Schwarzschild解の導出過程

本稿の他にも理論物理の各種ノートを以下のページで公開している.

http://everything-arises-from-the-principle-of-physics.com/

1　ランダウ=リフシッツ『場の古典論』§ 100

Schwarzschild 解は中心対称な重力場を表す Einstein 方程式の解である．本章では

> エリ・デ・ランダウ，イェ・エム・リフシッツ，2015，ランダウ=リフシッツ理論物理学教程
> 場の古典論 (原書第 6 版)(恒藤敏彦，広重徹訳)，東京図書株式会社，東京，333–336

における Schwarzschild 解の導出について，省略された計算過程の詳細を示す．本稿では一般的な慣習に従って，0,1,2,3 の 4 つの値をとる添字にはラテン文字ではなく，ギリシア文字を用いる．

中心対称な重力場に対して，$\mathrm{d}s^2$ の表式が

$$\mathrm{d}s^2 = e^{\nu}c^2\mathrm{d}t^2 - r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2) - e^{\lambda}\mathrm{d}r^2, \qquad \lambda = \lambda(r,t), \qquad \nu = \nu(r,t) \tag{100.2}$$

という形になるような極座標 $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, r, \theta, \phi)$ をとれる．このとき計量テンソルの全成分は

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} e^{\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}, \qquad \therefore (g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} e^{-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r^2\sin^2\theta} \end{pmatrix}$$

で与えられる．ここで λ, ν は無次元量であることに注意する．このことは以降の計算を進めていく上で，検算に役立つ．

さて，未知関数 $\lambda(r,t), \nu(r,t)$ を Einstein 方程式から定めれば，時空の幾何学が決定される．そこで Einstein 方程式に現れる Ricci テンソルやスカラー曲率を，未知関数 $\lambda(r,t), \nu(r,t)$ を用いて表すことを考える．

Christoffel 記号の計算

まず $\lambda(r,t), \nu(r,t)$ を用いて Christoffel 記号を表そう．$(g_{\mu\nu})$ の非対角成分はゼロだから，Christoffel 記号

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2}g^{\alpha\mu}(\partial_\nu g_{\lambda\mu} + \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\lambda}) \tag{86.3}$$

の α, ν, λ が相異なるものはゼロになる．よってゼロでない Christoffel 記号 $\Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda}$ は，対称な添字 ν, λ が等しいものと異なるものに分類すると

$$\text{対称な添字が等しいもの} \qquad \Gamma^{\mu}{}_{\nu\nu} = -\frac{1}{2}g^{\mu\mu}\partial_\mu g_{\nu\nu} \qquad (\mu, \nu\text{について和をとらない}) \tag{1}$$

$$\text{対称な添字が異なるもの} \qquad \Gamma^{\mu}{}_{\nu\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\mu}\partial_\nu g_{\mu\mu}(= \Gamma^{\mu}{}_{\mu\nu}) \qquad (\mu \neq \nu, \mu\text{について和をとらない}) \tag{2}$$

に限られる．以下，$x^1 = r$ による微分をプライムで，$x^0 = ct$ による微分をドットで表す．

式 (1) の形の Christoffel 記号は以下の 16 個である．

$$
\begin{aligned}
\Gamma^0{}_{00} &= \frac{1}{2}e^{-\nu}\partial_0 e^{\nu} = \frac{\dot{\nu}}{2}, & \Gamma^0{}_{11} &= \frac{1}{2}e^{-\nu}\partial_0 e^{\lambda} = \frac{1}{2}\dot{\lambda}e^{\lambda-\nu},\\
\Gamma^0{}_{22} &= \frac{1}{2}e^{-\nu}\partial_0 r^2 = 0, & \Gamma^0{}_{33} &= \frac{1}{2}e^{-\nu}\partial_0(r^2\sin^2\theta) = 0,\\
\Gamma^1{}_{00} &= \frac{1}{2}(-e^{-\lambda})(-e^{\nu})' = \frac{\nu'}{2}e^{\nu-\lambda}, & \Gamma^1{}_{11} &= \frac{1}{2}(-e^{-\lambda})(e^{-\lambda})' = \frac{\lambda'}{2},\\
\Gamma^1{}_{22} &= \frac{1}{2}(-e^{-\lambda})(-r^2)' = -re^{-\lambda}, & \Gamma^1{}_{33} &= \frac{1}{2}(-e^{-\lambda})(-r^2\sin^2\theta)' = -re^{-\lambda}\sin^2\theta,\\
\Gamma^2{}_{00} &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{r^2}\right)\partial_\theta e^{\nu} = 0, & \Gamma^2{}_{11} &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{r^2}\right)\partial_\theta e^{-\lambda} = 0,\\
\Gamma^2{}_{22} &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{r^2}\right)\partial_\theta(-r^2) = 0, & \Gamma^2{}_{33} &= -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{r^2}\right)\partial_\theta(-r^2\sin^2\theta) = -\sin\theta\cos\theta,\\
\Gamma^3{}_{00} &= -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\right)\partial_\phi e^{\nu} = 0, & \Gamma^3{}_{11} &= -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\right)\partial_\phi(-e^{\lambda}) = 0,\\
\Gamma^3{}_{22} &= -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\right)\partial_\phi(-r^2) = 0, & \Gamma^3{}_{33} &= -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\right)\partial_\phi(-r^2\sin^2\theta) = 0.
\end{aligned}
$$

式 (2) 左辺の形の Christoffel 記号は以下の 12 個である．

$$
\begin{aligned}
\Gamma^0{}_{10} &= \frac{1}{2}e^{-\nu}\partial_r e^{\nu} = \frac{\nu'}{2}, & \Gamma^0{}_{20} &= \frac{1}{2}e^{-\nu}\partial_\theta e^{\nu} = 0,\\
\Gamma^0{}_{30} &= \frac{1}{2}e^{-\nu}\partial_\phi e^{\nu} = 0, & \Gamma^1{}_{01} &= \frac{1}{2}(-e^{-\lambda})\partial_0(-e^{\lambda}) = \frac{\dot{\lambda}}{2},\\
\Gamma^1{}_{21} &= \frac{1}{2}(-e^{-\lambda})\partial_\theta(-e^{\lambda}) = 0, & \Gamma^1{}_{31} &= \frac{1}{2}(-e^{-\lambda})\partial_\phi(-e^{\lambda}) = 0,\\
\Gamma^2{}_{02} &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{r^2}\right)\partial_\theta(-r^2) = 0, & \Gamma^2{}_{12} &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{r^2}\right)\partial_r(-r^2) = \frac{1}{r},\\
\Gamma^2{}_{32} &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{r^2}\right)\partial_\phi(-r^2) = 0, & \Gamma^3{}_{03} &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\right)\partial_0(-r^2\sin^2\theta) = 0,\\
\Gamma^3{}_{13} &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\right)\partial_r(-r^2\sin^2\theta) = \frac{1}{r}, & \Gamma^3{}_{23} &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\right)\partial_\theta(-r^2\sin^2\theta) = \frac{1}{\tan\theta}.
\end{aligned}
$$

以上で教科書の式 (100.3) に与えられている，ゼロでない Christoffel 記号の全成分が網羅されている．

Ricci テンソル，スカラー曲率の計算

曲率テンソル

$$R^{\lambda}{}_{\mu\nu\rho} \equiv \partial_\nu\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\rho} - \partial_\rho\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} + \Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\rho} - \Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\rho}\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu} \tag{91.4}$$

に対して，Ricci テンソルとスカラー曲率はそれぞれ

$$R_{\mu\nu} \equiv R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\rho}, \tag{92.6}$$
$$R \equiv g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \tag{92.9}$$

で定義される．先に求めた Christoffel 記号の表式を用いて，Ricci テンソルとスカラー曲率は以下のように計算される．その際，

$$\text{対称性} \qquad R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu} \quad \Rightarrow \quad R^{\mu}{}_{\nu} = g^{\mu\lambda}R_{\lambda\nu} = g^{\mu\lambda}R_{\nu\lambda} = R_{\nu}{}^{\mu}$$

にも注意する．

■R_{00} の計算　$R_{00}={R^{\mu}}_{0\mu0}=\partial_\mu {\Gamma^\mu}_{00}-\partial_0{\Gamma^\mu}_{0\mu}+{\Gamma^\mu}_{\mu\nu}{\Gamma^\nu}_{00}-{\Gamma^\mu}_{0\nu}{\Gamma^\nu}_{0\mu}$ の最右辺について，

- 第 1 項の ${\Gamma^\mu}_{00}$，第 2 項の ${\Gamma^\mu}_{0\mu}$ がゼロでない値を持つのはいずれも $\mu=0,1$ のときである．
- 第 3 項の ${\Gamma^\nu}_{00}$ がゼロでない値を持つのは $\nu=0,1$ のときであり，
  - $\nu=0$ に対して ${\Gamma^\mu}_{\mu\nu}$ がゼロでない値を持つのは $\mu=0,1$ のとき，
  - $\nu=1$ に対して ${\Gamma^\mu}_{\mu\nu}$ がゼロでない値を持つのは $\mu=0,1,2,3$ のときである．
- 第 4 項の ${\Gamma^\mu}_{0\nu}$ がゼロでない値を持つのは $(\mu,\nu)=(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$ のときである．

よって

$$
\begin{aligned}
R_{00}=&\cancel{\partial_0\frac{\dot\nu}{2}}+\partial_1\left(\frac{\nu'}{2}e^{\nu-\lambda}\right) \quad\Leftarrow\quad \partial_\mu{\Gamma^\mu}_{00}\\
&\cancel{-\partial_0\frac{\dot\nu}{2}}-\partial_0\frac{\dot\lambda}{2} \quad\Leftarrow\quad -\partial_0{\Gamma^\mu}_{0\mu}\\
&\cancel{+\left(\frac{\dot\nu}{2}\right)^2}+\frac{\dot\lambda}{2}\frac{\dot\nu}{2}+\left(\frac{\nu'}{2}+\frac{\lambda'}{2}+\frac{1}{r}\times 2\right)\frac{\nu'}{2}e^{\nu-\lambda} \quad\Leftarrow\quad {\Gamma^\mu}_{\mu\nu}{\Gamma^\nu}_{00}\\
&-2\times\frac{\nu'}{2}\cdot\frac{\nu'}{2}e^{\nu-\lambda}\cancel{-\left(\frac{\dot\nu}{2}\right)^2}-\left(\frac{\dot\lambda}{2}\right)^2 \quad\Leftarrow\quad -{\Gamma^\mu}_{0\nu}{\Gamma^\nu}_{0\mu}\\
=&\left(\frac{\nu'}{2}e^{\nu-\lambda}\right)'-\frac{\ddot\lambda}{2}+\frac{\dot\lambda\dot\nu}{4}-\frac{\nu'^2}{4}e^{\nu-\lambda}+\left(\frac{\lambda'}{2}+\frac{2}{r}\right)\frac{\nu'}{2}e^{\nu-\lambda}-\frac{\dot\lambda^2}{4}\\
=&\left(\frac{\nu''}{2}+\frac{\nu'^2}{4}-\frac{\nu'\lambda'}{4}+\frac{\nu'}{r}\right)e^{\nu-\lambda}-\frac{\ddot\lambda}{2}+\frac{\dot\lambda\dot\nu}{4}-\frac{\dot\lambda^2}{4}.
\end{aligned}
$$

■R_{01} の計算　$R_{01}={R^{\mu}}_{0\mu1}=\partial_\mu {\Gamma^\mu}_{01}-\partial_1{\Gamma^\mu}_{0\mu}+{\Gamma^\mu}_{\mu\nu}{\Gamma^\nu}_{01}-{\Gamma^\mu}_{1\nu}{\Gamma^\nu}_{0\mu}$ の最右辺について，

- 第 1 項の ${\Gamma^\mu}_{01}$，第 2 項の ${\Gamma^\mu}_{0\mu}$ がゼロでない値を持つのはいずれも $\mu=0,1$ のときである．
- 第 3 項の ${\Gamma^\nu}_{01}$ がゼロでない値を持つのは $\nu=0,1$ のときであり，
  - $\nu=0$ に対して ${\Gamma^\mu}_{\mu\nu}$ がゼロでない値を持つのは $\mu=0,1$ のとき，
  - $\nu=1$ に対して ${\Gamma^\mu}_{\mu\nu}$ がゼロでない値を持つのは $\mu=0,1,2,3$ のときである．
- 第 4 項の ${\Gamma^\nu}_{0\mu}$ がゼロでない値を持つのは $(\mu,\nu)=(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$ のときである．

よって

$$
\begin{aligned}
R_{01}=&\cancel{\partial_0\frac{\nu'}{2}}\cancel{+\partial_1\frac{\dot\lambda}{2}} \quad\Leftarrow\quad \partial_\mu{\Gamma^\mu}_{01}\\
&\cancel{-\partial_1\frac{\dot\nu}{2}}\cancel{-\partial_1\frac{\dot\lambda}{2}} \quad\Leftarrow\quad -\partial_1{\Gamma^\mu}_{0\mu}\\
&+\left(\cancel{\frac{\dot\nu}{2}}\cancel{+\frac{\dot\lambda}{2}}\right)\frac{\nu'}{2}+\left(\cancel{\frac{\nu'}{2}}\cancel{+\frac{\lambda'}{2}}+\frac{1}{r}\times 2\right)\frac{\dot\lambda}{2} \quad\Leftarrow\quad {\Gamma^\mu}_{\mu\nu}{\Gamma^\nu}_{01}\\
&\cancel{-\frac{\dot\lambda}{2}e^{\lambda-\nu}\frac{\nu'}{2}e^{\nu-\lambda}}\cancel{-\frac{\nu'}{2}\frac{\dot\nu}{2}}\cancel{-\frac{\dot\lambda}{2}\frac{\nu'}{2}}\cancel{-\frac{\lambda'}{2}\frac{\dot\lambda}{2}} \quad\Leftarrow\quad -{\Gamma^\mu}_{1\nu}{\Gamma^\nu}_{0\mu}\\
=&\frac{\dot\lambda}{r}(=R_{10}).
\end{aligned}
$$

■R_{02} の計算　$R_{02}={R^{\mu}}_{0\mu2}=\partial_\mu {\Gamma^\mu}_{02}-\partial_2{\Gamma^\mu}_{0\mu}+{\Gamma^\mu}_{\mu\nu}{\Gamma^\nu}_{02}-{\Gamma^\mu}_{2\nu}{\Gamma^\nu}_{0\mu}$ の最右辺について，

- 第 1 項における ${\Gamma^{\mu}}_{02}$，第 3 項における ${\Gamma^{\nu}}_{02}$ の形の Christoffel 記号は全てゼロである．
- 第 2 項について，$x^2 = \theta$ 依存性を持つ Christoffel 記号は ${\Gamma^2}_{33}, {\Gamma^3}_{23}, {\Gamma^1}_{33}$ のみであり，いずれも ${\Gamma^{\mu}}_{0\mu}$ の形ではない．
- 第 4 項の ${\Gamma^{\mu}}_{2\nu}$ がゼロでない値を持つのは $(\mu,\nu) = (1,2),(2,1),(3,3)$ のときであり，いずれに対しても ${\Gamma^{\nu}}_{0\mu} = 0$ となる．

よって

$$R_{02} = 0 (= R_{20}).$$

■R_{03} の計算　$R_{03} = {R^{\mu}}_{0\mu 3} = \partial_\mu {\Gamma^{\mu}}_{03} - \partial_3 {\Gamma^{\mu}}_{0\mu} + {\Gamma^{\mu}}_{\mu\nu}{\Gamma^{\nu}}_{03} - {\Gamma^{\mu}}_{3\nu}{\Gamma^{\nu}}_{0\mu}$ の最右辺について，

- 第 1 項における ${\Gamma^{\mu}}_{03}$，第 3 項における ${\Gamma^{\nu}}_{03}$ の形の Christoffel 記号は全てゼロである．
- 第 2 項は，$x^3 = \phi$ 依存性を持つ Christoffel 記号が存在しないからゼロになる．
- 第 4 項の ${\Gamma^{\mu}}_{3\nu}$ がゼロでない値を持つのは $(\mu,\nu) = (1,3),(2,3),(3,1),(3,2)$ のときであり，いずれに対しても ${\Gamma^{\nu}}_{0\mu} = 0$ となる．

よって

$$R_{03} = 0 (= R_{30}).$$

■R_{11} の計算　$R_{11} = {R^{\mu}}_{1\mu 1} = \partial_\mu {\Gamma^{\mu}}_{11} - \partial_1 {\Gamma^{\mu}}_{1\mu} + {\Gamma^{\mu}}_{\mu\nu}{\Gamma^{\nu}}_{11} - {\Gamma^{\mu}}_{1\nu}{\Gamma^{\nu}}_{1\mu}$ の最右辺について，

- 第 1 項の ${\Gamma^{\mu}}_{11}$ がゼロでない値を持つのは $\mu = 0,1$ のときである．
- 第 3 項の ${\Gamma^{\nu}}_{11}$ がゼロでない値を持つのは $\nu = 0,1$ のときであり，
  - $\nu = 0$ に対して ${\Gamma^{\mu}}_{\mu\nu}$ がゼロでない値を持つのは $\mu = 0,1$ のとき，
  - $\nu = 1$ に対して ${\Gamma^{\mu}}_{\mu\nu}$ がゼロでない値を持つのは $\mu = 0,1,2,3$ のときである．
- 第 4 項の ${\Gamma^{\mu}}_{1\nu}$ がゼロでない値を持つのは $(\mu,\nu) = (0,0),(0,1),(1,0),(1,1),(2,2),(3,3)$ のときである．

よって

$$\begin{aligned}
R_{11} =& \partial_0 \left(\frac{\dot{\lambda}}{2} e^{\lambda-\nu} \right) \cancel{+ \partial_1 \frac{\lambda'}{2}} \quad \Leftarrow \quad \partial_\mu {\Gamma^{\mu}}_{11} \\
& - \partial_1 \left(\frac{\nu'}{2} \cancel{+ \frac{\lambda'}{2}} + \frac{1}{r} \times 2 \right) \quad \Leftarrow \quad -\partial_1 {\Gamma^{\mu}}_{1\mu} \\
& + \left(\frac{\dot{\nu}}{2} + \frac{\dot{\lambda}}{2} \right) \frac{\dot{\lambda}}{2} e^{\lambda-\nu} + \left(\frac{\nu'}{2} \cancel{+ \frac{\lambda'}{2}} + \frac{1}{r} \times 2 \right) \frac{\lambda'}{2} \quad \Leftarrow \quad {\Gamma^{\mu}}_{\mu\nu}{\Gamma^{\nu}}_{11} \\
& \cancel{- \left(\frac{\lambda'}{2} \right)^2} - \left(\frac{\nu'}{2} \right)^2 - \frac{\dot{\lambda}}{2} e^{\lambda-\nu} \frac{\dot{\lambda}}{2} \times 2 - \left(\frac{1}{r} \right)^2 \times 2 \quad \Leftarrow \quad -{\Gamma^{\mu}}_{1\nu}{\Gamma^{\nu}}_{1\mu} \\
=& \partial_0 \left(\frac{\dot{\lambda}}{2} e^{\lambda-\nu} \right) - \frac{\nu''}{2} \cancel{+ \frac{2}{r^2}} + \frac{\dot{\nu}}{2} \frac{\dot{\lambda}}{2} e^{\lambda-\nu} \underline{+ \left(\frac{\dot{\lambda}}{2} \right)^2 e^{\lambda-\nu}} + \frac{\lambda'\nu'}{4} + \frac{\lambda'}{r} - \left(\frac{\nu'}{2} \right)^2 \cancel{- \frac{2}{r^2}} \underline{- 2 \left(\frac{\dot{\lambda}}{2} \right)^2 e^{\lambda-\nu}} \\
=& \partial_0 \left(\frac{\dot{\lambda}}{2} e^{\lambda-\nu} \right) + \frac{\dot{\lambda}}{2} \left(\frac{\dot{\nu}}{2} - \frac{\dot{\lambda}}{2} \right) e^{\lambda-\nu} - \frac{\nu''}{2} + \frac{\lambda'\nu'}{4} + \frac{\lambda'}{r} - \frac{{\nu'}^2}{4}
\end{aligned}$$

$$=\left\{\frac{\ddot{\lambda}}{2}+\frac{\dot{\lambda}}{4}(\dot{\lambda}-\dot{\nu})\right\}e^{\lambda-\nu}-\frac{\nu''}{2}+\frac{\lambda'\nu'}{4}+\frac{\lambda'}{r}-\frac{\nu'^2}{4}.$$

■R_{12} の計算　$R_{12}=R^{\mu}{}_{1\mu 2}=\partial_\mu\Gamma^{\mu}{}_{12}-\partial_2\Gamma^{\mu}{}_{1\mu}+\Gamma^{\mu}{}_{\mu\nu}\Gamma^{\nu}{}_{12}-\Gamma^{\mu}{}_{2\nu}\Gamma^{\nu}{}_{1\mu}$ の最右辺について，

- 第 1 項の $\Gamma^{\mu}{}_{12}$ がゼロでない値を持つのは $\mu=2$ のときである．
  ところが $\mu=2$ のとき，$\partial_\mu\Gamma^{\mu}{}_{12}=\partial_2\frac{1}{r}=0$ となる．
- 第 2 項について，$x^2=\theta$ 依存性を持つ Christoffel 記号は $\Gamma^{2}{}_{33},\Gamma^{3}{}_{23},\Gamma^{1}{}_{33}$ のみであり，
  いずれも $\Gamma^{\mu}{}_{1\mu}$ の形ではない．
- 第 3 項の $\Gamma^{\nu}{}_{12}$ がゼロでない値を持つのは $\nu=2$ のときであり，
  $\nu=2$ に対して $\Gamma^{\mu}{}_{\mu\nu}$ がゼロでない値を持つのは $\mu=3$ のときである．
  $(\mu,\nu)=(3,2)$ のとき，$\Gamma^{\mu}{}_{\mu\nu}\Gamma^{\nu}{}_{12}=\frac{\cot\theta}{r}$ となる．
- 第 4 項の $\Gamma^{\mu}{}_{2\nu}$ がゼロでない値を持つのは $(\mu,\nu)=(1,2),(2,1),(3,3)$ のときであり，
  $(\mu,\nu)=(1,2),(2,1)$ に対しては $\Gamma^{\nu}{}_{1\mu}=0$ となる．$(\mu,\nu)=(3,3)$ のとき，$-\Gamma^{\mu}{}_{2\nu}\Gamma^{\nu}{}_{1\mu}=-\frac{\cot\theta}{r}$ となる．

よって

$$R_{12}=\frac{\cot\theta}{r}-\frac{\cot\theta}{r}=0(=R_{21}).$$

■R_{13} の計算　$R_{13}=R^{\mu}{}_{1\mu 3}=\partial_\mu\Gamma^{\mu}{}_{13}-\partial_3\Gamma^{\mu}{}_{1\mu}+\Gamma^{\mu}{}_{\mu\nu}\Gamma^{\nu}{}_{13}-\Gamma^{\mu}{}_{3\nu}\Gamma^{\nu}{}_{1\mu}$ の最右辺について，

- 第 1 項の $\Gamma^{\mu}{}_{13}$ がゼロでない値を持つのは $\mu=3$ のときである．
  ところが $\mu=3$ のとき，$\partial_\mu\Gamma^{\mu}{}_{13}=\partial_3\frac{1}{r}=0$ となる．
- 第 2 項は，$x^3=\phi$ 依存性を持つ Christoffel 記号が存在しないからゼロになる．
- 第 3 項の $\Gamma^{\nu}{}_{13}$ がゼロでない値を持つのは $\nu=3$ のときであり，$\nu=3$ に対して $\Gamma^{\mu}{}_{\mu\nu}=0$ となる．
- 第 4 項の $\Gamma^{\mu}{}_{3\nu}$ がゼロでない値を持つのは $(\mu,\nu)=(1,3),(2,3),(3,1),(3,2)$ のときであり，
  いずれに対しても $\Gamma^{\nu}{}_{1\mu}=0$ となる．

よって

$$R_{13}=0(=R_{31}).$$

■R_{22} の計算　$R_{22}=R^{\mu}{}_{2\mu 2}=\partial_\mu\Gamma^{\mu}{}_{22}-\partial_2\Gamma^{\mu}{}_{2\mu}+\Gamma^{\mu}{}_{\mu\nu}\Gamma^{\nu}{}_{22}-\Gamma^{\mu}{}_{2\nu}\Gamma^{\nu}{}_{2\mu}$ の最右辺について，

- 第 1 項の $\Gamma^{\mu}{}_{22}$ がゼロでない値を持つのは $\mu=1$ のときである．
- 第 2 項の $\Gamma^{\mu}{}_{2\mu}$ がゼロでない値を持つのは $\mu=3$ のときである．
- 第 3 項の $\Gamma^{\nu}{}_{22}$ がゼロでない値を持つのは $\nu=1$ のときである．
- 第 4 項の $\Gamma^{\mu}{}_{2\nu}$ がゼロでない値を持つのは $(\mu,\nu)=(1,2),(2,1),(3,3)$ のときである．

よって

$$\begin{aligned}
R_{22}=&\partial_1(-re^{-\lambda}) \quad \Leftarrow \quad \partial_\mu\Gamma^{\mu}{}_{22}\\
&-\partial_2(\cot\theta) \quad \Leftarrow \quad -\partial_2\Gamma^{\mu}{}_{2\mu}\\
&+\left(\frac{\nu'}{2}+\frac{\lambda'}{2}\cancel{+\frac{1}{r}\times 2}\right)(-re^{-\lambda}) \quad \Leftarrow \quad \Gamma^{\mu}{}_{\mu\nu}\Gamma^{\nu}{}_{22}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\cancel{-(-re^{-\lambda})\frac{1}{r}-\frac{1}{r}(-re^{-\lambda})}-\cot^2\theta \quad \Leftarrow \quad -\Gamma^{\mu}{}_{2\nu}\Gamma^{\nu}{}_{2\mu}\\
=&\partial_1(-re^{-\lambda})+\left(\frac{\nu'}{2}+\frac{\lambda'}{2}\right)(-re^{-\lambda})-\partial_2(\cot\theta)-\cot^2\theta\\
=&\left\{-1+r\left(\frac{\lambda'}{2}-\frac{\nu'}{2}\right)\right\}e^{-\lambda}+1. \qquad \left(\because -\partial_2(\cot\theta)-\cot^2\theta=\frac{1}{\sin^2\theta}-\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=1\right)
\end{aligned}
$$

■R_{23} の計算　$R_{23}=R^{\mu}{}_{2\mu 3}=\partial_\mu\Gamma^{\mu}{}_{23}-\partial_3\Gamma^{\mu}{}_{2\mu}+\Gamma^{\mu}{}_{\mu\nu}\Gamma^{\nu}{}_{23}-\Gamma^{\mu}{}_{3\nu}\Gamma^{\nu}{}_{2\mu}$ の最右辺について，

- 第 1 項の $\Gamma^{\mu}{}_{23}$ がゼロでない値を持つのは $\mu=3$ のときである．
  ところが $\mu=3$ のとき，$\partial_\mu\Gamma^{\mu}{}_{23}=\partial_3\cot\theta=0$ となる．
- 第 2 項は，$x^3=\phi$ 依存性を持つ Christoffel 記号が存在しないからゼロになる．
- 第 3 項の $\Gamma^{\nu}{}_{23}$ がゼロでない値を持つのは $\nu=3$ のときであり，$\nu=3$ に対して $\Gamma^{\mu}{}_{\mu\nu}=0$ となる．
- 第 4 項の $\Gamma^{\nu}{}_{2\mu}$ がゼロでない値を持つのは $(\mu,\nu)=(1,2),(2,1),(3,3)$ のときであり，
  いずれに対しても $\Gamma^{\mu}{}_{3\nu}=0$ となる．

よって

$$
R_{23}=0(=R_{32}).
$$

■R_{33} の計算　$R_{33}=R^{\mu}{}_{3\mu 3}=\partial_\mu\Gamma^{\mu}{}_{33}-\partial_3\Gamma^{\mu}{}_{3\mu}+\Gamma^{\mu}{}_{\mu\nu}\Gamma^{\nu}{}_{33}-\Gamma^{\mu}{}_{3\nu}\Gamma^{\nu}{}_{3\mu}$ の最右辺について，

- 第 1 項の $\Gamma^{\mu}{}_{33}$ がゼロでない値を持つのは $\mu=1,2$ のときである．
- 第 2 項は，$x^3=\phi$ 依存性を持つ Christoffel 記号が存在しないからゼロになる．
- 第 3 項の $\Gamma^{\nu}{}_{33}$ がゼロでない値を持つのは $\nu=1,2$ のときであり，
  - $\nu=1$ に対して $\Gamma^{\mu}{}_{\mu\nu}$ がゼロでない値を持つのは $\mu=0,1,2,3$ のとき，
  - $\nu=2$ に対して $\Gamma^{\mu}{}_{\mu\nu}$ がゼロでない値を持つのは $\mu=3$ のときである．
- 第 4 項の $\Gamma^{\mu}{}_{3\nu}$ がゼロでない値を持つのは $(\mu,\nu)=(1,3),(2,3),(3,1),(3,2)$ のときである．

よって

$$
\begin{aligned}
R_{33}=&\partial_1(-r\sin^2\theta e^{-\lambda})+\partial_2(-\sin\theta\cos\theta) \quad \Leftarrow \quad \partial_\mu\Gamma^{\mu}{}_{33}\\
&+\left(\frac{\nu'}{2}+\frac{\lambda'}{2}\cancel{+\frac{1}{r}\times 2}\right)(-r\sin^2\theta e^{-\lambda})\underbrace{+\cot\theta(-\sin\theta\cos\theta)}_{-\cos^2\theta} \quad \Leftarrow \quad \Gamma^{\mu}{}_{\mu\nu}\Gamma^{\nu}{}_{33}\\
&\underbrace{-(-\sin\theta\cos\theta)\cot\theta\times 2}_{2\cos^2\theta}\cancel{-(-r\sin^2\theta e^{-\lambda})\frac{1}{r}\times 2} \quad \Leftarrow \quad -\Gamma^{\mu}{}_{3\nu}\Gamma^{\nu}{}_{3\mu}\\
=&\partial_1(-r\sin^2\theta e^{-\lambda})+\partial_2(-\sin\theta\cos\theta)+\left(\frac{\nu'}{2}+\frac{\lambda'}{2}\right)(-r\sin^2\theta e^{-\lambda})+\cos^2\theta\\
=&-e^{-\lambda}\sin^2\theta\left\{1+r\left(\frac{\nu'}{2}-\frac{\lambda'}{2}\right)\right\}+\sin^2\theta.
\end{aligned}
$$

■Ricci テンソルの全成分　以上で Ricci テンソルの全成分が得られたことになる．これを混合テンソル $R^{\mu}{}_{\nu}$ の形に書き換え，以下にまとめる．その際 $(g^{\mu\nu})$ は対角的なので，例えば

$$
R^{0}{}_{0}=g^{0\mu}R_{\mu 0}=g^{00}R_{00}
$$

のように計算できることに注意すれば良い．

$$
\begin{aligned}
R^0{}_0 =& g^{00}R_{00} = e^{-\nu}R_{00}, \qquad R_{00} = \left(\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'}{r}\right)e^{\nu-\lambda} - \frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{4} - \frac{\dot{\lambda}^2}{4}, \\
R^0{}_1 =& g^{00}R_{01} = e^{-\nu}\frac{\dot{\lambda}}{r}, \\
R^0{}_2 =& g^{00}R_{02} = 0, \\
R^0{}_3 =& g^{00}R_{03} = 0, \\
R^1{}_0 =& g^{11}R_{10} = -e^{-\lambda}\frac{\dot{\lambda}}{r}, \\
R^1{}_1 =& g^{11}R_{11} = -e^{-\lambda}R_{11}, \qquad R_{11} = \left\{\frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}}{4}(\dot{\lambda} - \dot{\nu})\right\}e^{\lambda-\nu} - \frac{\nu''}{2} + \frac{\lambda'\nu'}{4} + \frac{\lambda'}{r} - \frac{\nu'^2}{4}, \\
R^1{}_2 =& g^{11}R_{12} = 0, \\
R^1{}_3 =& g^{11}R_{13} = 0, \\
R^2{}_0 =& g^{22}R_{20} = 0, \\
R^2{}_1 =& g^{22}R_{21} = 0, \\
R^2{}_2 =& g^{22}R_{22} = -\frac{1}{r^2}R_{22}, \qquad R_{22} = \left\{-1 + r\left(\frac{\lambda'}{2} - \frac{\nu'}{2}\right)\right\}e^{-\lambda} + 1, \\
R^2{}_3 =& g^{22}R_{23} = 0, \\
R^3{}_0 =& g^{33}R_{30} = 0, \\
R^3{}_1 =& g^{33}R_{31} = 0, \\
R^3{}_2 =& g^{33}R_{32} = 0, \\
R^3{}_3 =& g^{33}R_{33} = -\frac{1}{r^2\sin^2\theta}R_{33}, \qquad R_{33} = -e^{-\lambda}\sin^2\theta\left\{1 + r\left(\frac{\nu'}{2} - \frac{\lambda'}{2}\right)\right\} + \sin^2\theta.
\end{aligned}
$$

■スカラー曲率 R の計算　以上よりスカラー曲率 R は

$$
\begin{aligned}
R =& g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = \sum_{\mu=0}^{3} g^{\mu\mu}R_{\mu\mu} \\
=& e^{-\lambda}\left(\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'}{r}\right) + e^{-\nu}\left(-\frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{4} - \frac{\dot{\lambda}^2}{4}\right) \quad \Leftarrow \quad g^{00}R_{00} \\
&+ e^{-\lambda}\left(\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4} - \frac{\lambda'}{r}\right) + e^{-\nu}\left(-\frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{4} - \frac{\dot{\lambda}^2}{4}\right) \quad \Leftarrow \quad g^{11}R_{11} \\
&+ e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{2r} - \frac{\lambda'}{2r} + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{1}{r^2} \quad \Leftarrow \quad g^{22}R_{22} \\
&+ e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{2r} - \frac{\lambda'}{2r} + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{1}{r^2} \quad \Leftarrow \quad g^{33}R_{33} \\
=& e^{-\lambda}\left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{2} + 2\frac{\nu'}{r} - 2\frac{\lambda'}{r} + \frac{2}{r^2}\right) + e^{-\nu}\left(-\ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{2} - \frac{\dot{\lambda}^2}{2}\right) - \frac{2}{r^2}
\end{aligned}
$$

と求まる．

■Einstein テンソル　Einstein 方程式の左辺 (Einstein テンソル)

$$R^\mu{}_\nu - \frac{1}{2}\delta^\mu{}_\nu R \equiv G^\mu{}_\nu$$

は $\mu \neq \nu$ に対して $G^\mu{}_\nu = R^\mu{}_\nu$ となる．このうちゼロでない成分は，上記のように $R^0{}_1$ と $R^1{}_0$ がある．これ以外のゼロでない Einstein テンソル $G^\mu{}_\nu$ の成分として，$\mu = \nu$ の成分を計算する．まず，

$$\begin{aligned}
G^0{}_0 =& \cancel{e^{-\lambda}\left(\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4}\right.} \left. + \frac{\nu'}{r}\right) + \cancel{e^{-\nu}\left(-\frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{4} - \frac{\dot{\lambda}^2}{4}\right)} \quad \Leftarrow \quad R^0{}_0 \\
&+ e^{-\lambda}\left(\cancel{-\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu'\lambda'}{4}} - \frac{\nu'}{r} + \frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2}\right) + \cancel{e^{-\nu}\left(\frac{\ddot{\lambda}}{2} - \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{4} + \frac{\dot{\lambda}^2}{4}\right)} + \frac{1}{r^2} \quad \Leftarrow \quad -\frac{1}{2}\delta^0{}_0 R \\
=& - e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r}\right) + \frac{1}{r^2}, \\
G^1{}_1 =& \cancel{e^{-\lambda}\left(\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4}\right.} \left. - \frac{\lambda'}{r}\right) + \cancel{e^{-\nu}\left(-\frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{4} - \frac{\dot{\lambda}^2}{4}\right)} \quad \Leftarrow \quad R^1{}_1 \\
&+ e^{-\lambda}\left(\cancel{-\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu'\lambda'}{4}} + \frac{\lambda'}{r} - \frac{\nu'}{r} - \frac{1}{r^2}\right) + \cancel{e^{-\nu}\left(\frac{\ddot{\lambda}}{2} - \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{4} + \frac{\dot{\lambda}^2}{4}\right)} + \frac{1}{r^2} \quad \Leftarrow \quad -\frac{1}{2}\delta^1{}_1 R \\
=& - e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2}
\end{aligned}$$

である．次に

$$R^2{}_2 = -\frac{1}{r^2}\left[\left\{-1 + r\left(\frac{\lambda'}{2} - \frac{\nu'}{2}\right)\right\}e^{-\lambda} + 1\right] = -\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left[\left\{-1 + r\left(\frac{\lambda'}{2} - \frac{\nu'}{2}\right)\right\}e^{-\lambda}\sin^2\theta + \sin^2\theta\right] = R^3{}_3$$

に注意すると，

$$\begin{aligned}
G^2{}_2 =& G^3{}_3 \\
=& e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{2r} - \frac{\lambda'}{2r} \cancel{+ \frac{1}{r^2}}\right) \cancel{- \frac{1}{r^2}} \quad \Leftarrow \quad R^2{}_2 = R^3{}_3 \\
&+ e^{-\lambda}\left(-\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'^2}{4} \cancel{- \frac{1}{r^2}} + \frac{\lambda'}{r} - \frac{\nu'}{r} + \frac{\nu'\lambda'}{4}\right) + e^{-\nu}\left(\frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}^2}{4} - \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{4}\right) \cancel{+ \frac{1}{r^2}} \quad \Leftarrow \quad -\frac{1}{2}\delta^2{}_2 R = -\frac{1}{2}\delta^3{}_3 R \\
=& -\frac{1}{2}e^{-\lambda}\left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{\nu'\lambda'}{2}\right) + \frac{1}{2}e^{-\nu}\left(\ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{2}\right)
\end{aligned}$$

を得る．

Einstein 方程式，Schwarzschild 解

以上より Einstein 方程式 (95.6):$R^\mu{}_\nu - \frac{1}{2}\delta^\mu{}_\nu R = \frac{8\pi k}{c^4}T^\mu{}_\nu$ は，未知関数 $\lambda(r,t), \nu(r,t)$ に対する式

$$\frac{8\pi k}{c^4}T^1{}_1 = - e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2}, \tag{100.4}$$

$$\frac{8\pi k}{c^4}T^2{}_2 = \frac{8\pi k}{c^4}T^3{}_3 = -\frac{1}{2}e^{-\lambda}\left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{\nu'\lambda'}{2}\right) + \frac{1}{2}e^{-\nu}\left(\ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{2}\right), \tag{100.5}$$

$$\frac{8\pi k}{c^4}T^0{}_0 = -\,e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{\lambda'}{r}\right)+\frac{1}{r^2}, \tag{100.6}$$

$$\frac{8\pi k}{c^4}T^1{}_0 = -\,e^{-\lambda}\frac{\dot{\lambda}}{r} \tag{100.7}$$

になる．真空中，すなわち，場を生ずる質量の外側での中心対称な場を考え $T^\mu{}_\nu = 0$ とおくと，

$$\text{式 (100.4)} \quad \Rightarrow \quad e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r}+\frac{1}{r^2}\right)-\frac{1}{r^2}=0, \tag{100.8}$$

$$\text{式 (100.6)} \quad \Rightarrow \quad e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda'}{r}-\frac{1}{r^2}\right)+\frac{1}{r^2}, \tag{100.9}$$

$$\text{式 (100.7)} \quad \Rightarrow \quad \dot{\lambda}=0 \tag{100.10}$$

が得られる．式 (100.8) と式 (100.9) を辺々足すと，$f(t)$ を時間だけの関数として

$$\lambda'+\nu'=0, \qquad \therefore \lambda+\nu=f(t) \tag{100.11}$$

となる．

ところで $\mathrm{d}s^2$ の表式 (100.2) の形を壊すことなく，時間に $t=f(t')$ という形の任意の変換を施すことができる．これは ν に任意の時間の関数を加えることと同等である．この任意性を利用すると，一般性を失うことなく

$$\lambda+\nu=0$$

とおくことができる．ここで式 (100.10) より λ は時間に依らないから $\nu=-\lambda$ も時間に依らず，真空中の中心対称な重力場は静的な場となることが結論される．

式 (100.9) は

$$1=e^{-\lambda}(1-r\lambda')=(re^{-\lambda})', \qquad \therefore e^{-\lambda}=1-\frac{r_g}{r}$$

と積分される (r_g は積分定数)．重力源となる星の質量を m とすると，重力場が弱いときの式 (87.12):$g_{00}=1+\frac{2\phi}{c^2}$ における重力ポテンシャル ϕ に対して Newton の万有引力の法則 (99.4):$\phi=-\frac{km}{r}$ が満たされるためには $r_g=\frac{2km}{c^2}$ ととれば良い[*1]．定数 r_g は重力半径と呼ばれる．こうして Schwarzschild 解

$$\mathrm{d}s^2=\left(1-\frac{r_g}{r}\right)(c\mathrm{d}t)^2-r^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2)-\frac{\mathrm{d}r^2}{1-\frac{r_g}{r}} \tag{100.14}$$

が得られる ($r>r_g$)．

[*1] ここで $\mathrm{d}s^2$ の表式 (100.2) における極座標 r を，Newton の万有引力の法則 (99.4):$\phi=-\frac{km}{r}$ における r と同一視した．

2　あらかじめ静的な場を仮定した場合

本章では Schwarzschild 解 (100.14):

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)(c\mathrm{d}t)^2 - r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2) - \frac{\mathrm{d}r^2}{1 - \frac{r_g}{r}}$$

を導くにあたって，真空中の中心対称な重力場としてあらかじめ静的な場を考える．すなわち適当な球座標 (ct, r, θ, ϕ) を用いたときの世界間隔の表式 (100.2):

$$\mathrm{d}s^2 = e^{\nu}(c\mathrm{d}t)^2 - r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2) - e^{\lambda}\mathrm{d}r^2$$

において，ν, λ が t に依らないような座標系 $(x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, r, \theta, \phi)$ をとれると仮定する:

$$\nu = \nu(r), \qquad \lambda = \lambda(r).$$

これにより第 1 章の計算は大幅に簡略化される．そこで第 1 章との内容の重複を厭わずに，未知関数 $\nu(r), \lambda(r)$ を真空中の Einstein 方程式 $G^{\mu}{}_{\nu} \equiv R^{\mu}{}_{\nu} - \frac{1}{2}\delta^{\mu}{}_{\nu}R = 0$ から定める計算を以下で行う．その際，以降で明らかになるように，Schwarzschild 解を導くには $G^0{}_0 = 0, G^1{}_1 = 0$ だけ用いれば十分であることにも注意する．

計量テンソル

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} e^{\nu(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{\lambda(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}, \qquad \therefore (g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} e^{-\nu(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-\lambda(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r^2\sin^2\theta} \end{pmatrix}$$

の非対角成分はゼロだから，Christoffel 記号 (86.3):

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2}g^{\alpha\mu}(\partial_\nu g_{\lambda\mu} + \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\lambda})$$

の α, ν, λ が相異なるものはゼロになる．よってゼロでない Christoffel 記号 $\Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda}$ は，対称な添字 ν, λ が等しいものと異なるものに分類すると

$$\text{対称な添字が等しいもの} \qquad \Gamma^{\mu}{}_{\nu\nu} = -\frac{1}{2}g^{\mu\mu}\partial_\mu g_{\nu\nu} \qquad (\mu, \nu\text{について和をとらない}) \tag{3}$$

$$\text{対称な添字が異なるもの} \qquad \Gamma^{\mu}{}_{\nu\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\mu}\partial_\nu g_{\mu\mu} (= \Gamma^{\mu}{}_{\mu\nu}) \qquad (\mu \neq \nu, \mu\text{について和をとらない}) \tag{4}$$

に限られる．以下，r による微分をプライムで表す．

式 (3) の形の Christoffel 記号は以下の 16 個である.

$$
\begin{aligned}
\Gamma^0{}_{00} &= \frac{1}{2} e^{-\nu} \partial_0 e^{\nu} = 0, & \Gamma^0{}_{11} &= \frac{1}{2} e^{-\nu} \partial_0 e^{\lambda} = 0, \\
\Gamma^0{}_{22} &= \frac{1}{2} e^{-\nu} \partial_0 r^2 = 0, & \Gamma^0{}_{33} &= \frac{1}{2} e^{-\nu} \partial_0 (r^2 \sin^2\theta) = 0, \\
\Gamma^1{}_{00} &= \frac{1}{2} (-e^{-\lambda})(-e^{\nu})' = \frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda}, & \Gamma^1{}_{11} &= \frac{1}{2} (-e^{-\lambda})(e^{-\lambda})' = \frac{\lambda'}{2}, \\
\Gamma^1{}_{22} &= \frac{1}{2} (-e^{-\lambda})(-r^2)' = -r e^{-\lambda}, & \Gamma^1{}_{33} &= \frac{1}{2} (-e^{-\lambda})(-r^2 \sin^2\theta)' = -r e^{-\lambda} \sin^2\theta, \\
\Gamma^2{}_{00} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r^2}\right) \partial_\theta e^{\nu} = 0, & \Gamma^2{}_{11} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r^2}\right) \partial_\theta e^{-\lambda} = 0, \\
\Gamma^2{}_{22} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r^2}\right) \partial_\theta (-r^2) = 0, & \Gamma^2{}_{33} &= -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r^2}\right) \partial_\theta (-r^2 \sin^2\theta) = -\sin\theta\cos\theta, \\
\Gamma^3{}_{00} &= -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\right) \partial_\phi e^{\nu} = 0, & \Gamma^3{}_{11} &= -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\right) \partial_\phi (-e^{\lambda}) = 0, \\
\Gamma^3{}_{22} &= -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\right) \partial_\phi (-r^2) = 0, & \Gamma^3{}_{33} &= -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\right) \partial_\phi (-r^2 \sin^2\theta) = 0.
\end{aligned}
$$

式 (4) 左辺の形の Christoffel 記号は以下の 12 個である.

$$
\begin{aligned}
\Gamma^0{}_{10} &= \frac{1}{2} e^{-\nu} \partial_r e^{\nu} = \frac{\nu'}{2}, & \Gamma^0{}_{20} &= \frac{1}{2} e^{-\nu} \partial_\theta e^{\nu} = 0, \\
\Gamma^0{}_{30} &= \frac{1}{2} e^{-\nu} \partial_\phi e^{\nu} = 0, & \Gamma^1{}_{01} &= \frac{1}{2} (-e^{-\lambda}) \partial_0 (-e^{\lambda}) = 0, \\
\Gamma^1{}_{21} &= \frac{1}{2} (-e^{-\lambda}) \partial_\theta (-e^{\lambda}) = 0, & \Gamma^1{}_{31} &= \frac{1}{2} (-e^{-\lambda}) \partial_\phi (-e^{\lambda}) = 0, \\
\Gamma^2{}_{02} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r^2}\right) \partial_\theta (-r^2) = 0, & \Gamma^2{}_{12} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r^2}\right) \partial_r (-r^2) = \frac{1}{r}, \\
\Gamma^2{}_{32} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r^2}\right) \partial_\phi (-r^2) = 0, & \Gamma^3{}_{03} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\right) \partial_0 (-r^2 \sin^2\theta) = 0, \\
\Gamma^3{}_{13} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\right) \partial_r (-r^2 \sin^2\theta) = \frac{1}{r}, & \Gamma^3{}_{23} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\right) \partial_\theta (-r^2 \sin^2\theta) = \frac{1}{\tan\theta}.
\end{aligned}
$$

ここから $G^0{}_0, G^1{}_1$ を求めるのに必要な Ricci テンソル $R_{\mu\nu}$ を定義式

$$
R_{\mu\nu} \equiv R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\rho}, \qquad R^{\lambda}{}_{\mu\nu\rho} \equiv \partial_\nu \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\rho} - \partial_\rho \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} + \Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\nu} \Gamma^{\sigma}{}_{\mu\rho} - \Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\rho} \Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu}
$$

に従って計算すると以下のようになる.

$$
\begin{aligned}
R_{00} =& R^{\mu}{}_{0\mu0} \\
=& \partial_\mu \Gamma^{\mu}{}_{00} - \partial_0 \Gamma^{\mu}{}_{0\mu} + \Gamma^{\mu}{}_{\mu\nu} \Gamma^{\nu}{}_{00} - \Gamma^{\mu}{}_{0\nu} \Gamma^{\nu}{}_{0\mu} \\
=& \partial_1 \Gamma^1{}_{00} - 0 + \Gamma^{\mu}{}_{\mu1} \Gamma^1{}_{00} - \sum \Gamma^{\mu}{}_{0\nu} \Gamma^{\nu}{}_{0\mu} \qquad \left(\sum \text{は } (\mu,\nu) = (0,1), (1,0) \text{ の和}\right) \\
=& \left(\frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda}\right)' + \left(\frac{\nu'}{2} + \frac{\lambda'}{2} + \frac{1}{r} \times 2\right) \frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda} - 2 \times \frac{\nu'}{2} \frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda} \\
=& \left(\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'}{r}\right) e^{\nu-\lambda}, \\
R_{11} =& R^{\mu}{}_{1\mu1} \\
=& \partial_\mu \Gamma^{\mu}{}_{11} - \partial_1 \Gamma^{\mu}{}_{1\mu} + \Gamma^{\mu}{}_{\mu\nu} \Gamma^{\nu}{}_{11} - \Gamma^{\mu}{}_{1\nu} \Gamma^{\nu}{}_{1\mu}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&=\partial_1\Gamma^1{}_{11}-\partial_1\Gamma^\mu{}_{1\mu}+\Gamma^\mu{}_{\mu1}\Gamma^1{}_{11}-\Gamma^\mu{}_{1\mu}\Gamma^\mu{}_{1\mu}\\
&=\cancel{\left(\frac{\lambda'}{2}\right)'}-\left(\frac{\nu'}{2}+\cancel{\frac{\lambda'}{2}+\frac{1}{r}\times 2}\right)'+\left(\frac{\nu'}{2}+\cancel{\frac{\lambda'}{2}}+\frac{1}{r}\times 2\right)\frac{\lambda'}{2}-\left(\frac{\nu'}{2}\right)^2-\cancel{\left(\frac{\lambda'}{2}\right)^2}-\cancel{\left(\frac{1}{r}\right)^2\times 2}\\
&=-\frac{\nu''}{2}+\frac{\lambda'\nu'}{4}+\frac{\lambda'}{r}-\frac{\nu'^2}{4},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{22}=&R^\mu{}_{2\mu2}\\
=&\partial_\mu\Gamma^\mu{}_{22}-\partial_2\Gamma^\mu{}_{2\mu}+\Gamma^\mu{}_{\mu\nu}\Gamma^\nu{}_{22}-\Gamma^\mu{}_{2\nu}\Gamma^\nu{}_{2\mu}\\
=&\partial_1\Gamma^1{}_{22}-\partial_2\Gamma^3{}_{23}+\Gamma^\mu{}_{\mu3}\Gamma^3{}_{22}-\sum\Gamma^\mu{}_{2\nu}\Gamma^\nu{}_{2\mu}\qquad\left(\textstyle\sum\text{ は }(\mu,\nu)=(1,2),(2,1),(3,3)\text{ の和}\right)\\
=&(-re^{-\lambda})'\underline{-\partial_\theta(\cot\theta)}+\left(\frac{\nu'}{2}+\frac{\lambda'}{2}+\cancel{\frac{1}{r}\times 2}\right)(-re^{-\lambda})\cancel{-(-re^{-\lambda})\frac{1}{r}\times 2}\underline{-\cot^2\theta}\\
=&\left\{-1+r\left(\frac{\lambda'}{2}-\frac{\nu'}{2}\right)\right\}e^{-\lambda}\underline{+1},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{33}=&R^\mu{}_{3\mu3}\\
=&\partial_\mu\Gamma^\mu{}_{33}-\partial_3\Gamma^\mu{}_{3\mu}+\Gamma^\mu{}_{\mu\nu}\Gamma^\nu{}_{33}-\Gamma^\mu{}_{3\nu}\Gamma^\nu{}_{3\mu}\\
=&\sum_{\mu=1,2}\partial_\mu\Gamma^\mu{}_{33}-0+(\Gamma^\mu{}_{\mu1}\Gamma^1{}_{33}+\Gamma^3{}_{32}\Gamma^2{}_{33})-\sum\Gamma^\mu{}_{3\nu}\Gamma^\nu{}_{3\mu}\qquad\left(\textstyle\sum\text{ は }(\mu,\nu)=(1,3),(3,1),(2,3),(3,2)\text{ の和}\right)\\
=&(-r\sin^2\theta e^{-\lambda})'\underline{+\partial_\theta(-\sin\theta\cos\theta)}+\left(\frac{\nu'}{2}+\frac{\lambda'}{2}+\cancel{\frac{1}{r}\times 2}\right)(-r\sin^2\theta e^{-\lambda})\\
&\underline{+\cot\theta(-\sin\theta\cos\theta)-(-\sin\theta\cos\theta)\cot\theta\times 2}\cancel{-(-r\sin^2\theta e^{-\lambda})\frac{1}{r}\times 2}\\
=&-\left\{1+r\left(\frac{\lambda'}{2}-\frac{\nu'}{2}\right)\right\}e^{-\lambda}\sin^2\theta\underline{+\sin^2\theta}
\end{aligned}
$$

さらに $R^\mu{}_\nu=g^{\mu\alpha}R_{\alpha\nu}$ やスカラー曲率 $R=g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ において $(g_{\mu\nu})$ の非対角成分がゼロであることに注意すると

$$
\begin{aligned}
R^0{}_0=&g^{00}R_{00}=e^{-\nu}R_{00},\qquad R^1{}_1=g^{11}R_{11}=-e^{-\lambda}R_{11},\\
R^2{}_2=&g^{22}R_{22}=-\frac{1}{r^2}R_{22},\qquad R^3{}_3=g^{33}R_{33}=-\frac{1}{r^2\sin^2\theta}R_{33},\\
R=&e^{-\lambda}\left(\frac{\nu''}{2}+\frac{\nu'^2}{2}-\frac{\nu'\lambda'}{4}+\frac{\nu'}{r}\right)\quad\Leftarrow\quad g^{00}R_{00}\\
&+e^{-\lambda}\left(\frac{\nu''}{2}+\frac{\nu'^2}{4}-\frac{\nu'\lambda'}{4}-\frac{\lambda'}{r}\right)\quad\Leftarrow\quad g^{11}R_{11}\\
&+e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{2r}-\frac{\lambda'}{2r}+\frac{1}{r^2}\right)-\frac{1}{r^2}\quad\Leftarrow\quad g^{22}R_{22}\\
&+e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{2r}-\frac{\lambda'}{2r}+\frac{1}{r^2}\right)-\frac{1}{r^2}\quad\Leftarrow\quad g^{33}R_{33}\\
=&e^{-\lambda}\left(\nu''+\frac{\nu'^2}{2}-\frac{\nu'\lambda'}{2}+2\frac{\nu'}{r}-2\frac{\lambda'}{r}+\frac{2}{r^2}\right)-\frac{2}{r^2}
\end{aligned}
$$

を得るから，Einstein 方程式を書き下すと

$$
0=G^0{}_0=e^{-\lambda}\left(\cancel{\frac{\nu''}{2}+\frac{\nu'^2}{2}-\frac{\nu'\lambda'}{4}+\frac{\nu'}{r}}\right)\quad\Leftarrow\quad R^0{}_0
$$

$$
\begin{aligned}
&+e^{-\lambda}\left(\cancel{-\frac{\nu''}{2}-\frac{\nu'^2}{2}+\frac{\nu'\lambda'}{4}}-\frac{\nu'}{r}+\frac{\lambda'}{r}-\frac{1}{r^2}\right)+\frac{1}{r^2} \quad \Leftarrow \quad -\frac{1}{2}\delta^0{}_0 R \\
&=-e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{\lambda'}{r}\right)+\frac{1}{r^2} \qquad (5)\\
0=G^1{}_1 &=e^{-\lambda}\left(\cancel{\frac{\nu''}{2}-\frac{\nu'\lambda'}{4}-\frac{\lambda'}{r}+\frac{\nu'^2}{4}}\right) \quad \Leftarrow \quad R^1{}_1 \\
&+e^{-\lambda}\left(\cancel{-\frac{\nu''}{2}+\frac{\nu'\lambda'}{4}+\frac{\lambda'}{r}-\frac{\nu'^2}{4}}-\frac{\nu'}{r}-\frac{1}{r^2}\right)+\frac{1}{r^2} \quad \Leftarrow \quad -\frac{1}{2}\delta^1{}_1 R \\
&=-e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2}+\frac{\nu'}{r}\right)+\frac{1}{r^2} \qquad (6)
\end{aligned}
$$

となる．

$$
\text{式 (5)} \quad \Leftrightarrow \quad 1=e^{-\lambda}(1-r\lambda')=(re^{-\lambda})', \qquad \therefore e^{-\lambda}=1-\frac{r_g}{r} \quad (r_g\text{は積分定数}).
$$

さらに式 (5)，式 (6) を辺々引くと

$$
(\lambda+\nu)'=0, \qquad \therefore \lambda+\nu=\mathrm{const}, \qquad \therefore e^{\nu}=\mathrm{const}\times e^{-\lambda}=\mathrm{const}\times\left(1-\frac{r_g}{r}\right)
$$

となる．第 3 式の const に対して $\sqrt{\mathrm{const}}\times t\to t$ と時間の尺度を改めると

$$
e^{\nu(r)}c^2\mathrm{d}t^2=\mathrm{const}\times\left(1-\frac{r_g}{r}\right)c^2\mathrm{d}t^2=\left(1-\frac{r_g}{r}\right)c^2\mathrm{d}t^2
$$

となり，Schwarzschild 解 (100.14):

$$
\mathrm{d}s^2=\left(1-\frac{r_g}{r}\right)(c\mathrm{d}t)^2-r^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2)-\frac{\mathrm{d}r^2}{1-\frac{r_g}{r}}
$$

を得る．