

自由意志定理は自由意志の有無に言及しない.

2019年4月20日

## まえがき

Conway と Kochen は自由意志定理と名付けた定理の中で次のように主張した [1, p.84].

もし我々が測定の方法に関して自由意志に基づく選択が可能であって、かつ局所性が満たされているとすれば、我々と同じ意味での自由意志が測定の対象である物理系にも存在する

ところが量子力学は局所性が必ずしも成り立たないことを示唆している。それ以前にそもそもここで言う自由意志とは、正確には決定論からの逸脱または非決定性のことである [1, p.39,p.84]. 非決定性を導入し事物がランダムに確率的に生起する非決定論的な世界を考えても、人は世界のなすがままに振り回されるのだとすれば本当の意味での自由意志は保証されない:

$$\begin{array}{lll} \text{決定論} & \Rightarrow & \text{自由意志なし} \quad (p \Rightarrow q) \\ \text{非決定論} & \Leftrightarrow & \text{自由意志あり} \quad (\bar{p} \Leftrightarrow \bar{q}). \end{array}$$

このように自由意志定理は自由意志の有無に言及するものではないことが分かる。

本稿では文献 [1](筒井泉『量子力学の反常識と素粒子の自由意志』)における自由意志定理に纏わる議論を要約・補足・解釈する。量子力学におけるスピン角運動量の理論について、付録として第4節に必要最小限の事項を要約してある。

## 目次

1	量子力学と完全性・局所性 (EPR パラドックス)	3
1.1	要旨	3
1.2	スピン 1 重項状態での相関	3
1.3	スピンの異なる成分間の不確定性関係	4
1.4	EPR 論文における実在性と物理理論の完全性の定義	4
2	Bell の不等式	5
2.1	要旨	5
2.2	局所原理と Bell の不等式	5
2.3	量子力学と Bell の不等式	6
3	Mermin の魔法陣	7
3.1	要旨	7
3.2	Mermin の魔法陣 (補足)	9
4	付録:スピン角運動量の理論	10
4.1	角運動量の交換関係	10
4.2	スピン 1/2 の系	11
4.3	角運動量の固有値と固有状態	12
4.4	スピン 1 重項	12
4.5	Pauli の 2 成分形式と回転	13

# 1 量子力学と完全性・局所性 (EPR パラドックス)

## 1.1 要旨

Einstein らは、量子力学による自然の記述は不完全であるとするいわゆる EPR パラドックスを発表した [1, pp.21–22, pp.29–30]. ここでは 2 粒子の全スピン角運動量がゼロに保存されるようなスピン 1/2 の系を例にとり、EPR パラドックスについてまとめよう. 粒子 1 のスピンの第  $i$  成分  $S^1_i$  を測定すると、粒子 2 のスピンの状態を全く乱すことのない間接的な方法で\*1、粒子 2 のスピンの第  $i$  成分  $S^2_i$  の値を確実に予言できる (第 1.2 節参照) [1, pp.36–39] [2, pp.306–309]:

$$\begin{aligned} S^1_i > 0 \text{ を測定} &\rightarrow S^2_i < 0, \\ S^1_i < 0 \text{ を測定} &\rightarrow S^2_i > 0. \end{aligned}$$

■完全性 このとき粒子 2 のスピンの第  $i$  成分  $S^2_i$  の値は物理的実在と呼んで良いだろう\*2. ところが量子力学によれば、粒子 2 のスピンの  $z$  成分と  $x$  成分を同時に確定することはできない (第 1.3 節参照). このように物理的実在であるスピンの  $z$  成分と  $x$  成分の値を理論の中に持たない量子力学は不完全なものと言わざるを得ないのではないか\*3 [1, pp.36–37].

■局所性 なるほど粒子 2 のスピンの  $z$  成分と  $x$  成分が同時に物理的実在となるわけではないとすれば、量子力学は不完全であるという結論を避けられるかもしれない. しかしこのとき、粒子 1 のスピンのどの成分が測定されたかに応じて粒子 2 のスピンのどの成分が物理的実在となるかが選び出されることになる. これはたとえ粒子 1, 2 が十分離れていたとしても、粒子 1 のスピンの測定結果が遠方の粒子 2 に瞬時に伝わることを意味し、相互作用は近接的なものであるという局所性に反する [1, pp.37–39].

## 1.2 スピン 1 重項状態での相関

2 粒子の全スピン角運動量がゼロに保存されるようなスピン 1/2 の系は、

- 粒子 1 のスピンの  $z$  成分  $S^1_z$  が正で粒子 2 のスピンの  $z$  成分  $S^2_z$  が負の状態  $|z+; z-\rangle$ ,
- 粒子 1 のスピンの  $z$  成分  $S^1_z$  が負で粒子 2 のスピンの  $z$  成分  $S^2_z$  が正の状態  $|z-; z+\rangle$

を重ね合せた状態 (13):

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|z+; z-\rangle - |z-; z+\rangle) \quad (1)$$

にある. ここで粒子 1 のスピンの  $z$  成分を測定すると、スピンの上向き状態  $|z+\rangle$  とスピンの下向き状態  $|z-\rangle$  が等確率で得られる.

- $S^1_z > 0$  を測定した場合 (粒子 1 のスピンの上向き状態  $|z+\rangle$  にあると判明した場合).
  - この測定により重ね合せ状態 (1) は第 1 項の状態  $|z+; z-\rangle$  に跳び移ったことになる.

\*1 一見すると粒子 1 だけの測定に思われるこのような行為も、粒子 1, 2 から成る系全体を測定していると考えるのが量子力学の正統的な解釈となっている [2, p.310].

\*2 実際、EPR 論文では物理的実在をそのように定義している、第 1.4 節参照.

\*3 実際、EPR 論文では物理理論の完全性をそのように定義している、第 1.4 節参照.

このため次いで粒子 2 のスピンの  $z$  成分を測定すると、確実に  $S_z^2 < 0$  が得られる。

- $S_z^1 < 0$  を測定した場合 (粒子 1 のスピンの状態  $|z-\rangle$  にあると判明した場合).
    - この測定により重ね合せ状態 (1) は第 2 項の状態  $|z-; z+\rangle$  に跳び移ったことになる.
- このため次いで粒子 2 のスピンの  $z$  成分を測定すると、確実に  $S_z^2 > 0$  が得られる。

同様に、粒子 1,2 のスピンの  $x$  成分  $S_x^1, S_x^2$  に注目した場合も状態が

$$\text{式 (14) : } \frac{1}{\sqrt{2}}(|x-; x+\rangle - |x+; x-\rangle)$$

で表されることから

$$\begin{aligned} S_x^1 > 0 \text{ を測定} &\rightarrow S_x^2 < 0, \\ S_x^1 < 0 \text{ を測定} &\rightarrow S_x^2 > 0 \end{aligned}$$

となる [2, pp.306-309]

### 1.3 スピンの異なる成分間の不確定性関係

一般に観測量  $A, B$  の任意に与えられた状態  $|\rangle$  に関する分散  $\langle(\Delta A)^2\rangle, \langle(\Delta B)^2\rangle$  に対して不確定性関係

$$\langle(\Delta A)^2\rangle \langle(\Delta B)^2\rangle \geq \frac{1}{4} |\langle[A, B]\rangle|^2, \quad \langle[A, B]\rangle \equiv \langle|[A, B]|\rangle \quad (2)$$

が成り立つことが示される [2, pp.45-48].

スピン角運動量  $\mathbf{S}$  は角運動量の交換関係 (4):  $[S_i, S_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}S_k$  を満たすため、不確定性関係 (2) によりその異なる成分を同時に確定することはできない。

### 1.4 EPR 論文における実在性と物理理論の完全性の定義

EPR 論文では物理的実在を次のように定義している [1, pp.30-31].

**物理的実在** もし対象の状態をまったく乱さずに、ある物理量の値を確実に (100% の確率で) 予言できるとき、その物理量に対応する物理的実在の要素がある。

(If, without in any way disturbing a system, we can predict with certainty (i.e., with probability equal to unity) the value of a physical quantity, then there exists an element of physical reality corresponding to this physical quantity.)

また、EPR 論文では物理理論の完全性を次のように定義している。

**物理理論の完全性** すべての物理的実在の要素に対応するものが、物理理論の中にあること。

(every element of the physical reality must have a counterpart in the physical theory.)

## 2 Bell の不等式

### 2.1 要旨

粒子の遠隔相互作用を仮定せず局所性の保証されたモデルを用いると、2 粒子のスピンをある組合せに見出す確率に対する Bell の不等式へと導かれる (第 2.2 節参照)。一方、量子力学の予言は Bell の不等式と両立しないことが示される (第 2.3 節参照)。実験結果は Bell の不等式を破っており、非局所性を容認する量子力学を支持するものである [2, pp.310–316]。

ただし 2 粒子の相関を利用して、光速度を超えて送ることができるのはランダムな情報だけであり、意味のあるメッセージを送ることはできない [1, p.59,p.88] [2, pp.316–317]。

### 2.2 局所原理と Bell の不等式

粒子の遠隔相互作用を仮定せず局所性の保証されたモデルに E.P.Wigner のモデルがあり、これは以下のように Bell の不等式へと導く [2, pp.310–314]。このモデルでは 3 つの単位ベクトル  $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$  の方向に関するスピン  $S$  の成分を測定すると必ず決まった符号、例えば

$$S_a \equiv \mathbf{S} \cdot \hat{a} > 0, \quad S_b \equiv \mathbf{S} \cdot \hat{b} < 0, \quad S_c \equiv \mathbf{S} \cdot \hat{c} > 0$$

が得られるような粒子を考える。そしてこのような粒子を  $(a+, b-, c+)$  型に属すると呼ぶ。ただしモデルにおいてもスピンの各方向成分が値を同時に確定できる物理的実在であるとは考えられておらず、あくまで測定するのは  $S_a, S_b, S_c$  のうちの 1 成分のみである。また、各方向  $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$  が互いに直交している必要はない。

さて、粒子 1 のスピンの第  $i$  成分  $S^1_i$  の測定結果から、粒子 2 のスピンの第  $i$  成分  $S^2_i$  の符号が

$$\begin{aligned} S^1_i > 0 \text{ を測定} &\rightarrow S^2_i < 0, \\ S^1_i < 0 \text{ を測定} &\rightarrow S^2_i > 0 \end{aligned}$$

と決まることをこのモデルで再現するためには、粒子 1 と粒子 2 の種類が下表に挙げた組み合わせのいずれかになっていなければならない。各組み合わせの粒子対が全粒子対に占める割合を表の  $P_1, P_2, \dots$  とする。このとき

- 粒子 1 のスピンの  $\hat{a}$  方向成分を  $S^1_a > 0$  に見出し、  
かつ粒子 2 のスピンの  $\hat{b}$  方向成分を  $S^2_b > 0$  に見出す確率は  $P(a+; b+) = P_3 + P_4$
- 粒子 1 のスピンの  $\hat{a}$  方向成分を  $S^1_a > 0$  に見出し、  
かつ粒子 2 のスピンの  $\hat{c}$  方向成分を  $S^2_c > 0$  に見出す確率は  $P(a+; c+) = P_2 + P_4$
- 粒子 1 のスピンの  $\hat{c}$  方向成分を  $S^1_c > 0$  に見出し、  
かつ粒子 2 のスピンの  $\hat{b}$  方向成分を  $S^2_b > 0$  に見出す確率は  $P(c+; b+) = P_3 + P_7$

となるので、 $P_i \geq 0$  から導かれる自明な不等式

$$P_3 + P_4 \leq (P_2 + P_4) + (P_3 + P_7)$$

は Bell の不等式と呼ばれる次の関係

$$P(a+; b+) \leq P(a+; c+) + P(c+; b+) \quad (3)$$

を与える。

粒子 1	粒子 2	粒子対の割合
(a+, b+, c+)	(a-, b-, c-)	$P_1$
(a+, b+, c-)	(a-, b-, c+)	$P_2$
(a+, b-, c+)	(a-, b+, c-)	$P_3$
(a+, b-, c-)	(a-, b+, c+)	$P_4$
(a-, b+, c+)	(a+, b-, c-)	$P_5$
(a-, b+, c-)	(a+, b-, c+)	$P_6$
(a-, b-, c+)	(a+, b+, c-)	$P_7$
(a-, b-, c-)	(a+, b+, c+)	$P_8$

### 2.3 量子力学と Bell の不等式

量子力学を用いて Bell の不等式 (3) の各項を評価しよう [2, pp.314-316].  $\hat{a}$  と  $\hat{b}$ ,  $\hat{b}$  と  $\hat{c}$ ,  $\hat{c}$  と  $\hat{a}$  の成す角をそれぞれ  $\theta_{ab}, \theta_{bc}, \theta_{ca}$  とおく. まず  $P(a+, b+)$  について, 粒子 1 のスピンの  $\hat{a}$  方向成分  $S_a^1$  を測定したとき  $S_a^1 > 0$  を得る確率は  $1/2$  であり, このとき粒子 2 のスピンの  $-\hat{a}$  方向を向く状態  $|\alpha'\rangle$  が選び出される. さらに粒子 2 のスピンの  $\hat{b}$  方向成分  $S_b^2$  を測定して  $S_b^2 > 0$  を得る確率を求めよう. まず図 1 のように, 2 つのベクトル  $\hat{a}, \hat{b}$  が  $zx$  面内に含まれ  $\hat{b}$  が  $z$  軸正の向きを向くように座標軸を設定する. 粒子 2 のスピンの  $\hat{b}$  方向を向く状態  $|\alpha\rangle$  がある系を  $y$  軸周りに角度  $\phi \equiv \pi - \theta_{ab}$  だけ回転すると状態  $|\alpha'\rangle$  が得られることに注目する. 状態  $|\alpha\rangle$  に対応する 2 成分スピノルは

$$\chi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であり, 今考えている方向単位ベクトル  $\hat{n} = \hat{y}$  周りの回転に対して式 (16) の行列は

$$\exp\left(-\frac{i\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{n}\phi}{2}\right) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\phi}{2} & -\sin \frac{\phi}{2} \\ \sin \frac{\phi}{2} & \cos \frac{\phi}{2} \end{pmatrix}$$

なので (これは回転角  $\phi$  ではなく回転角  $\phi/2$  の回転行列である), 状態  $|\alpha'\rangle$  に対応する 2 成分スピノルは式 (15):

$$\chi' = \exp\left(-\frac{i\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{n}\phi}{2}\right) \chi = \begin{pmatrix} \cos \frac{\phi}{2} \\ \sin \frac{\phi}{2} \end{pmatrix}$$

となる. この第 1 成分  $\cos \frac{\phi}{2}$  が確率振幅  $\langle \alpha | \alpha' \rangle$  なので求める確率は

$$\cos^2 \frac{\phi}{2} = \cos^2 \left( \frac{\pi - \theta_{ab}}{2} \right) = \sin^2 \frac{\theta_{ab}}{2}$$

である.

以上より  $P(a+, b+) = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\theta_{ab}}{2}$  と書ける. 同様に

$$P(a+, c+) = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\theta_{ca}}{2}, \quad P(c+, b+) = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\theta_{bc}}{2}$$

となるので Bell の不等式 (3) は幾何学的な条件

$$\sin^2 \frac{\theta_{ab}}{2} \leq \sin^2 \frac{\theta_{ca}}{2} + \sin^2 \frac{\theta_{bc}}{2}$$

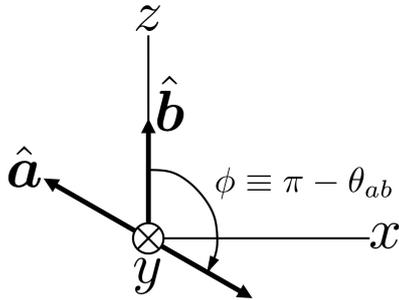


図1 方向単位ベクトル  $\hat{a}, \hat{b}$  と  $xyz$  直交座標系

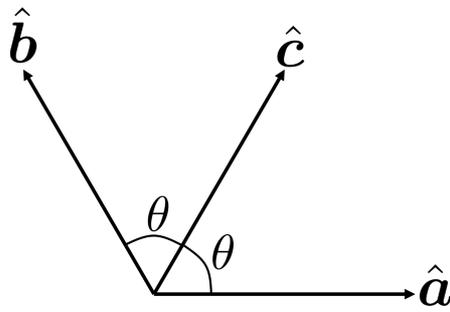


図2 角  $\theta_{ab}$  を  $\hat{c}$  が2等分するように  $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$  を同一面内にとる

を与える。これは常には成り立たない。実際、図2のように  $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$  を同一面内に

$$\theta_{bc} = \theta_{ca} \equiv \theta, \quad \theta_{ab} = 2\theta, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

となるようにとった場合、これは

$$\sin^2 \theta \leq 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \Leftrightarrow \cos \frac{\theta}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

となり、この結果は  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  に反している。

### 3 Mermin の魔法陣

#### 3.1 要旨

2個のスピン  $S^1, S^2$  の無次元化した成分  $\frac{S^1_i}{\hbar/2}, \frac{S^2_i}{\hbar/2}$  を改めて  $S^1_i, S^2_i$  と書こう。これを用いて作られた図3の魔法陣は Mermin の魔法陣と呼ばれ、次の性質を満たす(第3.2節参照)。

- 各マスの値は +1 または -1 である。
- 同じ行、同じ列に含まれる3マスの値の観測は両立し、各行に含まれる3マスを矢印の順にかけた積の値は +1,

$S_x^1$ ( $\pm 1$ )	$S_x^2$ ( $\pm 1$ )	$S_x^1 S_x^2$ ( $\pm 1$ )	→ +1
$S_y^2$ ( $\pm 1$ )	$S_y^1$ ( $\pm 1$ )	$S_y^1 S_y^2$ ( $\pm 1$ )	→ +1
$S_x^1 S_y^2$ ( $\pm 1$ )	$S_y^1 S_x^2$ ( $\pm 1$ )	$S_z^1 S_z^2$ ( $\pm 1$ )	→ +1
↓ -1	↓ -1	↓ -1	

図3 2個のスピンを用いて構成した Mermin の魔法陣

各列に含まれる3マスが矢印の順にかけた積の値は  $-1$  である。

このため各マスの値が  $\pm 1$  のいずれになるか、あらかじめ決まてはいないことになる。実際もし各マスの値があらかじめ決まっていたとすると、 $-1$  は各行に偶数個の含まれるので全マスにも偶数個含まれるのに対し、 $-1$  は各列に奇数個の含まれるので全マスにも奇数個含まれることになって矛盾する\*4 [1, pp.66-68, pp.73-76].

さて、図4のように粒子1と3、2と4が量子もつれ状態にあり全スピン角運動量がゼロに保存されているとする。そして観測者Aは粒子1,2のスピン  $S^1, S^2$  の成分から構成される Mermin の魔法陣について、3行の中から1行を選び、そこに含まれる3マスの値を測定する。同様に観測者Bは粒子3,4のスピン  $S^3, S^4$  の成分から構成される Mermin の魔法陣について、3列の中から1列を選び、そこに含まれる3マスの値を測定する。このときAが*i*行目を、Bが*j*列目を選んだとすると、2つの魔法陣の*i*行*j*列目のマスの値には完全な相関があることになる [1, pp.85-88]。すなわち*i*行*j*列目のマスが

- Aの魔法陣で  $S_i^1$  (または  $S_i^2$ ) のときBの魔法陣では  $S_i^3$  (または  $S_i^4$ ) だから、これらは異符号である。
- Aの魔法陣で  $\pm S_i^1 S_j^2$  のときBの魔法陣では  $\pm S_i^3 S_j^4$  だから、これらは同符号である (第3.2節参照)。

マスの値はあらかじめ決まてはいないから、各マスの値がどの行(またはどの列)を選ぶかという自身の選択だけで決まるという局所性に反して、これはマスの値が相手の選択に依存することを意味している。ここで選択が自由意志で行われたか否かは問題にならない。またスピンの測定値が観測者の選択に依らないとしても、それは粒子に自由意志があることを意味しない。

\*4 これは例えば  $S_x^1$  の値が、1行目の量  $S_y^2, -S_x^1 S_y^2$  と一緒に測定されるか、1列目の量  $S_x^2, S_x^1 S_x^2$  と一緒に測定されるかに依存することを意味する。

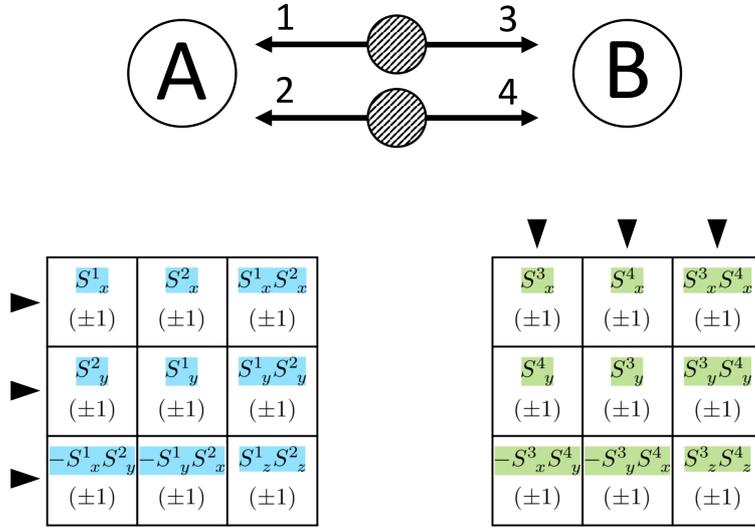


図4 2組のスピンと Mermin の魔法陣

### 3.2 Mermin の魔法陣 (補足)

角運動量の交換関係 (4):  $[S_i, S_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}S_k$  とスピンの反交換関係 (10):  $\{S_i, S_j\} = \frac{1}{2}\hbar^2\delta_{ij}$  を辺々足すと

$$S_i S_j = \frac{1}{2}i\hbar\varepsilon_{ijk}S_k + \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \delta_{ij}$$

となる。よって無次元化したスピン成分  $\frac{S_i}{\hbar/2}$  を  $S_i$  と改めるとこれは

$$\begin{aligned} (S_i)^2 &= 1 \quad (i \text{ で和をとらない}), \\ S_x S_y &= i S_z = -S_y S_x \end{aligned}$$

を与える。

#### Mermin の魔法陣の性質

以上の関係を用い、さらに相関のない2つのスピン成分  $S_i^1, S_j^2$  は交換すると考えると、図3に示した Mermin の魔法陣の各行・列の3マスに含まれる演算子は交換することが確かめられる。例えば恒等式

$$\begin{aligned} [A, BC] &= [A, B]C + B[A, C] = -[BC, A], \quad [A, B] = -[B, A], \\ \therefore [AB, C] &= A[B, C] + [A, C]B \end{aligned}$$

を用いると [2, p.68], 3列目の  $S_x^1 S_x^2, S_y^1 S_y^2$  について

$$\begin{aligned} &[S_x^1 S_x^2, S_y^1 S_y^2] \\ &= S_x^1 [S_x^2, S_y^1] S_y^2 + [S_x^1, S_y^1] S_x^2 S_y^2 + S_y^1 S_x^1 [S_x^2, S_y^2] + S_y^1 [S_x^1, S_y^2] S_x^2 \\ &= 0 + (2iS_z^1)(iS_z^2) + (-iS_z^1)(2iS_z^2) + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。よって同じ行・列の3マスに含まれる観測量は同時に確定できる [2, pp.38–42].

さらに各行・列の3マスに含まれる演算子を矢印の順にかけた積は以下のように計算できる。ここで各式の第1の等号では、相関のない2つのスピン成分  $S^1_i, S^2_j$  が交換することを用いている。

$$\begin{aligned}
1 \text{ 行目: } & S^1_x S^2_x S^1_x S^2_x = (S^1_x)^2 (S^2_x)^2 = 1, \\
2 \text{ 行目: } & S^2_y S^1_y S^1_y S^2_y = (S^1_y)^2 (S^2_y)^2 = 1, \\
3 \text{ 行目: } & (-S^1_x S^2_y)(-S^1_y S^2_x)(S^1_z S^2_z) = (S^1_x S^1_y S^1_z)(S^2_y S^2_x S^2_z) = \{i(S^1_z)^2\}\{-i(S^2_z)^2\} = 1, \\
1 \text{ 列目: } & S^1_x S^2_y (-S^1_x S^2_y) = -(S^1_x)^2 (S^2_y)^2 = -1, \\
2 \text{ 列目: } & S^2_x S^1_y (-S^1_y S^2_x) = -(S^1_y)^2 (S^2_x)^2 = -1, \\
3 \text{ 列目: } & S^1_x S^2_x S^1_y S^2_y S^1_z S^2_z = (S^1_x S^1_y S^1_z)(S^2_x S^2_y S^2_z) = \{i(S^1_z)^2\}\{i(S^2_z)^2\} = -1.
\end{aligned}$$

## 2つの魔法陣の相関

$i$  行  $j$  列目のマスが A の魔法陣で  $\pm S^1_i S^2_j$  のとき B の魔法陣では  $\pm S^3_i S^4_j$  である。  $S^1_i$  と  $\pm S^3_i$ ,  $S^2_j$  と  $S^4_j$  は異符号だから、下の表のように  $S^1_i, S^2_j$  の全ての符号の組み合わせに対して、2つの魔法陣の  $i$  行  $j$  列目のマスが同符号になることが分かる。

$(S^1_i, S^2_j, S^3_i, S^4_j)$	$\pm S^1_i S^2_j$	$\pm S^3_i S^4_j$
(+, +, -, -)	±	±
(+, -, -, +)	干	干
(-, +, +, -)	干	干
(-, -, -, -)	±	±

## 4 付録: スピン角運動量の理論

### 4.1 角運動量の交換関係

系を方向単位ベクトル  $\hat{n}$  の周りに角度  $\phi$  だけ回転させる演算子を

$$\mathcal{D}(\hat{n}, \phi) = e^{-i\mathbf{J} \cdot \hat{n} \phi / \hbar}$$

とするような  $\mathbf{J}$  を角運動量と定義する。一般に異なる軸の周りの回転は交換せず、第  $i$  軸周りの角度  $\varepsilon$  の回転行列を  $R_i(\varepsilon)$  と書くと、 $O(\varepsilon^2)$  まで考慮する近似で

$$[R_x(\varepsilon), R_y(\varepsilon)] \simeq R_z(\varepsilon^2) - 1, \quad \text{etc.}$$

を得る。これと同様の交換関係

$$[\mathcal{D}_x(\varepsilon), \mathcal{D}_y(\varepsilon)] \simeq \mathcal{D}_z(\varepsilon^2) - 1, \quad \text{etc.}$$

を要求すると (ただし  $\mathcal{D}_i(\phi)$  は第  $i$  軸周りの角度  $\phi$  の回転演算子), 角運動量が満たさなければならない交換関係

$$[J_i, J_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} J_k \quad (4)$$

が導かれる [2, pp.205–213].

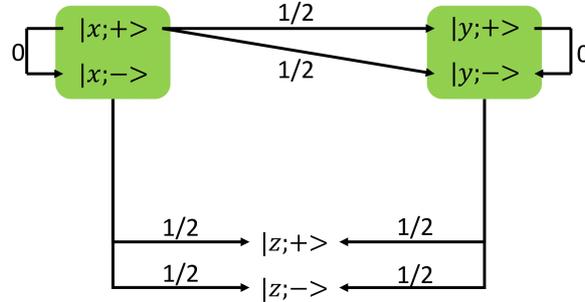


図5 スピン 1/2 の系が状態間を遷移する確率

## 4.2 スピン 1/2 の系

スピンの  $z$  成分の固有値  $\pm\hbar/2$  に属する固有状態  $|z\pm\rangle$  を用いて、スピンの  $x, y$  成分の固有値  $\pm\hbar/2$  に属する固有状態  $|x\pm\rangle, |y\pm\rangle$  は

$$|x\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|z+\rangle \pm e^{i\delta_1}|z-\rangle), \quad |y\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|z+\rangle \pm e^{i\delta_2}|z-\rangle), \quad \delta_2 - \delta_1 = \pm\frac{\pi}{2}$$

と表される。ここで  $\{|z\pm\rangle\}$  による展開係数は状態間を遷移する確率が図5で与えられるように定められた。

ここで  $e^{i\delta_1}|z-\rangle$  を  $|z-\rangle$  と改めることは常に可能であり、これは  $\delta_1 = 0$  と選ぶことに対応する。このとき  $\delta_2 = \pm\frac{\pi}{2}$  である。 $\delta_2 = \frac{\pi}{2}$  と選ぶと

$$|x\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|z+\rangle \pm |z-\rangle) \tag{5}$$

$$|y\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|z+\rangle \pm i|z-\rangle) \tag{6}$$

となる\*5。さらに任意の演算子  $A$  は固有値  $a'$  に属する固有状態  $|a'\rangle$  の組を用いて

$$A = A \left( \sum_{a'} |a'\rangle \langle a'| \right) = \sum_{a'} a' |a'\rangle \langle a'|$$

\*5  $\delta_2 = -\frac{\pi}{2}$  と選んだとすると、 $\delta_2 = \frac{\pi}{2}$  と選んだときの  $S_y$  の式 (9) とは逆符号の  $S_y$  が

$$|y\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|z+\rangle \mp i|z-\rangle)$$

$$\therefore S_y = \frac{\hbar}{2} \{(|y+\rangle \langle y+|) - (|y-\rangle \langle y-|)\} = i\frac{\hbar}{2} \{(|z+\rangle \langle z-|) - |z-\rangle \langle z+|\}$$

のように得られる。このうち角運動量の交換関係 (4):  $[S_i, S_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}S_k$  が満たされるのは  $\delta_2 = \frac{\pi}{2}$  と選んだときである。

と表されることを用いるとスピン演算子の表式

$$S_z = \frac{\hbar}{2} \{(|z+\rangle \langle z+|) - (|z-\rangle \langle z-|)\} \quad (7)$$

$$S_x = \frac{\hbar}{2} \{(|z+\rangle \langle z-|) + (|z-\rangle \langle z+|)\} \quad (8)$$

$$S_y = -i \frac{\hbar}{2} \{(|z+\rangle \langle z-|) - (|z-\rangle \langle z+|)\} \quad (9)$$

を得る。ここから反交換関係

$$\{S_i, S_j\} = \frac{1}{2} \hbar^2 \delta_{ij} \quad (10)$$

が直接示される [2, pp.34-37].

### 4.3 角運動量の固有値と固有状態

角運動量の交換関係 (4) から次のことが導かれる [2, 253-256].

- $\mathbf{J}^2 \equiv \sum_k J_k^2$  に対し  $[\mathbf{J}^2, J_k] = 0$   
 $\rightarrow \mathbf{J}^2, J_z$  の固有値が  $a, b$  となる同時固有状態  $|a, b\rangle$  をとれる [2, pp.38-42].
- はしご演算子  $J_{\pm} \equiv J_x \pm iJ_y$  を定義すると  $J_{\pm} |a, b\rangle = |a, b \pm \hbar\rangle$

さらにここから固有値のとり値は  $j$  を半整数として

$$\begin{aligned} b &= m\hbar, & m &= -j, -j+1, \dots, j-1, j, \\ a &= \hbar^2 j(j+1) \end{aligned} \quad (11)$$

となることが示される。すなわち  $|a, b\rangle$  を対応する  $|j, m\rangle$  に書き改めると

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^2 |j, m\rangle &= \hbar^2 j(j+1) |j, m\rangle \\ J_z |j, m\rangle &= m\hbar |j, m\rangle \end{aligned}$$

となる [2, pp.256-259]. 今導入した  $|j, m\rangle$  という表記を用いると  $J_{\pm} |j, m\rangle = c_{\pm} |j, m \pm 1\rangle$  であり,  $|j, m\rangle$  および  $|j, m \pm 1\rangle$  が規格化されていることを要求すると

$$J_{\pm} |j, m\rangle = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} \hbar |j, m \pm 1\rangle \quad (12)$$

と係数が定まる [2, pp.259-260].

### 4.4 スピン 1 重項

スピン 1/2 の 2 粒子のスピン  $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2$  を考えると,  $S_{1z}, S_{2z}$  の固有値のとり値は式 (11) において  $j = \frac{1}{2}$  であることから

$$\begin{aligned} S_{1z} \text{の固有値: } & m_1 \hbar, & m_1 &= \pm \frac{1}{2}, \\ S_{2z} \text{の固有値: } & m_2 \hbar, & m_2 &= \pm \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。ここで例えば  $m_1 = \frac{1}{2}, m_2 = -\frac{1}{2}$  の状態を  $|z+; z-\rangle$  等と表すことにする。また  $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2$  の成分が角運動量の交換関係を満たすことから、2粒子の系全体のスピン  $\mathbf{S} \equiv \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$  も角運動量の交換関係を満たすことが確かめられる。このため

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^2 \text{の固有値} &: s(s+1)\hbar^2, \\ S_z \text{の固有値} &: m\hbar, \quad m = m_1 + m_2 = 0, \pm 1 \end{aligned}$$

と書ける。  $m = 1$  となるのは式 (11) より  $s = 1$  のときのみであり、この状態に対応するのは  $m_1 = m_2 = \frac{1}{2}$  だけである:

$$|s = 1, m = 1\rangle = |z+; z+\rangle.$$

この両辺に繰り返して演算子  $S_- \equiv S_{1-} + S_{2-}$  をかけて式 (12) を用いると、全スピン角運動量がゼロ (すなわち  $\mathbf{S}^2$  の固有値  $s(s+1)\hbar^2$  がゼロ) となる唯一の状態として

$$|s = 0, m = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|z+; z-\rangle - |z-; z+\rangle) \quad (13)$$

を得る。これはスピン 1 重項と呼ばれる [2, pp.278-280].

$$\text{式 (5)} \quad \Leftrightarrow \quad |z\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x+\rangle \pm |x-\rangle)$$

を用いるとこれは

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|x-; x+\rangle - |x+; x-\rangle) \quad (14)$$

と書き換えられる [2, p.308].

#### 4.5 Pauli の 2 成分形式と回転

スピン 1/2 の系に対して状態を  $|\alpha\rangle$ ,  $S_z$  の固有状態を  $\{|a'\rangle\} = \{|+\rangle, |-\rangle\}$  と書き

2 成分スピノル:  $\chi \equiv \begin{pmatrix} \langle +|\alpha\rangle \\ \langle -|\alpha\rangle \end{pmatrix}$ , Pauli 行列  $\sigma_k$ :  $(\sigma_k)_{a'a''} = \frac{\langle a'|S_k|a''\rangle}{\hbar/2}$  を  $(a', a'')$  成分を持つ行列

を導入すると、スピン演算子  $S_k$  の表式 (7),(8),(9) より

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

となる。

状態  $|\alpha\rangle$  にある系を方向単位ベクトル  $\hat{n}$  周りに角度  $\phi$  だけ回転した状態は

$$|\alpha'\rangle = \exp\left(-\frac{i\mathbf{S} \cdot \hat{n}\phi}{\hbar}\right) |\alpha\rangle$$

であり、これは回転前後の状態  $|\alpha\rangle, |\alpha'\rangle$  に対応する 2 成分スピノル  $\chi, \chi'$  に対する行列の式

$$\chi' = \exp\left(-\frac{i\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{n}\phi}{2}\right) \chi \quad (15)$$

に置き換わる:

$$\begin{aligned}
\langle a'|\alpha\rangle &= \sum_{a''} \left\langle a' \left| \exp\left(\frac{-i\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}\phi}{\hbar}\right) \right| a'' \right\rangle \langle a''|\alpha\rangle \\
&= \sum_{a''} \left( \exp\left(\frac{-i\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}}\phi}{2}\right) \right)_{a'a''} \langle a''|\alpha\rangle, \\
\therefore \left\langle a' \left| \exp\left(\frac{-i\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}\phi}{\hbar}\right) \right| a'' \right\rangle &\equiv \left\langle a' \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{-i\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}\phi}{\hbar}\right)^k \right| a'' \right\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{-i\phi}{\hbar}\right)^k (\langle a'|\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}|a''\rangle)^k \\
&\equiv \exp\left(\frac{-i\phi}{\hbar} \langle a'|\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}|a''\rangle\right) = \exp\left(\frac{-i\phi}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{\langle a'|S_i|a''\rangle}{\hbar/2} \hat{n}_i\right) \\
&= \exp\left(\frac{-i\phi}{2} \sum_{i=1}^3 (\sigma_i)_{a'a''} \hat{n}_i\right) = \left( \exp\left(\frac{-i\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}}\phi}{2}\right) \right)_{a'a''}.
\end{aligned}$$

ここで反交換関係 (10):  $\{S_i, S_j\} = \frac{1}{2}\hbar^2\delta_{ij}$  の帰結

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}})^2 = 1$$

に注意すると,  $\chi$  にかかる行列は具体的に

$$\begin{aligned}
\exp\left(\frac{-i\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}}\phi}{2}\right) &= \left\{ 1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{\phi}{2}\right)^2 + \dots \right\} - i\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}} \left\{ \left(\frac{\phi}{2}\right)^2 - \frac{1}{3!} \left(\frac{\phi}{2}\right)^3 + \dots \right\} \\
&= \cos\frac{\phi}{2} - i\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}} \sin\frac{\phi}{2} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\frac{\phi}{2} - i\hat{n}_z \sin\frac{\phi}{2} & (-i\hat{n}_x - \hat{n}_y) \sin\frac{\phi}{2} \\ (-i\hat{n}_x + \hat{n}_y) \sin\frac{\phi}{2} & \cos\frac{\phi}{2} + i\hat{n}_z \sin\frac{\phi}{2} \end{pmatrix} \tag{16}
\end{aligned}$$

と書けることが分かる [2, pp.220–224].

## 参考文献

- [1] 筒井泉, 2011, 量子力学の反常識と素粒子の自由意志, 株式会社岩波書店, 東京.
- [2] J.J.Sakurai, 2017, 現代の量子力学 (上)(桜井明夫訳), 株式会社吉岡書店, 京都.