{R(t)}$$

■ 「固定した座標値 X に固定したわけの銀河は宇宙膨張によってわんわんか遠ざかっている」

(式(12.22)下2行) について

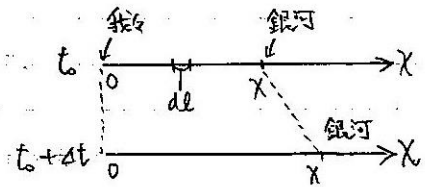
意味のところに文章であるが右図のように解く。

すると $t=t_0$ の現在の線素は $dl = R(t_0) dX$ だから、

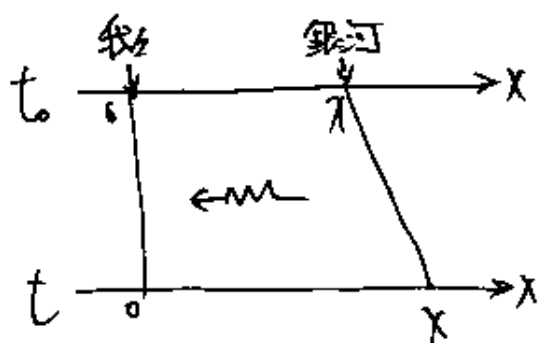
銀河までの固有距離は $d_0 = R(t_0) X$: (12.23) である。

よって

$$v \equiv \dot{d}_0 = \dot{R}(t) X = \frac{\dot{R}(t_0)}{R(t_0)} d_0 \equiv H_0 X, \quad H_0 = \frac{\dot{R}(t_0)}{R(t_0)} : (12.22)$$



12.6 練習問題10



湯川秀樹、林忠四郎、早川朝 『宇宙物理学』 p.319
の近傍の銀河に対する式

$$R(t) \approx R_0 + \dot{R}_0(t-t_0) \quad \dots \textcircled{1}$$

$$R_0 X \approx t_0 - t \quad \dots \textcircled{2}$$

では、光の伝播時間 $t-t_0$ が短く、
その1次までとしたのが①で、
その間の宇宙の膨張を無視したのが②である。

よって

$$1+z = \frac{R_0}{R(t)} \approx \frac{R_0}{R_0 + \dot{R}_0(t-t_0)} \approx 1 - \frac{\dot{R}_0}{R_0}(t-t_0)$$

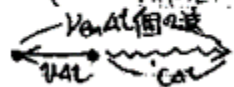
(12.21) ① (t-t₀の1次まで)

$$\approx 1 + \frac{\dot{R}_0}{R_0} \cdot R_0 X \approx 1 + \frac{\dot{R}_0}{R_0} d \approx 1+v \quad \therefore z=v$$

② (12.23) (12.24)

p.456 2.7~9 「宇宙の……ドップラー効果にはかならない」、
練習問題10 「後退速度 v をもった物体に対して期待される $z=v$ 」

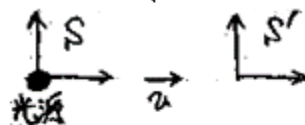
よって、特殊相対論で S 系で $\nu_{em} \Rightarrow S'$ 系で $\nu_{rec} = \frac{1+v}{\sqrt{1-v^2}} \nu_{em} = (1+v)\nu_{em} + O(v^3)$



$$\lambda_{rec} = \frac{c+v}{\nu_{em}} = \lambda_{em} (1+v)$$

$$\therefore \lambda_{rec} \approx (1+v)\lambda_{em} \quad z=v$$

これは左図の非相対論的系誤りに一致



後半補足

$R(t)$ の式(12.25)は(12.22): $H = \dot{R}/R$ を
 $H dt = dR/R$ と変数分離して得る.

テイラー展開(12.26)を得るには、まず \exp 内を
 $\int_{t_0}^t dt' H(t') = \int_{t_0}^t dt' \{H_0 + \dot{H}_0(t'-t_0) + O((t'-t_0)^2)\}$
 $= H_0(t-t_0) + \frac{1}{2}\dot{H}_0(t-t_0)^2 + O((t-t_0)^3) \dots$ (*)

と展開し、
 $\exp\left[\int_{t_0}^t dt' H(t')\right] = 1 + \left[\int_{t_0}^t dt' H(t')\right] + \frac{1}{2}\left[\int_{t_0}^t dt' H(t')\right]^2 + \dots$
 $\approx 1 + [H_0(t-t_0) + \frac{1}{2}\dot{H}_0(t-t_0)^2 + \dots] + \frac{1}{2}[H_0^2(t-t_0)^2 + \dots]$
 (*) とすればよい。

減速パラメータ(12.29): $\beta_0 = -\frac{R_0 \dot{R}_0}{R_0^2}$ は
 “減速度” $-\dot{R}_0$ を R_0^2/R_0 で無次元化したものになっている。

$[-\dot{R}_0] = \frac{[R]}{T^2}$, $\left[\frac{\dot{R}_0}{R_0}\right] = \frac{[R]}{T^2} \times \frac{1}{[R]}$
 さらに(12.22): $H = \frac{\dot{R}}{R}$, $\dot{H} = -\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{\ddot{R}}{R}$ を用いて
 $\beta_0 = -\left(\frac{R_0}{\dot{R}_0}\right)^2 \times \frac{\ddot{R}_0}{R_0} = -\frac{1}{H_0^2} \times \left(\dot{H}_0 + \frac{\ddot{R}_0}{R_0}\right)$
 $= -\left(1 + \frac{\dot{H}_0}{H_0^2}\right)$ と書きかえられる。

z を H で表した式(12.28):

$$1+z(t) \stackrel{(12.21)}{\approx} \frac{R(t_0)}{R(t)} \stackrel{(12.25)}{\approx} \exp\left[-\int_{t_0}^t dt' H(t')\right] \quad \text{の逆を右辺に}$$

テイラー展開
 $\exp\left[-\int_{t_0}^t dt' H(t')\right] = 1 - \left[\int_{t_0}^t dt' H(t')\right] + \frac{1}{2}\left[\int_{t_0}^t dt' H(t')\right]^2 + \dots$
 $\approx 1 - [H_0(t-t_0) + \frac{1}{2}\dot{H}_0(t-t_0)^2 + \dots] + \frac{1}{2}[H_0^2(t-t_0)^2 + \dots]$
 (*) とした上で(12.29)を得る。

(12.29): $z(t) = H_0(t_0-t) + \frac{1}{2}(H_0^2 - \dot{H}_0)(t_0-t)^2 + \dots$
 には t_0-t を逆に z で表した式(12.30)を得るには、

これをひたす
 $t_0-t = \frac{1}{H_0}\left(z - \frac{1}{2}(H_0^2 - \dot{H}_0)(t_0-t)^2 + \dots\right)$ と書きかえ
 逐次代入は

$$\begin{aligned} & t_0-t \\ &= \frac{1}{H_0}\left[z - \frac{1}{2}(H_0^2 - \dot{H}_0)\left\{\frac{1}{H_0}\left(z - \frac{1}{2}(H_0^2 - \dot{H}_0)(t_0-t)^2 + \dots\right)\right\}^2 + \dots\right] \\ &= \frac{1}{H_0}\left[z - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\dot{H}_0}{H_0^2}\right)z^2 + \dots\right] \quad (12.30) \end{aligned}$$

とすればよい。
 これを $H(t) = H_0 + \dot{H}_0(t-t_0)$ に代入して
 (教科書では H_0 の添字ゼロが落れている)
 (12.31)を得る。

以上は無関係に(12.28)のみから

$$\begin{aligned} \dot{z} &= -H(t) \exp\left[-\int_{t_0}^t dt' H(t')\right] \\ &= -H(t)(1+z) \quad \Leftrightarrow (12.32) \end{aligned}$$

を得る

宇宙地理学：宇宙における距離の測定 p.458~

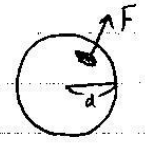
→ アインシュタイン方程式を用いず、ハッブル・パラメータの進化を記述

空間がユークリッド的に見えるほど近い距離 d にある星の絶対光度

$L = 4\pi d^2 F$, F : 流束.

遠方の天体に対しても光度距離 $d_L = \left(\frac{L}{4\pi F}\right)^{1/2}$ を定義する.

これは天体までの固有距離とは異なる.



光度距離に対する式 (12.40):

$d_L = R_0 r (1+z)$ が導かれる.

流束は観測時点での光源からの固有距離に依存

流束は赤方偏移による光子のエネルギーの減少と通過時間の引き伸ばしに依存

この光源座標 r を z で表すと、非相対論的公式 $v = Hd$ の相対論的拡張にあたる式 (12.42):

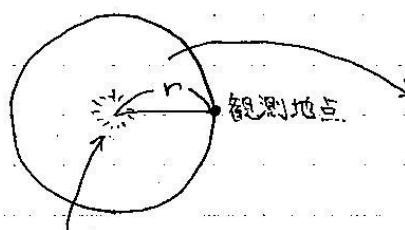
$d_L = \left(\frac{z}{H_0}\right) \left[1 + \left(1 + \frac{1}{2} \frac{H_0^2}{H^2}\right) z\right] + \dots$ を得る.

[$d \ll z$ における距離 d が観測可能な光学距離 d_L に置き換わっており、 z の1次までとると $z = H_0 d_L$ にもとる.]

d_L, z の測定から加速膨張に関する H_0 を得る.

宇宙地理学：----- (p.458~) 補足

■ 光度距離の式 (12.40) の導出について



全方向に放出した $\begin{cases} \text{エネルギー} & L \delta t \\ \text{光子数} & L \delta t c / h \nu_e \equiv N \end{cases}$

観測時刻 t_0 での表面積
 $A \equiv \int R(t_0) r \sin \theta d\theta \times R(t_0) r d\theta$
 $= 4\pi R_0^2 r^2 : (12.36), \quad R_0 \equiv R(t_0)$

振動数 ν_e の光を時刻 $t_e \sim t_e + \delta t_e$ に放出

観測されるエネルギー $h \nu_0 / H z$

赤方偏移は振動に要する固有時間の増大 (12.38): $\delta t_0 = \delta t_e (1+z)$ によって与えられる。

以上の観測場の流量は

$$F = \frac{h\nu_0 \times N}{\delta t_0 \times A} = \frac{h\nu_e}{1+z} \times \frac{L \delta t_0}{h\nu_e} \times \frac{1}{(1+z) \delta t_0} \times \frac{1}{A} = \frac{L}{(1+z)^2 A} \quad (12.39)$$

なので、

$$d_L \equiv \left(\frac{L}{4\pi F} \right)^{1/2} = \frac{1}{(4\pi)^{1/2}} (1+z) A^{1/2} \stackrel{\text{式(12.36)}}{=} (1+z) R_0 r \quad (12.40)$$

を得る。

■ 式(12.42)の導出 — 練習問題12前半

ロバートソン-ウォーカー-メトリックの式(12.13): $ds^2 = -dt^2 + R^2(t) \left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right)$
 は $ds^2 = 0$, $d\Omega^2 = 0$ とした光子の軌道に沿って

$$dt = \ominus R(t) \frac{dr}{(1-kr^2)^{1/2}}, \quad \therefore \frac{dr}{(1-kr^2)^{1/2}} = - \frac{dt}{R(t)} \stackrel{\star}{=} \frac{dz}{R_0 H(z)} \quad (12.41) \quad \text{となる。}$$

負号は時間 $dt > 0$ が経過すると、光が原点に向かいて $dr < 0$ 変位するためによる。

★の等号では式(12.21): $1+z = R_0/R(t)$, 式(12.22): $H(z) = \dot{R}(t)/R(t)$ を用いる。

$$dz = -R_0 \frac{\dot{R}(t)}{R^2(t)} dt = - \frac{R_0}{R(t)} H(z) dt, \quad \therefore - \frac{dt}{R(t)} = \frac{dz}{R_0 H(z)} \quad \text{とした。}$$

よって

$$\int^r \frac{dr}{1-kr^2} = \int^r dr \{1 + O(r^2)\} \approx r \quad \leftarrow \text{小さな } r \text{ に対して曲率定数 } k \text{ は}$$

$$\int^z \frac{dz}{R_0 H(z)} = \frac{1}{R_0 H_0} \int^z dz \left[1 - \frac{\dot{H}_0}{H_0^2} z + \dots \right]^{-1} = \frac{1}{R_0 H_0} \int^z dz \left(1 + \frac{\dot{H}_0}{H_0^2} z + \dots \right)$$

$$= \frac{1}{R_0 H_0} \left(z + \frac{1}{2} \frac{\dot{H}_0}{H_0^2} z^2 + \dots \right)$$

なので

$$r = \frac{1}{R_0 H_0} \left(z + \frac{1}{2} \frac{\dot{H}_0}{H_0^2} z^2 + \dots \right),$$

$$\therefore d_L = R_0 r (1+z)$$

$$= R_0 (1+z) \times \frac{1}{R_0 H_0} \left(z + \frac{1}{2} \frac{\dot{H}_0}{H_0^2} z^2 + \dots \right)$$

$$= \frac{z}{H_0} \left[1 + \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\dot{H}_0}{H_0^2} \right) z \right] + \dots \quad (12.42)$$

を得る。

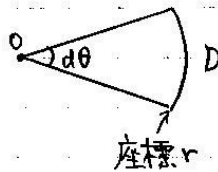
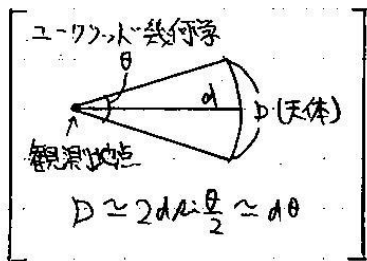
練習問題12後半 (式(12.44)が「練習問題6で導かれる」(p.461, 12.11)というのは誤植)

式(12.40): $d_L = R_0 r (1+z)$

式(12.44): $d_A \stackrel{\textcircled{1}}{=} R_0 r \stackrel{\textcircled{2}}{=} (1+z)^{-2} d_L$

② $\Leftrightarrow 1+z = R_0/R_e$ は式(12.21)と他ならない。

①について、時刻 t_0 に $d\theta$ の方向から受け取った光は、時刻 t_e に固有半径 $D = R(t_e) r d\theta$ の天体から発せられたものだから、 $d_A = \frac{D}{d\theta} = R(t_e) r$ とし得る。



$d_A \stackrel{(12.44)}{=} \frac{d_L}{(1+z)^2} = \frac{R_0 r}{1+z}$ に前半で導いた $r = \frac{1}{R_0 H_0} \left(z + \frac{1}{2} \frac{H_0}{H_0^2} z^2 + \dots \right)$ を代入して、

$d_A = \frac{z}{H_0} (1 - z + \dots) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{H_0}{H_0^2} z + \dots \right) = \frac{z}{H_0} \left[1 + \left(-1 + \frac{1}{2} \frac{H_0}{H_0^2} \right) z \right] + \dots$ (12.45) も得る。

宇宙は加速している! p.462~

等級-赤方偏移関係 (m-z関係)

..... 高赤方偏移で超新星は期待よりも暗く見える

← 加速膨張で遠かっているから ← 反発力の原因は何か

↔ 正の宇宙定数をもつアインシュタイン方程式

12.3 宇宙論的力学: 膨張宇宙の理解

ロバートソン-ウォーカー宇宙の力学: ビラクバシと暗黒エネルギー p.464~

ロバートソン-ウォーカー・メトリックと $(T^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$ に対して、

(アインシュタイン方程式に含まれる) 保存則 $T^{\mu\alpha}_{;\alpha} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} (pR^3) = -p \frac{d}{dt} (R^3)$

エネルギー変化 ← 仕事もして

$\Rightarrow \begin{cases} \text{物質優勢} (p=0 \text{ のダスト}) \text{ に対し } \frac{d}{dt} (pR^3) = 0 \rightarrow p \propto 1/R^3 \\ \text{輻射優勢} (p = \frac{1}{3} \text{ の光子ガス}) \text{ に対し } \frac{d}{dt} (pR^4) = 0 \rightarrow p \propto 1/R^4 \end{cases}$

アインシュタイン方程式に宇宙定数の項を含め

$$G^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu} = 8\pi T^{\mu\nu} \quad \text{i.e.} \quad G^{\mu\nu} = 8\pi \left(T^{\mu\nu} - \frac{\Lambda}{8\pi} g^{\mu\nu} \right)$$

とすることは、ストゥース-イェルギー-テンソルに暗黒エネルギー ρ_Λ , 暗黒圧 p_Λ の寄与

$$(T^{\mu\nu}) = -\frac{\Lambda}{8\pi} (g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \rho_\Lambda & & & 0 \\ & p_\Lambda & & \\ & & p_\Lambda & \\ 0 & & & p_\Lambda \end{pmatrix} \quad \text{を加えることで解釈できる.}$$

アインシュタイン方程式 $G_{tt} + \Lambda g_{tt} = 8\pi T_{tt}$

$$\Leftrightarrow \frac{\dot{R}^2}{2} = -\frac{k}{2} + \frac{4\pi}{3} R^2 (\rho_m + \rho_\Lambda) \quad [\text{フリードマン方程式}]$$

R が増大 $\rightarrow \rho_\Lambda R^2$ が増大 \rightarrow 膨張加速.

エネルギー密度 ρ だけでなく圧力 p も宇宙膨張の加速を引きおこす. 宇宙定数に付随した負の圧力が十分大きければ, 宇宙膨張は減速ではなく加速することが可能である. 実際このことは, アインシュタイン方程式に

含める関係 $\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi}{3} (\rho + 3p)$ 1. 見てわかる.

遠い未来の宇宙 R に対する制約

$$\frac{\dot{R}^2}{2} = -\frac{k}{2} + \frac{4}{3}\pi R^2 (\rho_m + \rho_\Lambda)$$

"運動エネルギー"
"全エネルギー"
"ポテンシャル"

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{4}{3}\pi R^2 (\rho_m + \rho_\Lambda) > 0 & \text{膨張を止めない } (k=-1, \rho_\Lambda > 0) \\ \frac{4}{3}\pi R^2 (\rho_m + \rho_\Lambda) > 0 & \text{膨張を止めない } (k=0, \rho_\Lambda > 0) \\ \frac{4}{3}\pi R^2 \rho_m \propto \frac{1}{R} \rightarrow 0 & \text{膨張率ゼロで減速 } (k=0, \rho_\Lambda = 0) \\ -\frac{1}{2} + \frac{4}{3}\pi R^2 \rho_m \rightarrow -\frac{1}{2} & \text{膨張から収縮へ } (k=-1, \rho_\Lambda = 0) \end{cases}$$

宇宙の過去と歴史

$\rho_\Lambda = 0$ とする. 現在 $\dot{R} > 0$ で, 過去にさかのぼると $R \rightarrow 0$ で \dot{R} は

$$\frac{\dot{R}^2}{2} = -\frac{k}{2} + \frac{4}{3}\pi R^2 \rho_m = \begin{cases} -\frac{k}{2} + \frac{\text{const}}{R} \rightarrow \infty & \text{(物質優勢)} \\ -\frac{k}{2} + \frac{\text{const}}{R^2} \rightarrow \infty & \text{(放射優勢)} \end{cases} \quad \text{に従って増大する.}$$

また $\rho_\Lambda = 0$ として, 十分初期に $k=0$ とすると,

● 放射優勢 $\rho = BR^{-1}$

$$\frac{\dot{R}^2}{2} = \frac{4}{3} \pi R^2 \cdot \frac{B}{R^4}$$

⇕

$$\dot{R} = \left(\frac{8}{3} \pi B\right)^{1/2} \frac{1}{R}$$

⇕

$$\frac{R^2}{2} = \left(\frac{8}{3} \pi B\right)^{1/2} t + \text{const.}$$

$R=0$ となる時刻がある。それを $t=0$ に選べば

$$R = \left(\frac{32}{3} \pi B\right)^{1/4} t^{1/2} \propto t^{1/2}$$

● 物質優勢 $\rho = BR^{-3}$ (≡ 練習問題19)

$$\frac{\dot{R}^2}{2} = \frac{4}{3} \pi R^2 \cdot \frac{B}{R^3}$$

⇕

$$\dot{R} = \left(\frac{8}{3} \pi B\right)^{1/2} \frac{1}{R^{1/2}}$$

⇕

$$\frac{2}{3} R^{3/2} = \left(\frac{8}{3} \pi B\right)^{1/2} t + \text{const.}$$

$$R^{3/2} = (6\pi B)^{1/2} t$$

$$\therefore R = (6\pi B)^{1/3} t^{2/3} \propto t^{2/3}$$

$\rho > 0$ は R が各値をとるときの膨張速度 \dot{R} を増大させ、 $R=0$ の時刻を現在に近づけるだけである。それ以前へは解を延長できない。

一様性・等方性を仮定せずとも、 $R=0$ となる特異点の存在は導かれる。

いずれにせよ、初期宇宙は量子重力理論による取り扱ひを要する。

静的宇宙で成り立つ関係

$$\rho_\Lambda = \frac{1}{2} \rho. \quad (\text{導出は「12.6節の練習問題20」(p.490, 2.3)})$$

を、観測されたエネルギー密度はほぼ満たすが、完全にはない。

ロバートソン-ウォーカー宇宙の力学：ビッグバンと暗黒エネルギー (p.464~) 補足

練習問題14

(a)

$$\text{式(12.13): } ds^2 = -dt^2 + R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right] \Leftrightarrow (g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & R^2(t)/(1-kr^2) & & 0 \\ & 0 & R^2(t)r^2 & \\ & & & R^2(t)r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\gamma} (g_{\gamma\alpha,\beta} + g_{\gamma\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\gamma})$$

$$= \frac{1}{2} g^{\mu\gamma} (g_{\mu\alpha,\beta} + g_{\mu\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\mu}) \quad (g^{\mu\gamma} = 0 (\mu \neq \gamma) \text{ ため、}\mu \text{ で和をとらない})$$

Christoffel記号のゼロでない全成分を調べる。

(i) $\mu=0$ のとき

α, β のいずれかが 0, $\alpha=0$ とすると

$$(\dots) = g_{00,\beta} + g_{0\beta,0} - g_{\beta 0,0} = (-1)_{,\beta} = 0$$

よってゼロでないのは

$$\begin{aligned}
 \Gamma^0_{jk} &= \frac{1}{2} g^{00} (g_{0j,k} + g_{0k,j} - g_{jk,0}) \\
 &= \frac{1}{2} g_{jk,0} \quad (\because g_{0j} = g_{0k} = 0, g^{00} = 1/g_{00} = -1) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 2R\dot{R} \times \textcircled{\otimes} \quad (g_{jk} = R^2(t) \times \textcircled{\otimes}, \textcircled{\otimes} \text{は空間座標のみの関数}) \\
 &= \frac{\dot{R}}{R} g_{jk}
 \end{aligned}$$

(ii) α, β のいずれかが 0 のとき $\alpha = 0$ とすればよく,

$$\begin{aligned}
 (\dots) &= g_{\mu\alpha,\beta} + g_{\mu\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\mu} \\
 &= \begin{cases} g_{00,\beta} + g_{0\beta,0} - g_{0\beta,0} = (-1)_{,\beta} = 0 & (\mu=0 \text{ のとき}) \\ g_{\mu 0,0} + g_{\mu 0,0} - g_{00,\mu} = 0 & (\beta=0 \text{ のとき, } \{g_{\mu 0}\} \text{ は 1:1 対応}) \end{cases}
 \end{aligned}$$

よってゼロでないのは Γ^j_{ok} のみで,

$$\begin{aligned}
 \Gamma^j_{ok} &= \frac{1}{2} g^{jj} (g_{j0,k} + g_{jk,0} - g_{ok,j}) \quad (j \text{ は和をとらない}) \\
 &= \frac{1}{2} g^{jj} (g_{jj} \delta^j_k)_{,0} \quad (g_{j0} = g_{ok} = 0, g_{jk} = g_{jj} \delta^j_k) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{g_{jj}} \delta^j_k (R^2(t) \textcircled{\otimes})_{,0} \quad (g_{jj} = R^2(t) \textcircled{\otimes}) \\
 &= \frac{\dot{R}}{R} \delta^j_k \frac{g_{jj}}{g_{jj}}
 \end{aligned}$$

(iii) $\mu = r, (\alpha, \beta) = (j, k)$ のとき $\alpha \neq \beta$ とする

$$\begin{aligned}
 (\dots) &= g_{r\alpha,\beta} + g_{r\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,r} \\
 &= g_{r\alpha,\beta} + g_{r\beta,\alpha} \quad (\because g_{\alpha\beta} = 0) \\
 &= \text{これは } \alpha, \beta \text{ のどちらか一方が } r \text{ でない, } g_{r\alpha} = g_{r\beta} = 0 \text{ により消える.}
 \end{aligned}$$

$\alpha = r, \beta = j \neq r$ とする

$$(\dots) = g_{rj,j} = 0$$

よってゼロでないのは Γ^r_{jj} (j は和をとらない) の形に限られ,

$$\begin{aligned}
 \Gamma^r_{rr} &= \frac{1}{2} g^{rr} g_{r,r} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1-kr^2}{R^2(t)} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{R^2(t)}{1-kr^2} \right) = \frac{kr}{1-kr^2},
 \end{aligned}$$

$$\Gamma^r_{\theta\theta} = \frac{1}{2} g^{rr} (-g_{\theta\theta})_{,r} \quad (\because g_{r\theta} = 0)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \frac{1-kr^2}{R^2(t)} \frac{\partial}{\partial r} (-R^2(t) r^2) \\
 &= -r(1-kr^2),
 \end{aligned}$$

$$\Gamma^r_{\phi\phi} = \frac{1}{2} g^{rr} (-g_{\phi\phi})_{,r} \quad (\because g_{r\phi} = 0)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \frac{1-kr^2}{R^2(t)} \frac{\partial}{\partial r} (-R^2(t) r^2 \sin^2\theta) \\
 &= -r(1-kr^2) \sin^2\theta
 \end{aligned}$$

(iv) $\mu = \theta, (\alpha, \beta) = (j, k)$ のとき

$$(\)_{\text{内}} = g_{j\theta, k} + g_{\theta\theta, j} - g_{jk, \theta}$$

② j, k の一方、例えば $j = r$ とする

$$\begin{aligned} (\)_{\text{内}} &= g_{r\theta, k} + g_{\theta\theta, r} - g_{rk, \theta} = g_{k\theta, r} - g_{rk, \theta} \\ &= \begin{cases} 0 & (k = \phi) \\ -g_{rr, \phi} = 0 & (k = r) \\ +g_{\theta\theta, r} = 2rR^2(t) & (k = \theta) \end{cases} \end{aligned}$$

∴ r のときゼロではない

$$\Gamma^{\theta}_{r\theta} = \frac{1}{2} \frac{1}{R^2(t) \dot{r}^2} \times 2rR^2(t) = \frac{1}{r}$$

③ j, k の一方、例えば $j = \theta$ とする

$$(\)_{\text{内}} = g_{\theta\theta, k} + g_{k\theta, \theta} - g_{\theta k, \theta} = g_{\theta\theta, k}$$

$k = r$ のときのみこれはゼロでない、②と同じ $\Gamma^{\theta}_{r\theta}$ を与える。

④ j, k の一方、例えば $j = \phi$ とする

$$(\)_{\text{内}} = g_{\phi\theta, k} + g_{k\theta, \phi} - g_{\phi k, \theta} = g_{k\theta, \phi} - g_{\phi k, \theta} \quad (\because g_{\phi\theta} = 0)$$

$$= \begin{cases} 0 & (k = r) \\ g_{\theta\theta, \phi} = 0 & (k = \theta) \\ -g_{\phi\phi, \theta} = -2R^2 \dot{r}^2 \mu \theta \cos \theta & (k = \phi) \end{cases}$$

∴ r のときゼロではない $\Gamma^{\theta}_{\phi\phi} = \frac{1}{2} \frac{1}{R^2 \dot{r}^2} (-2R^2 \dot{r}^2 \mu \theta \cos \theta) = -\mu \theta \cos \theta$

(v) $\mu = \phi, (\alpha, \beta) = (i, j)$ のとき

$$\begin{aligned} (\)_{\text{内}} &= g_{i\phi, j} + g_{j\phi, i} - g_{ij, \phi} \\ &= g_{i\phi, j} + g_{j\phi, i} \quad (\text{全 } g_{\text{内}} \text{ は } \phi \text{ による}) \end{aligned}$$

$i = \phi$ のとき i, j の一方、例えば $i = \phi$ とする。これは当然。

$$\begin{aligned} (\)_{\text{内}} &= g_{\phi\phi, j} \quad (\because g_{j\phi, i} = g_{i\phi, j} = 0) \\ &= \begin{cases} 2rR^2 \dot{\omega}^2 \theta & (j = r \text{ のとき}) \\ 2r^3 R^2 \dot{\omega} \theta \cos \theta & (j = \theta \text{ のとき}) \\ 0 & (j = \phi \text{ のとき}) \end{cases} \end{aligned}$$

∴ r のときゼロではない

$$\Gamma^{\phi}_{\phi r} = \frac{1}{2} \frac{1}{R^2 \dot{\omega}^2 \cos^2 \theta} \times 2rR^2 \dot{\omega}^2 \theta = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma^{\phi}_{\phi\theta} = \frac{1}{2} \frac{1}{R^2 \dot{r}^2 \dot{\omega} \theta} \times 2r^3 R^2 \dot{\omega} \theta \cos \theta = \omega \cos \theta$$

以下の議論には導出した教科書の $\Gamma^{\theta}_{\phi\phi} = \mu \theta \cos \theta$ $\Gamma^{\theta}_{\phi r} = 0$ と違っている
例は 3-2-3 B (11-116)
アインシュタインの一般相対性理論 第9巻
p.503 に与えられているクリスタル球座標での
この計算結果は一致している。

(b) 共変微分の公式

$$T^{\alpha\beta}_{; \gamma} = T^{\alpha\beta}_{, \gamma} + T^{\mu\beta} \Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma} + T^{\alpha\mu} \Gamma^{\beta}_{\mu\gamma} \text{ を用い}$$

$$T^{\alpha\alpha}_{; \alpha} = T^{\alpha\alpha}_{, \alpha} + T^{\mu\alpha} \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha} + T^{\alpha\mu} \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}$$

共動座標系を用いたから $(T^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}$ と対角的になら (\leftrightarrow p.464 第2段落)

$$T^{\alpha\alpha}_{; \alpha} = T^{\alpha\alpha}_{, \alpha} + \sum_{\mu} T^{\mu\alpha} \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha} + T^{\alpha\alpha} \Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}$$

$$= \dot{\rho} + \sum_{\mu} T^{\mu\alpha} \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha} + \rho \Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}$$

よって $\sum_{\mu} T^{\mu\alpha} \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha} = 0 + \rho \sum_j \frac{\dot{R}}{R} g_{jj} = 3\rho \frac{\dot{R}}{R}$, $\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha} = 0 + \sum_j \frac{\dot{R}}{R} \delta^j_j = 3 \frac{\dot{R}}{R}$ なるので、

$$T^{\alpha\alpha}_{; \alpha} = \dot{\rho} + 3(\rho + \rho) \frac{\dot{R}}{R} \quad (12.72)$$

(c) 保存則 $0 = T^{\alpha\alpha}_{; \alpha} = \dot{\rho} + 3(\rho + \rho) \frac{\dot{R}}{R}$ を R^3 倍すると

$$\dot{\rho} R^3 + 3(\rho + \rho) R^2 \dot{R} = 0 \quad \dots (*)$$

他方、式(12.46): $\frac{d}{dt}(\rho R^3) = -\rho \frac{d}{dt} R^3$ は

$$\dot{\rho} R^3 + 3\rho R^2 \dot{R} + \rho \times 3R^2 \dot{R} = 0$$

と変形すると上式(*)に一致するから、示された。

■ 式(12.49): $\frac{d}{dt}(\rho R^4) = 0$ の確認

$$0 = \frac{d}{dt}(\rho R^4) = \dot{\rho} R^4 + 4\rho R^3 \dot{R} = R(\dot{\rho} R^3 + 4\rho R^2 \dot{R})$$

他方、 $\frac{d}{dt}(\rho R^3) = -\rho \frac{d}{dt} R^3$, $\rho = \frac{\rho}{3}$

$$\Leftrightarrow 0 = \dot{\rho} R^3 + 3\rho R^2 \dot{R} + \frac{\rho}{3} \cdot 3R^2 \dot{R} = \dot{\rho} R^3 + 4\rho R^2 \dot{R}$$

よって、2式は等しい。

練習問題16

$G_{00} = R_{00} - \frac{1}{2} g_{00} R$ 1: おいて $R_{00} = R^{\alpha}_{00\alpha}$, $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \sum_{\alpha=0}^3 g^{\alpha\alpha} R_{\alpha\alpha}$ ため
 $R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\nu\alpha} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\mu,\nu\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu}\Gamma^{\sigma}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\alpha}_{\alpha\nu}\Gamma^{\sigma}_{\mu\sigma}$ のとき $\mu=\nu$ の成分を調べるには十分である。

$R_{00} = \Gamma^{\alpha}_{00,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{0\alpha,0} + \Gamma^{\alpha}_{\alpha 0}\Gamma^{\sigma}_{0\sigma} - \Gamma^{\alpha}_{\alpha 0}\Gamma^{\sigma}_{0\sigma}$ 1: おいて $\Gamma^{\alpha}_{00}, \Gamma^{\sigma}_{00} = 0$,
 $\Gamma^{\alpha}_{0\alpha,0} = \Gamma^j_{0j,0} = \left(\frac{R}{R} \delta^j_j\right)_{,0} = 3 \frac{R\dot{R} - R^2}{R^2}$
 $\Gamma^{\alpha}_{\alpha 0}\Gamma^{\sigma}_{0\sigma} = \Gamma^j_{j0}\Gamma^k_{0j} = \left(\frac{R}{R}\right)^2 \delta^j_k \delta^k_j = 3 \left(\frac{R}{R}\right)^2$ ため $R_{00} = -3 \frac{\dot{R}}{R}$

$R_{rr} = \Gamma^{\alpha}_{rr,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{r\alpha,r} + \Gamma^{\alpha}_{\alpha r}\Gamma^{\sigma}_{rr\sigma} - \Gamma^{\alpha}_{\alpha r}\Gamma^{\sigma}_{r\sigma}$ 1: おいて
 $\Gamma^{\alpha}_{rr,\alpha} = \Gamma^0_{rr,0} + \Gamma^r_{rr,r}$

$= \left(\frac{\dot{R}}{R} \times \frac{R^1}{1-kr^2}\right)_{,0} + \Gamma^r_{rr,r} = \frac{\dot{R}^2 + R\ddot{R}}{1-kr^2} + \Gamma^r_{rr,r}$

$\Gamma^{\alpha}_{r\alpha,r} = \Gamma^r_{rr,r} + \Gamma^0_{r0,r} + \Gamma^{\phi}_{r\phi,r} = \Gamma^r_{rr,r} - 2 \frac{1}{r^2}$

$\Gamma^{\alpha}_{\alpha r}\Gamma^{\sigma}_{rr\sigma} = \Gamma^{\alpha}_{\alpha 0}\Gamma^0_{rr0} + \Gamma^{\alpha}_{\alpha r}\Gamma^r_{rr\sigma} = \Gamma^{\alpha}_{\alpha 0}\Gamma^0_{rr0} + \Gamma^r_{\alpha r}\Gamma^r_{rr}$
 $= 3 \frac{\dot{R}}{R} \times \left(\frac{\dot{R}}{R} \times \frac{R^2}{1-kr^2}\right) + \left(\frac{kr}{1-kr^2} + \frac{2}{r}\right) \frac{kr}{1-kr^2}$

また、 $\{\Gamma^{\alpha}_{\alpha r}\}$ の成分を調べるには $(\alpha, \sigma) = (0, r), (r, 0), (r, r), (0, 0), (\phi, \phi)$ ため

$\Gamma^{\alpha}_{\alpha r}\Gamma^{\sigma}_{rr\sigma} = 2\Gamma^0_{rr0}\Gamma^r_{r0} + (\Gamma^r_{rr})^2 + (\Gamma^0_{r0})^2 + (\Gamma^{\phi}_{r\phi})^2$
 $= 2\left(\frac{\dot{R}}{R} \times \frac{R^1}{1-kr^2}\right) \times \frac{\dot{R}}{R} + \left(\frac{kr}{1-kr^2}\right)^2 + \frac{2}{r^2}$

$\therefore R_{rr} = \frac{\dot{R}^2 + R\ddot{R}}{1-kr^2} + \Gamma^r_{rr,r} - \Gamma^r_{rr,r} + \frac{2}{r^2} + 3 \frac{\dot{R}^2}{1-kr^2} + \left(\frac{kr}{1-kr^2} + \frac{2}{r}\right) \frac{kr}{1-kr^2} - 2 \frac{\dot{R}^2}{1-kr^2} - \left(\frac{kr}{1-kr^2}\right)^2 - \frac{2}{r^2}$
 $= 2 \frac{\dot{R}^2}{1-kr^2} + \frac{R\ddot{R}}{1-kr^2} + \frac{2k}{1-kr^2}$

$R_{\theta\theta} = \Gamma^{\alpha}_{\theta\theta,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\theta\alpha,\theta} + \Gamma^{\alpha}_{\alpha\theta}\Gamma^{\sigma}_{\theta\theta\sigma} - \Gamma^{\alpha}_{\alpha\theta}\Gamma^{\sigma}_{\theta\sigma}$ 1: おいて

$\Gamma^{\alpha}_{\theta\theta,\alpha} = \Gamma^0_{\theta\theta,0} + \Gamma^r_{\theta\theta,r} = \left(\frac{\dot{R}}{R} \times R^2\right)_{,0} + \left\{-r(1-kr^2)\right\}_{,r} = (\dot{R}^2 + R\ddot{R})r^2 - (1-3kr^2)$

$\Gamma^{\alpha}_{\theta\alpha,\theta} = \Gamma^{\phi}_{\theta\phi,\theta} = \left(\frac{\cot\theta}{r\theta}\right)_{,\theta} = -\frac{1}{r\theta^2}$

$\Gamma^{\alpha}_{\alpha\theta}\Gamma^{\sigma}_{\theta\theta\sigma} = \Gamma^{\alpha}_{\alpha 0}\Gamma^0_{\theta\theta 0} + \Gamma^{\alpha}_{\alpha r}\Gamma^r_{\theta\theta r} = \Gamma^{\alpha}_{\alpha 0}\Gamma^0_{\theta\theta 0} + (\Gamma^r_{rr} + \Gamma^0_{r0} + \Gamma^{\phi}_{r\phi})\Gamma^r_{\theta\theta}$
 $= 3 \frac{\dot{R}}{R} \times \left(\frac{\dot{R}}{R} \times R^2\right) + \left(\frac{kr}{1-kr^2} + \frac{2}{r}\right) \left\{-r(1-kr^2)\right\} = 3\dot{R}^2 r^2 - kr^2 - 2(1-kr^2)$

$\{\Gamma^{\alpha}_{\alpha\theta}\}$ の成分を調べるには $(\alpha, \sigma) = (0, \theta), (\theta, 0), (r, \theta), (\theta, r), (\phi, \phi)$ ため

$\Gamma^{\alpha}_{\alpha\theta}\Gamma^{\sigma}_{\theta\theta\sigma} = 2\Gamma^0_{\theta\theta 0}\Gamma^0_{\theta 0} + 2\Gamma^r_{\theta\theta r}\Gamma^0_{\theta r} + (\Gamma^{\phi}_{\theta\phi})^2$
 $= 2\left(\frac{\dot{R}}{R} \times R^2\right) \times \frac{\dot{R}}{R} + 2\left\{-r(1-kr^2)\right\} \frac{1}{r} + \cot^2\theta = 2\dot{R}^2 r^2 - 2(1-kr^2) + \cot^2\theta$

$$\therefore R_{\theta\theta} = (\dot{R}^2 + R\ddot{R})r^2 \cancel{- (1+3kr^2)} + \cancel{\frac{1}{R^2}} + 3\dot{R}^2 + k r^2 \cancel{- 2} - 2R^2 \dot{r}^2 \cancel{- 2} - 2kr^2 \cancel{- \omega^2 \theta^2}$$

$$= 2R^2 \dot{r}^2 + R\ddot{R}r^2 + 2kr^2$$

$$R_{\phi\phi} = \Gamma^{\alpha}_{\phi\phi, \alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\phi\alpha, \phi} + \Gamma^{\sigma}_{\alpha\alpha} \Gamma^{\sigma}_{\phi\phi} - \Gamma^{\sigma}_{\phi\phi} \Gamma^{\sigma}_{\alpha\alpha} \quad (=: \text{計17})$$

$$\Gamma^{\alpha}_{\phi\phi, \alpha} = \Gamma^0_{\phi\phi, 0} + \Gamma^r_{\phi\phi, r} + \Gamma^{\theta}_{\phi\phi, \theta}$$

$$= \left(\frac{\dot{R}}{R} \times R^2 \dot{r}^2 \dot{\omega}^2 \theta \right)_{,0} + \left\{ -r(1+kr^2) \dot{\omega}^2 \theta \right\}_{,r} + \left(-\dot{\omega} \omega r^2 \right)_{,\theta}$$

$$= (\dot{R}^2 + R\ddot{R})r^2 \dot{\omega}^2 \theta - (1-3kr^2) \dot{\omega}^2 \theta - (\omega r^2 \dot{\theta} - \dot{\omega} \omega r^2 \theta)$$

$$\Gamma^{\alpha}_{\phi\alpha, \phi} = 0 \quad (\text{固定した各}\alpha\text{に於て}\Gamma^{\alpha}_{\phi\alpha} = 0)$$

$$\Gamma^{\sigma}_{\alpha\alpha} \Gamma^{\sigma}_{\phi\phi} = \Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha} \Gamma^{\alpha}_{\phi\phi} + \Gamma^r_{r\alpha} \Gamma^{\alpha}_{\phi\phi} + \Gamma^{\theta}_{\theta\alpha} \Gamma^{\alpha}_{\phi\phi} \quad (:\Gamma^{\alpha}_{\phi\phi} = 0)$$

$$= \Gamma^0_{\alpha\alpha} \Gamma^0_{\phi\phi} + (\Gamma^r_{r0} + \Gamma^{\theta}_{\theta 0} + \Gamma^{\phi}_{\phi 0}) \Gamma^r_{\phi\phi} + \Gamma^{\theta}_{\theta\phi} \Gamma^{\theta}_{\phi\phi}$$

$$= 3 \frac{\dot{R}}{R} \times \left(\frac{\dot{R}}{R} \times R^2 \dot{r}^2 \dot{\omega}^2 \theta \right) + \left(\frac{kr}{1-kr^2} + \frac{2}{r} \right) \left\{ -r(1+kr^2) \dot{\omega}^2 \theta \right\} + \omega \dot{\theta} \theta \left(\cancel{-\dot{\omega} \omega r^2 \theta} \right) - \omega r^2 \dot{\theta}$$

また、 $\{\Gamma^{\alpha}_{\phi\phi}\}$ の計17個の成分は $(\alpha, \sigma) = (0, \phi), (\phi, 0), (r, \phi), (\phi, r), (\theta, \phi), (\phi, \theta)$ となる。

$$\Gamma^{\alpha}_{\phi\phi} \Gamma^{\sigma}_{\phi\alpha} = 2\Gamma^0_{\phi\phi} \Gamma^0_{\phi\alpha} + 2\Gamma^r_{\phi\phi} \Gamma^r_{\phi\alpha} + 2\Gamma^{\theta}_{\phi\phi} \Gamma^{\theta}_{\phi\alpha}$$

$$= 2 \left(\frac{\dot{R}}{R} \times R^2 \dot{r}^2 \dot{\omega}^2 \theta \right) \times \frac{\dot{R}}{R} + 2 \left\{ -r(1+kr^2) \dot{\omega}^2 \theta \right\} \frac{1}{r} + 2 \left(\cancel{-\dot{\omega} \omega r^2 \theta} \right) \omega \dot{\theta} - 2\omega r^2 \dot{\theta}$$

$$\therefore R_{\phi\phi} = (\dot{R}^2 + R\ddot{R})r^2 \dot{\omega}^2 \theta - \cancel{(1-3kr^2)} \dot{\omega}^2 \theta - \cancel{\omega r^2 \dot{\theta}} + \cancel{\dot{\omega} \omega r^2 \theta}$$

$$+ 3R^2 \dot{r}^2 \dot{\omega}^2 \theta - kr^2 \dot{\omega}^2 \theta - 2 \left(\cancel{1-kr^2} \right) \dot{\omega}^2 \theta - \cancel{\omega r^2 \dot{\theta}}$$

$$- 2R^2 \dot{r}^2 \dot{\omega}^2 \theta + 2 \left(\cancel{1-kr^2} \right) \dot{\omega}^2 \theta + 2\omega r^2 \dot{\theta}$$

$$= 2R^2 \dot{r}^2 \dot{\omega}^2 \theta + R\ddot{R}r^2 \dot{\omega}^2 \theta + 2kr^2 \dot{\omega}^2 \theta$$

1x1E)

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \sum_{\alpha=0}^3 g^{\alpha\alpha} R_{\alpha\alpha}$$

$$= (1)(3) \frac{\dot{R}}{R} + \frac{1-kr^2}{R^2} \frac{2R^2 + R\ddot{R} + 2k}{1-kr^2} + \frac{1}{R^2 r^2} (2R^2 \dot{r}^2 + R\ddot{R}r^2 + 2kr^2)$$

$$+ \frac{1}{R^2 r^2 \dot{\omega}^2 \theta} (2R^2 \dot{r}^2 \dot{\omega}^2 \theta + R\ddot{R}r^2 \dot{\omega}^2 \theta + 2kr^2 \dot{\omega}^2 \theta)$$

$$= 6 \left\{ \frac{\dot{R}}{R} + \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 + \frac{k}{R^2} \right\}$$

$$G_{00} = R_{00} - \frac{1}{2} g_{00} R = -\frac{\dot{R}}{R} + \frac{1}{2} \times 6 \left\{ \frac{\dot{R}}{R} + \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 + \frac{k}{R^2} \right\}$$

$$= 3 \left\{ \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 + \frac{k}{R^2} \right\}$$

■ 暗黒圧力の式(12.53)について

$$-\frac{\Delta}{8\pi} \begin{pmatrix} -1 & g_{xx} & 0 \\ 0 & g_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & g_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_\Lambda & & 0 \\ & p_\Lambda & \\ 0 & & p_\Lambda \end{pmatrix} \quad \text{において, 曲がった時空では一般に}$$

式(12.53): $p_\Lambda = -p_\Lambda \Leftrightarrow \text{各 } g^{ii} = 1 \text{ は期待できる.}$

■ Rの時間発展方程式(12.54)への書き換えの補足

$$\underbrace{G_{tt}}_{\frac{3(\dot{R})^2}{R^2} + 3\frac{k}{R^2}} + \underbrace{\Lambda}_{-1} \underbrace{g_{tt}}_{-1} = 8\pi \underbrace{T_{tt}}_{p_m}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dot{R}^2}{2} = -\frac{k}{2} + \frac{R^2}{3 \cdot 2} (8\pi p_m + \Lambda) = -\frac{k}{2} + \frac{4\pi}{3} R^2 \left(p_m + \frac{\Lambda}{8\pi} \right) \quad (12.54)$$

練習問題17 (12.55): $\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi}{3}(p+3p)$ の導出

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{R}^2}{2} \right) = R \ddot{R} \quad \text{より}$$

$$\frac{\ddot{R}}{R} = \frac{1}{R \dot{R}} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{R}^2}{2} \right) \stackrel{(12.54)}{=} \frac{1}{R \dot{R}} \frac{d}{dt} \left\{ -\frac{k}{2} + \frac{4\pi}{3} R^2 (p_m + p_\Lambda) \right\}$$

$$= \frac{1}{R \dot{R}} \frac{4\pi}{3} \frac{d}{dt} (R^2 \cdot \frac{1}{R})$$

$$\stackrel{(12.46)}{=} \frac{1}{R \dot{R}} \frac{4\pi}{3} \left\{ \frac{1}{R} (-p) \frac{d}{dt} (R^2) + R^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{R} \right) \right\}$$

$$= -\frac{4\pi}{3} (p+3p)$$

問題文に「 $p_\Lambda = -p_\Lambda$ の関係を使え」とヒントがある。これを用いて導かなくては。

臨界密度と宇宙のパラメータ p.470~

$$(12.54): \frac{\dot{R}^2}{2} = -\frac{k}{2} + \frac{4\pi R^2}{3} (p_m + p_\Lambda) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3k}{8\pi R^2} = \frac{3H^2}{8\pi} - (p_m + p_\Lambda) \quad \text{において}$$

$$\underbrace{p_m + p_\Lambda}_{\text{物理的エネルギー密度}} \leq \underbrace{\frac{3}{8\pi} H_0^2}_{\text{H}_0 \text{のエネルギー密度}} = \underbrace{\rho_c}_{\text{臨界エネルギー密度}} \quad \Leftrightarrow \quad \text{曲率 } k \leq 0$$

さらに $\Omega_k = \frac{-3k/8\pi R^2}{\rho_c}, \quad \Omega_m = \frac{p_m}{\rho_c}, \quad \Omega_\Lambda = \frac{p_\Lambda}{\rho_c}$ を用いて $1 = \Omega_k + \Omega_m + \Omega_\Lambda$ (書換)

観測によりは $\Omega_\Lambda = 0.7, \quad \Omega_m = 0.3 \quad \rightarrow \quad \text{バグの } \Omega_b = 0.04, \quad \Omega_k = 0$
 $\rightarrow \quad \text{暗黒物質 } \Omega_d = 0.26$

暗黒エネルギーの精密な測定が計画されている。

12.4 われわれが観測する宇宙の進化

- 宇宙の進化のシナリオを概観
- 宇宙の歴史は温度とともに変化する過程 (熱史)
 - 進化の各段階を示すのに、温度、またはエネルギー $E = kT$ を用いる
- 現在の加速器によって物理法則を確かめられるエネルギーは 1TeV 程度
 - われわれの物理的描像は、膨張プラズマがこのエネルギーをもっていた時期から信頼できる

■脱結合：宇宙マイクロ波背景放射 過去に遡るとスケール因子 R が減少

- 物質のエネルギー密度は増加
 - 通常物質 (暗黒物質とバリオン物質) のエネルギー密度 $\sim R^{-3}$
 - 宇宙マイクロ波背景放射の光子のエネルギー密度 $\sim R^{-4}$
- 暗黒エネルギー密度は一定

よって

- 初期宇宙では暗黒エネルギーを無視できる。
- ある時点で、放射優勢から物質優勢へと変化した (その時の温度は約 10^5K).
 - 水素の電離エネルギー、または脱結合のエネルギーに近い。
 - * 脱結合…… 温度が冷えて電離していた水素が中性化し、光がプラズマに散乱されなくなる。
宇宙マイクロ波背景放射が作られた時期を定義。

宇宙マイクロ波背景放射

- 温度 $T = 2.725\text{K}$ の黒体放射
- 温度揺らぎ
 - 銀河団や銀河形成の種
 - 物質の主要な成分である暗黒物質は放射と直接相互作用しないので、宇宙マイクロ波背景放射の温度揺らぎとして見えない
 - シミュレーションによれば、暗黒物質粒子のランダムな速度が小さい場合にのみ銀河を形成 (冷たい暗黒物質モデル)
 - 揺らぎの角度スペクトルは宇宙論パラメーターについての情報を含んでいる

■暗黒物質と銀河形成：脱結合後の宇宙

- 脱結合以前
バリオン物質は光子と平衡にあるので、暗黒物質の揺らぎ (不均一性) についていけない
- 脱結合後
中性原子となったバリオン物質は、暗黒物質が作った重力ポテンシャルの中に落ち込み始める。
 - バリオン物質
電荷を持つ

- 電荷の衝動により励起した電子は余分なエネルギーを放出して再び基底状態に落ちる
- バリオン物質はさらにポテンシャルを落下し、塊を作る
(このときバリオン物質は高温になるにも関わらず、このプロセスは冷却化と呼ばれる)
- 合体を繰り返す、最終的に銀河になる
- 暗黒物質
電荷を持たない
- バリオンの場合のような「振幅の大きな揺らぎ」(密度の非一様性)を作らず、
銀河のまわりに広がった“ハロー”を作る。

- 合体
 - われわれの銀河系に組み込まれつつある、太陽質量の数百万倍もの質量
 - 球状星団オメガケンタウリ…… 銀河系に飲み込まれた小さな銀河の中心部分か
 - マゼラン星…… 銀河系への合体途上
- 天文衛星 GAIA(2012 年打ち上げ予定)
銀河系の速度場の地図を作成 → 太古の合体が作った流れを探す
- 合体構造の成長
 - 第一世代の星(種族 III の星)… 高密度のガス、重元素を作らない
 - 大質量の星… 重元素を作って周りの空間に吹き飛ばし、ブラックホールを残す
→ 紫外線を放射し、水素を再電離
- 以上の階層的構造形成シナリオによれば、
ほとんどすべての銀河の中心に巨大ブラックホールが観測されるはず
- 暗黒物質を間接的に観測する方法
 - 渦巻き銀河の回転曲線
 - 重力レンズ

■初期宇宙

- ビッグバンから 200 秒後、温度は約 50keV で陽子と中性子の間の核反応は平衡にある。
宇宙がこの温度から冷えると、ヘリウムなどの重たい元素ができる。
光子と 3 種類のニュートリノ以外は、軽いあるいは質量をもたない粒子は大量には存在しない。
- ビッグバンの 1 秒後の温度約 500keV はほぼ電子の質量であり、電子と陽電子は対生成できる。
2,3 秒後にはほとんどすべての陽電子は消えてしまい、
 10^9 個の光子に対して電子がほぼ 1 個の割合で残る。
- 物質と反物質の非対称性
 - 電子の方が陽電子より多い
 - 陽子の方が反陽子より多い
- ビッグバンから 10^{-5} 秒後では陽子も中性子も存在せず、クォークとグルーオンのプラズマ
- 10TeV という高温度(ビッグバンの 10^{-4} 秒後の温度)において、
ヒッグス粒子を探し超対称性を見つけるための実験を始めている
- 銀河形成を引き起こす暗黒物質の密度ゆらぎの説明が
インフレーションシナリオによって与えられる

- 大きなスケールで宇宙が一様性と等方性をもつことも何らかの説明が必要である
初期宇宙は大きな正の宇宙定数に支配されているとすると、
指数関数的膨張 (インフレーション) が起きる。
微小な領域は短時間でも情報が全体に伝わるから一様になり、
これがインフレーションにより膨張して一様な宇宙の初期条件ができる
- 粒子地平線 (p.481, 1.7) については p.448 参照.
- 式 (12.64): $H^2 = \frac{8}{3}\pi\rho_\Lambda$ は式 (12.58) 右辺において ρ_Λ を残し、
式 (12.22): $H = \frac{\dot{R}}{R}$ を用いて得られる.
- インフレーションでは量子スケールの微小な密度揺らぎをより大きな古典的揺らぎにし、
宇宙マイクロ波背景放射の温度揺らぎが説明される *11

■一般相対論を超えて 重力理論の量子的な記述への置き換え

- ループ量子重力理論
 - 時空そのものを直接量子化
 - 時空の小さなスケールの構造としてループが現れる
 - ビッグバン特異点を解消
- 弦理論
 - われわれの 4 次元時空は高次元環境における 4 次元的な面 (ブレーン)
 - Newton 重力の逆二乗則を修正
 - ブレーン同士の衝突 → ビッグバン

*11 現在のインフレーション理論では、インフレーションと真空の相転移は関係がないとされる (p.482 脚注).

参考文献

- [1] ファインマンほか, 2014, ファインマン物理学 I(坪井忠二訳), 株式会社岩波書店, 東京.
- [2] 内山龍雄, 2014, 相対性理論 物理テキストシリーズ 8, 株式会社岩波書店, 東京.
- [3] エリ・デ・ランダウ, イェ・エム・リフシッツ, 2015, ランダウ=リフシッツ理論物理学教程 場の古典論 (原書第 6 版)(恒藤敏彦, 広重徹訳), 東京図書株式会社, 東京.
- [4] 小野寺嘉孝, 2014, 物理のための応用数学, 株式会社裳華房, 東京.