

剛体の運動

本稿の他にも理論物理の各種ノートを以下のページで公開している.

<http://everything-arises-from-the-principle-of-physics.com/>

まえがき

本稿は剛体の運動に関するノートである。

第 1 章では剛体振り子を等価な単振り子に置き換える際の注意点を述べる。

第 2 章では非対称こまの自由な回転を扱う。

- 角速度一定の定常回転は慣性主軸の周りの回転に限られること
- 主慣性モーメントが最大および最小の軸の周りの定常回転は安定であること

が示される。

第 3 章では下端の固定された対称こまの重力場のもとの運動を調べる。こまの自転角速度が十分大きければ、こまの角運動量はこまの自転軸方向に近似的に一致する。そして角運動量の向きは重力のトルクの向きに変化するため、こまは鉛直軸の周りに歳差運動する。より細かく見ると、こまの対称軸の先端はサイクロイドを描くことを述べる。(初期条件として自転しているこまをそっと置いた場合。これもまた自転角速度が十分大きいことに基づく近似的な結果である。)

第 4 章では押し広げた Euler の方程式を用いて、ジャイロコンパスの運動を調べる。

- 定常状態ではコンパスは北を向くこと
- 定常状態は安定であること

が示される。

最後に第 5 章では水平面上を滑らずに転がるコインの運動を扱う。これは非ホロノミックな拘束を課せられた系の問題である(コインが滑らずに転がるという条件は、コインの配位を指定する座標の微分量の間の 1 次式で表される)。図 1 のように、コインが倒れることなく水平面と一定の傾き θ_0 を保ちながら一定の自転角速度 ω で回転し、接点が一定の角速度 Ω で円運動するような定常状態の存在が確かめられる*1。

■剛体の運動に関する説明の仕方と直観 剛体の運動は角運動量とトルクの関係を用いて理解される。剛体の運動を直観に落とし込めないとすれば、それは我々が角運動量とトルクの関係よりも運動量と力の関係から現象を理解することに慣れているからかもしれない。剛体の運動を剛体の各要素に働く力から理解するには、各要素の間に働く力を知る必要がある。しかし剛体近似において各要素間の距離は不変であり、そのような力は拘束力として扱われる。

*1 このような運動をする円盤を Euler の円盤と呼ぶことがある。

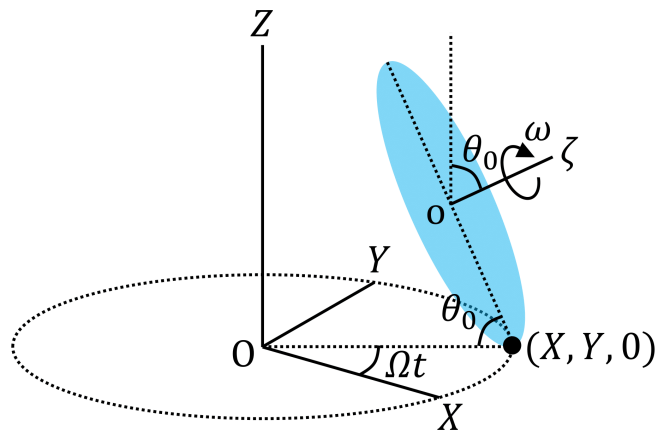


図1 コインの定常的な回転運動

1 剛体振り子と単振り子

図2のように質量線密度 ρ の一様な棒を用いて剛体振り子を作る．棒を長さ $l_1, l_2 (> l_1)$ に内分する位置を支点とする．全質量と支点周りの慣性モーメントはそれぞれ

$$M = \rho(l_2 + l_1), \quad I = \int_{-l_1}^{l_2} \rho x^2 dx = \frac{\rho}{3}(l_2^3 + l_1^3)$$

であり，支点から重心までの距離は

$$l = \frac{l_1 + l_2}{2} - l_1 = \frac{l_2 - l_1}{2}$$

である．よって回転の方程式は

$$I\ddot{\theta} = -Mgl \sin \theta, \quad \therefore \ddot{\theta} = -\frac{3l_2^2 - l_1^2}{2l_2^3 + l_1^3} g \theta. \quad (1)$$

ここから微小振動 (近似的な単振動) の周期を $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ と書いて相当単振り子の長さ L を定義すると，

$$L = \frac{2l_2^3 + l_1^3}{3l_2^2 - l_1^2} \left(= \frac{2l_2^2 - l_2l_1 + l_1^2}{l_2 - l_1} \right) \quad (2)$$

となる [1, p.365, p.400].

他方，一見すると剛体振り子は重心に全質量が集中した単振り子と等価であり，その運動方程式

$$Ml\ddot{\theta} = -Mg \sin \theta \quad (\text{誤り!}) \quad (3)$$

より微小振動の周期は $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ と考えられそうである．しかし，これは正しい時間発展方程式 (1) に矛盾する．このような剛体振り子と (ここで考えている) 単振り子の違いは次の点に起因している．すなわち，いずれもふれ角 θ での位置エネルギー $U(\theta) = Mgl(1 - \cos \theta)$ は共通だが，剛体振り子では最初に持っていた位置エネルギーの一部が重心周りの回転運動のエネルギーに配分されるので，重心の並進運動のエネルギーは，したがって重心の運動は，対応する単振り子のそれとは異なる．

そこでそのような剛体振り子の運動を実現する拘束力として，支点から受ける力 (の θ 方向成分) F_θ を運動方程式 (3) の右辺に付け加え，左辺に式 (1) を代入すると，この力は

$$F_\theta = Mg \frac{(l_2 - l_1)^2}{4(l_2^2 - l_2l_1 + l_1^2)} \sin \theta$$

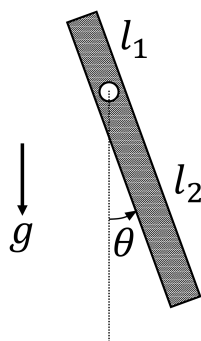


図2 剛体振り子

と表される (直立の瞬間 $\theta = 0$ では $F_\theta = 0$).

■参考 [1, p.365,pp.400-401] 実際的には周期が正確な振り子を製作することに関心が持たれる. 上の結果 (2) によると,

- 棒が一様に微小な伸縮をしても, 長さの変化の 1 次までの近似で周期が変わらないように支点の位置を決めることはできない.
- 支点の位置のずれに関して 1 次までの近似で, 周期が変わらないようにするには,

$$l_2 = (2 + \sqrt{3})l_1$$

を満たす位置に支点をとれば良い.

2 自由な非対称こま

本章は自由な非対称こまの運動を論じた文献 [2, pp.228–229, pp.255–259]

江沢洋, 中村孔一, 山本義隆, 演習詳解 力学 [第2版], 株式会社 日本評論社, 東京

の問題 6-14, 6-15 のノートである.

6-14

重心を通る慣性主軸に関する慣性モーメントが A, B, C で与えられる剛体の自由な回転について, 剛体の (慣性系に対する) 角速度を $\boldsymbol{\omega}$, 慣性主軸を座標軸とする剛体系に関する $\boldsymbol{\omega}$ の成分を $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ とする. ここでは回転のエネルギーを T とすると, エネルギー保存則は

$$\left(\frac{\omega_x}{\sqrt{2T/A}}\right)^2 + \left(\frac{\omega_y}{\sqrt{2T/B}}\right)^2 + \left(\frac{\omega_z}{\sqrt{2T/C}}\right)^2 = 1$$

と書けるので, $\boldsymbol{\omega}$ の先端は上式で定義される Poinsot 楕円体の上を動くことを押さえれば十分である. Poinsot 楕円体は剛体とともに運動する. $\boldsymbol{\omega}$ の先端が Poinsot 楕円体上に描く軌跡をポールホード曲線という.

詳しいまとめ

- 角運動量保存則 $\mathbf{L} = \text{const.}$
- エネルギー保存則 (回転のエネルギー T)

★ $\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega} = 2T = \text{const.}$

→ $\boldsymbol{\omega}$ の先端は角運動量ベクトル \mathbf{L} に垂直な定平面 (不変平面という) 上を動く.

★

$$\left(\frac{\omega_x}{\sqrt{2T/A}}\right)^2 + \left(\frac{\omega_y}{\sqrt{2T/B}}\right)^2 + \left(\frac{\omega_z}{\sqrt{2T/C}}\right)^2 = 1$$

→ $\boldsymbol{\omega}$ の先端は上式で定義される Poinsot 楕円体の上を動く.

$\boldsymbol{\omega}$ の先端が常に Poinsot 楕円体にあるため, 微小時間 Δt の経過に伴う $\boldsymbol{\omega}$ の変化 $\Delta\boldsymbol{\omega}$ は Poinsot 楕円体に接している. そして

$$\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega} = 2T \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L} \cdot \Delta\boldsymbol{\omega} = 0$$

より $\Delta\boldsymbol{\omega}$ は不変平面上にあるから, Poinsot 楕円体は不変平面に接している.

さらに剛体の運動とともに Poinsot 楕円体も運動する. $\boldsymbol{\omega}$ は剛体の瞬間的回転軸なので Poinsot 楕円体の瞬間的回転軸となる. よって楕円体と不変平面の接点に他ならない $\boldsymbol{\omega}$ の先端は瞬間的に静止しており, Poinsot 楕円体は不変平面上を滑らずに転がっていく (図3参照). $\boldsymbol{\omega}$ の先端が

- Poinsot 楕円体上に描く軌跡をポールホード曲線
- 不変平面上に描く軌跡をハーポールホード曲線

という.

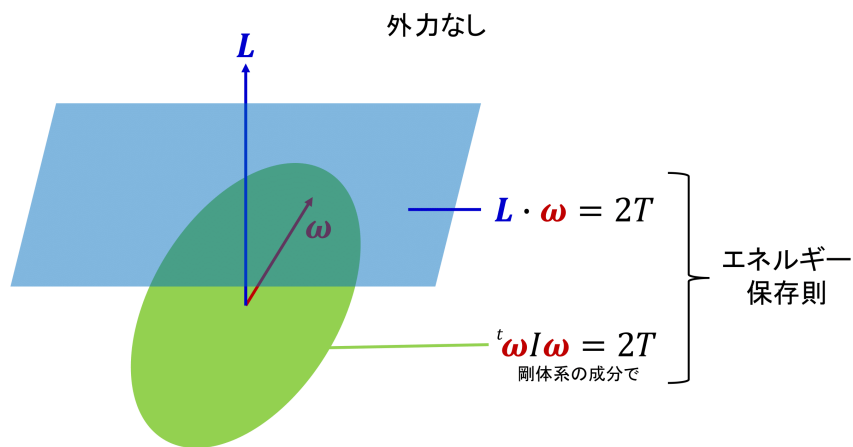


図3 Poinsot の楕円体と不変平面

■慣性楕円体 Poinsot 楕円体を $1/\sqrt{2T}$ 倍に縮めた楕円体を慣性楕円体という。ただしその方程式

$$A\omega_x^2 + B\omega_y^2 + C\omega_z^2 = 1$$

は次元の正しくない式である。これは単位円を考えると、もはや半径が長さの次元を持たないのと同じ事情である。

6-15

慣性主軸を座標軸とする剛体系に関する剛体 (主慣性モーメント I_x, I_y, I_z) の角速度 ω の成分を $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$, 重心周りのトルクの成分を $(\bar{N}_x, \bar{N}_y, \bar{N}_z)$ とする。これらを用いて、角運動量とトルクの関係を表すと、Euler の方程式

$$I_x \dot{\omega}_x + (I_z - I_y)\omega_y\omega_z = \bar{N}_x, \quad \text{etc.}$$

を得る。

慣性主軸 x, y, z に関する慣性モーメントがそれぞれ $A, B, C (A > B > C)$ で与えられる非対称なコマの自由運動について、

- 定常回転 $\dot{\omega} = 0$ は

$$\begin{aligned} \text{Euler の方程式} \quad & (C - B)\omega_y\omega_z = (A - C)\omega_x\omega_z = (B - A)\omega_x\omega_y \\ \rightarrow & \omega_x, \omega_y, \omega_z \text{ のうち 2 つはゼロ} \end{aligned}$$

を満たすので、各主軸の周りの回転に限られる。

- Euler の方程式を用いて定常運動の角速度 $\omega = \omega \hat{x}, \omega \hat{y}, \omega \hat{z}$ からの微小なズレ σ の時間発展を調べると (線形安定性解析),
 - x 軸周りの回転 安定
 - y 軸周りの回転 不安定

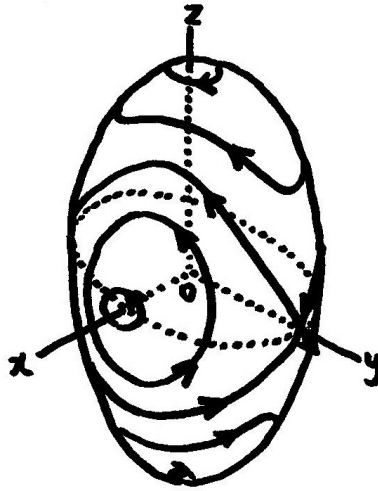


図4 Poincaré の楕円体とポールホード

— z 軸周りの回転 …… 安定
となる.

ポールホードは図4のような Poincaré 楕円体と角運動量一定の面 $A^2\omega_x^2 + B^2\omega_y^2 + C^2\omega_z^2 = L^2$ の交線であり, x 軸, z 軸周りの定常回転の安定性に対応して, x 軸と z 軸の近くで小さな閉軌道を成している. ただし図4では Euler の方程式

$$A\dot{\omega}_x = (B - C)\omega_y\omega_z$$

を考慮して, ポールホード上で ω の先端が進む向きを描き加えてある.

小問(c)の解答(p.257)の訂正

$2T = \frac{A(A-C)}{B-C}a^2$ だから, 10行目の式

$$\omega_z = \sqrt{\frac{A(A-B)}{C(B-C)}}a\sqrt{1-y^2} = \sqrt{\frac{2T}{C}}\sqrt{1-y^2}$$

における第2の等号は誤りである.

自由な対称こまとしての矢の運動

空間に打ち出された矢の運動を, 自由な対称こまの運動として考える. 矢の慣性主軸 (x, y, z 軸) を z 軸が対称軸に一致するようにとり, 各軸に関する主慣性モーメントを $I_1, I_2 (= I_1), I_3$ とする. 非対称こまの場合と同様, 矢の z 軸周りの定常回転は安定であると考えられる. 実際, 角運動量 \mathbf{M} は, 剛体系で見た成分 (M_1, M_2, M_3) を用いて

$$\begin{aligned} \text{エネルギー保存則} \quad & \frac{M_1^2}{I_1} + \frac{M_2^2}{I_1} + \frac{M_3^2}{I_3} = 2E, \\ \text{角運動量保存則} \quad & M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = M^2 \end{aligned}$$

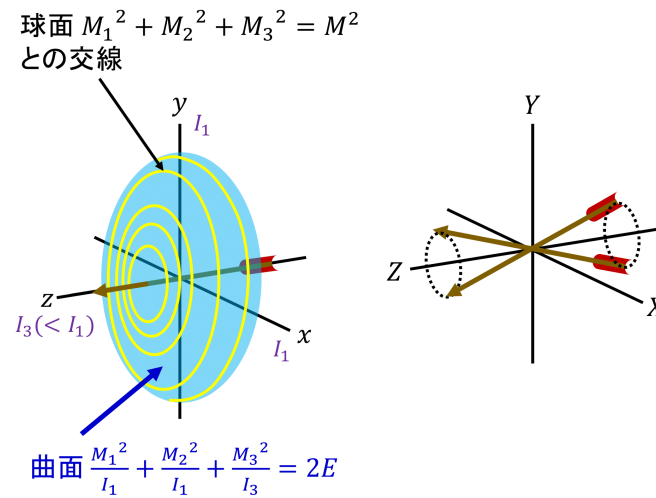


図5 剛体系から見た角運動量 \mathbf{M} の軌跡と、空間固定系から見た矢の歳差運動

で表される曲面の交線上を運動する。そして交線は図5左側のように、 z 軸を囲む小さな閉曲線を作る。これに対応して、角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ (剛体系で見た成分 $(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) = (M_1/I_1, M_2/I_1, M_3/I_3)$) は z 軸の周りに

$$(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) = (A \cos \omega t, A \sin \omega t, \text{const})$$

で表される歳差運動をする [3, pp.145–146].

これは空間固定系から見た矢の運動の安定性をも意味する。と言うのもこれは角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ および矢の方向 (z 軸) の、保存する角運動量ベクトル \mathbf{M} 周りの歳差運動に対応している [3, pp.133–135]. よってこれを空間固定系 (X, Y, Z 軸) の Z 軸に沿って打ち出された、 z 軸まわりに定常回転する矢の摂動を受けた後の運動と見なせば、矢は図5右側のように依然として平均的に Z 軸方向に進むことになるからである。ただし摂動を受けた後も角運動量 \mathbf{M} は Z 軸の向きを保つと仮定した。

3 下端の固定された対称こまの重力場のもとでの運動

こまの運動の定性的な様子

本節は下端の固定された対称こまの重力場のもとでの運動について、文献 [3, pp.140–142]

エリ・デ・ランダウ, イェ・エム・リフシッツ, 2013, ランダウ=リフシッツ理論物理学教程
力学 (増訂 第3版)(広重徹, 水戸巖訳), 東京図書株式会社, 東京

§ 35 問題 1 で論じられている, こまの運動の定性的な様子についてまとめたノートである.

下端の固定された対称こまの重力場のもとでの運動を考える. こまの質量を m , 下端から重心までの距離を l , 主慣性モーメントを A, A, C とする. 静止座標系 (空間固定系) と運動座標系 (剛体系) の原点をともにこまの不動点 O にとり, 静止座標系の Z 軸を鉛直上向きにとる. こまのラグランジアンは

$$L = \frac{A + ml^2}{2}(\dot{\theta} + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{C}{2}(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 - mgl \cos \theta \quad (4)$$

となる (θ, ϕ, ψ は Euler 角). 循環座標 ψ, ϕ に対応した保存量

$$C(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \equiv M_\psi = \text{const}, \quad (5)$$

$$(A' \sin^2 \theta + C \cos^2 \theta)\dot{\phi} + C\dot{\psi} \cos \theta \equiv M_\phi = \text{const} \quad (6)$$

が見出される ($A' \equiv A + ml^2$). これらを用いてエネルギー保存則

$$E = \frac{A + ml^2}{2}(\dot{\theta} + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{C}{2}(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 + mgl \cos \theta = \text{const}$$

から $\dot{\phi}, \dot{\psi}$ を消去すると

$$\begin{aligned} E' &\equiv E - \frac{M_\psi^2}{2C} \\ &= \frac{A'}{2}\dot{\theta}^2 + U_{\text{eff}}(\theta) = \text{const}, \\ U_{\text{eff}}(\theta) &\equiv \frac{(M_\phi - M_\psi \cos \theta)^2}{2A' \sin^2 \theta} + mg \cos \theta \end{aligned}$$

となる. $U_{\text{eff}}(\theta)$ の概形は図 6 のようであり, こまの傾き θ は条件 $E' \geq U_{\text{eff}}(\theta)$ から決まる範囲 $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ を往復する. 式 (5), (6) より

$$\dot{\phi} = \frac{M_\phi - M_\psi \cos \theta}{A' \sin^2 \theta}$$

であり, θ の変化に伴ってこれが符号を変えるか否かに応じて図 7 のような運動が実現される.

ラグランジアン of 式 (4)

ラグランジアン (4) における項 $\frac{ml^2}{2}(\dot{\theta} + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta)$ はこまの並進運動のエネルギーとして得られる. 以下, このことを確かめる. こまの下端を原点とした重心の位置ベクトルを \mathbf{R} とすると, その運動座標系 (剛体系) に関する成分は

$$\mathbf{R} = (X_1, X_2, X_3) = (0, 0, l)$$

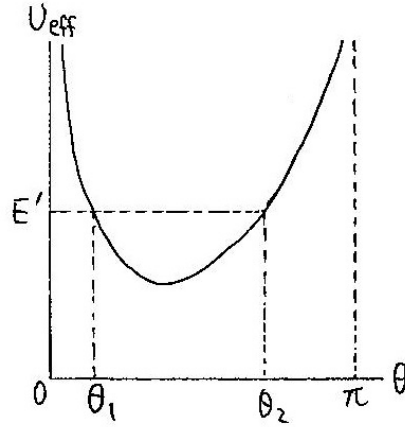


図6 実効ポテンシャル $U_{\text{eff}}(\theta)$ の概形

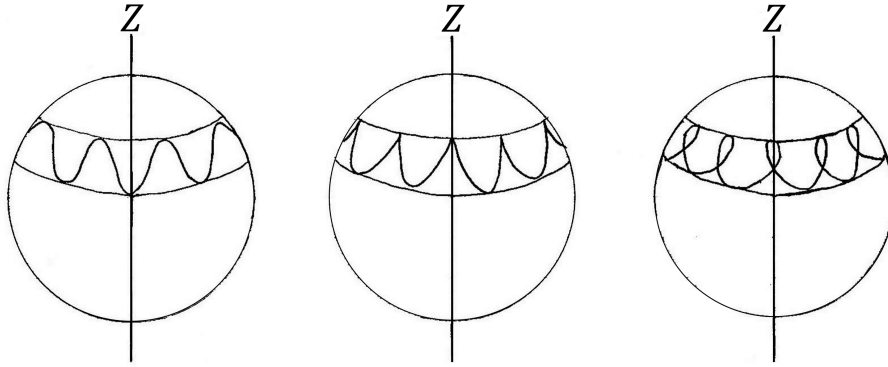


図7 こまの軸がこまの不動点を中心とする球面上に描く軌跡

である。剛体の角運動量 $\mathbf{\Omega}$ の運動座標系 (剛体系) に関する成分を $(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ とすると、こまの並進運動のエネルギーは

$$\begin{aligned} T_{\text{並進}} &= \frac{1}{2} m (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{R})^2 = \frac{1}{2} m \{ \Omega^2 R^2 - (\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{R})^2 \} \\ &= \frac{1}{2} m (l^2 \delta_{ik} - X_i X_k) \Omega_i \Omega_k \end{aligned}$$

と表される。ここで慣性テンソルに類似の量 $m(l^2 \delta_{ik} - X_i X_k)$ の全成分は

$$\begin{pmatrix} l^2 & 0 & 0 \\ 0 & l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

で与えられるから、こまの並進運動のエネルギーは確かに

$$T_{\text{並進}} = \frac{1}{2} m l^2 (\Omega_x^2 + \Omega_y^2) = \frac{1}{2} m l^2 (\dot{\theta} + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta)$$

となる (第2の等号については角速度を Euler 角で表した文献 [3, p.139] 式 (35.1) を参照せよ)。

トロコイドとの類似性

図7における, こまの軸がこまの不動点を中心とする球面上に描く軌跡は, 初期条件に応じて

- 尖点を持たない波形
- つるまき状
- 尖点を持つ波形

の3種類があり, これらはトロコイドと共通の特徴である.

自転角速度が十分大きいときのこまの運動

下端の固定された対称こまの重力場のもとでの運動について, こまを鉛直軸に対して角度 θ_0 だけ傾けてそっと置いたとき, こまが十分大きな自転角速度で回っているという近似の下で, こまの先端はサイクロイドを描くことが文献 [4, pp.138–141]

山本義隆, 中村孔一, 2013, 朝倉物理学大系 1 解析力学 I, 株式会社朝倉書店, 東京

で示されている. 以下ではこれについて計算の補足を行う.

計算の補足

■訂正 $A \rightarrow A' \equiv A + ml^2$ ラグランジアン (2.2.85) では先に論じた並進運動のエネルギー $\frac{ml^2}{2}(\dot{\theta} + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta)$ が抜け落ちている. このため以降に現れる全ての A を $A' \equiv A + ml^2$ で置き換えなければならないことに注意する.

■Routhian の式 (2.2.87) Routhian(2.2.87) を求める計算過程を補足する. 循環座標に共役な一般化運動量を消去して

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} A' \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} \underbrace{(A' \sin^2 \theta + C \cos^2 \theta) \dot{\phi}^2}_{\text{式 (2.2.86a) と同じ形, そのまま残す}} - \frac{1}{2} \underbrace{C(\dot{\psi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\psi} \cos \theta)}_{M_\psi^2 \text{ を作る}} - mgl \cos \theta \\ &= \frac{1}{2} A' \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} \frac{1}{A' \sin^2 \theta + C \cos^2 \theta} (M_\phi - C \cos \theta \dot{\psi})^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{1}{C} M_\psi^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{C} \dot{\phi}^2 \cos^2 \theta - mgl \cos \theta \quad (\because \text{式 (2.2.86b)}) \\ &= \frac{1}{2} A' \dot{\theta}^2 - \frac{M_\psi^2}{2C} - mgl \cos \theta + \frac{1}{2} \frac{1}{C} \dot{\phi}^2 \cos^2 \theta - \frac{1}{2} (A' \sin^2 \theta + C \cos^2 \theta) \dot{\phi}^2 \\ &= \frac{1}{2} A' \dot{\theta}^2 - \frac{(M_\phi - M_\psi \cos \theta)^2}{2A' \sin^2 \theta} - \frac{M_\psi^2}{2C} - mgl \cos \theta : (2.2.87) \end{aligned}$$

と段階的に計算できる.

■ $u = \cos \theta$ に対する式 (2.2.91) θ に対する式 (2.2.89) を $u = \cos \theta$ に対する式 (2.2.91) に書き換えるには, (2.2.89) $\times 2A'(1 - u^2)$ を作って整理すれば良い.

■ a, b, α, β の導入 式 (2.2.92) 直後では (2.2.90) $\div A'$, (2.2.91) $\div A'^2$ に現れる係数を a, b, α, β とおいている.

■ θ_1 の式 (p.140, 1.7) u_1 の式 (p.140, 1.5) は β/b^2 の 2 次以上を無視する近似で

$$\begin{aligned} u_1 &\equiv \cos \theta_0 - \frac{\beta}{b^2} \sin^2 \theta_0 \\ &\simeq \cos \theta_0 \cos \left(\frac{\beta}{b^2} \sin \theta_0 \right) - \sin \theta_0 \left(\frac{\beta}{b^2} \sin \theta_0 \right) \\ &= \cos \left(\theta_0 + \frac{\beta}{b^2} \sin \theta_0 \right) \end{aligned}$$

となるから,

$$\theta_1 = \arccos(u_1) = \theta_0 + \frac{\beta}{b^2} \sin \theta_0$$

(p.140, 1.7) を得る.

■式 (2.2.97) 式 (2.2.96) の 1 つ上の式 $u = \cos \theta_0 - \Delta\theta \sin \theta_0(1 - \cos bt)$ を $u_0 - u = \Delta\theta \sin \theta_0(1 - \cos bt)$ と書き直し, これを式 (2.2.93b) $\Leftrightarrow \dot{\phi} \sin^2 \theta = b(u_0 - u)$ の右辺に代入すると良い. その後 β/b^2 の 2 次以上を無視する近似により

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \frac{b\Delta\theta}{\sin \theta_0} \frac{1 - \cos bt}{1 + 2\Delta\theta \frac{\cos \theta_0}{\sin \theta_0} + O(\Delta\theta^2)} \\ &= \frac{b\Delta\theta}{\sin \theta_0} (1 - \cos bt) \left\{ 1 - \Delta\theta \frac{\cos \theta_0}{\sin \theta_0} + O(\Delta\theta^2) \right\} \\ &\simeq \frac{\beta}{2b} (1 - \cos bt) : (2.2.97) \end{aligned}$$

を得る.

■式 (2.2.99) 式 (2.2.99) の確認は文献 [3, p.143] の 1 番上の式の導出

$$\begin{aligned} \frac{M_3^2 (1 - \cos \theta)^2}{2I_1' \sin^2 \theta} &= \frac{M_3^2}{2I_1'} \left(\frac{\theta^2}{2} + O(\theta^4) \right)^2 \\ &= \frac{M_3^2}{2I_1'} \left(\frac{\theta^2}{2} + O(\theta^3) \right) (1 + O(\theta^2)) = \frac{M_3^2}{8I_1'} \theta^2 + O(\theta^4) \end{aligned}$$

と同じものであり, 記号を

$$M_3 \rightarrow M_\psi = C\Omega, \quad I_1' \rightarrow A'$$

と読み替えれば良い.

4 ジャイロコンパスの示北原理

本章は自由な非対称こまの運動を論じた文献 [2, pp.230–232, pp.266–270]

江沢洋, 中村孔一, 山本義隆, 演習詳解 力学 [第2版], 株式会社 日本評論社, 東京
の問題 6-19, 6-20 のノートである.

6-19 押し広げた Euler の方程式

図 8 のように, 剛体内の任意の点 o' を原点とする任意の回転系 (剛体系) Σ を導入する. 剛体系 $\Sigma(\xi, \eta, \zeta$ 軸) の原点 o' の, 慣性系の原点 O に対する隔たりを $\vec{Oo'} = \mathbf{r}$, 速度を \mathbf{v} とし, 剛体系 Σ は慣性系に対して角速度 $\boldsymbol{\omega}$ で運動するものとする. また

- 質点 m_ν の O から見た位置を \mathbf{r}_ν , o' から見た位置を \mathbf{r}'_ν
- 剛体の重心 (CM) の O から見た位置を \mathbf{R} , 速度を \mathbf{V} , o' から見た位置を \mathbf{R}'

とする (図 8 参照).

運動の法則は原点 o' に関する角運動量, 外力のモーメント

$$\mathbf{L}' = \sum_{\nu} \mathbf{r}'_{\nu} \times m_{\nu} \dot{\mathbf{r}}_{\nu} \quad (\mathbf{r}'_{\nu} : \Sigma \text{系}, \quad m_{\nu} \dot{\mathbf{r}}_{\nu} : \text{慣性系})$$

$$\mathbf{N}' = \sum_{\nu} \mathbf{r}'_{\nu} \times \mathbf{F}_{\nu}$$

に対する押し広げた Euler の方程式

$$\dot{L}'_{\xi} + (o_{\eta} L'_{\zeta} - o_{\zeta} L'_{\eta}) + M(v_{\eta} V_{\zeta} - v_{\zeta} V_{\eta}) = N'_{\xi}, \quad \text{etc.}$$

に書き換えられる (ただし $M \equiv \sum_{\nu} m_{\nu}$).

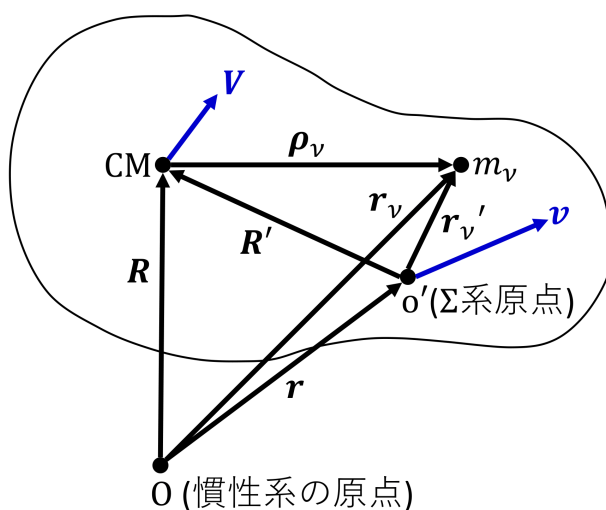


図 8 剛体内の任意の点 o' を原点とする任意の回転系 Σ

6-19 について

(a)

$$\mathbf{L}' = \sum m_\nu \mathbf{r}'_\nu \times \dot{\mathbf{r}}'_\nu + M \mathbf{R}' \times \mathbf{v} \quad (\text{ii})$$

は 6-20(c) で用いる. 6-19(b),(c) では用いない.

解答の式において, 第 2 の等号では

$$\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r} + \mathbf{r}'_\nu, \quad \therefore \dot{\mathbf{r}}_\nu = \mathbf{v} + \dot{\mathbf{r}}'_\nu$$

を用いた. 第 3 の等号では

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{r}'_\nu \times m_\nu \mathbf{v} &= \sum (\mathbf{R}' + \boldsymbol{\rho}_\nu) \times m_\nu \mathbf{v} \\ &= \mathbf{R}' \times \left(\sum m_\nu \right) \mathbf{v} + \left(\sum m_\nu \boldsymbol{\rho}_\nu \right) \times \mathbf{v} \\ &= \mathbf{R}' \times M \mathbf{v} \quad \left(\because \text{重心系の定義 } \sum m_\nu \boldsymbol{\rho}_\nu = 0 \right) \end{aligned}$$

とすれば良い.

(b)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{L}}' &= \frac{d}{dt} \left(\sum_\nu \mathbf{r}'_\nu \times m_\nu \dot{\mathbf{r}}'_\nu \right) \\ &= \sum_\nu \dot{\mathbf{r}}'_\nu \times m_\nu \dot{\mathbf{r}}'_\nu + \sum_\nu \mathbf{r}'_\nu \times \left(\mathbf{F}_\nu + \sum_\mu \cancel{\mathbf{f}_{\mu\nu}} \right) \quad (\text{解答 3 行目の } \dot{\mathbf{r}}'_\nu \text{ はミスプリ}) \\ &= \sum_\nu m_\nu (\dot{\mathbf{R}}' + \dot{\boldsymbol{\rho}}_\nu) \times (\dot{\mathbf{R}}' + \dot{\boldsymbol{\rho}}_\nu) + \mathbf{N}' \quad \left(\because \sum_\nu m_\nu \dot{\boldsymbol{\rho}}_\nu = 0, \quad \dot{\boldsymbol{\rho}}_\nu \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_\nu = 0 \right) \\ &= \left(\sum_\nu m_\nu \right) \dot{\mathbf{R}}' \times \dot{\mathbf{R}}' + \mathbf{N}' \\ &= M(\mathbf{V} - \mathbf{v}) \times \mathbf{V} + \mathbf{N}' \\ \Leftrightarrow \dot{\mathbf{L}}' + M \mathbf{v} \times \mathbf{V} &= \mathbf{N}'. \end{aligned} \quad (\text{iii})$$

(c)

基底ベクトル $\{\mathbf{e}_i\}$ を持つ運動座標系 Σ で見たベクトル \mathbf{A} の成分を A_i と書くと

$$\mathbf{A} = A_i \mathbf{e}_i, \quad \therefore \dot{\mathbf{A}} = \dot{A}_i \mathbf{e}_i + A_i \dot{\mathbf{e}}_i$$

となる. ここで $\dot{\mathbf{e}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i$ であることに注意すると

$$\dot{\mathbf{A}} = \dot{A}_i \mathbf{e}_i + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}$$

を得る. よってベクトル \mathbf{A} の時間変化率 $\dot{\mathbf{A}}$ を運動座標系 Σ で見た成分 $(\dot{\mathbf{A}})_i$ は

$$(\dot{\mathbf{A}})_i = \dot{A}_i + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A})_i$$

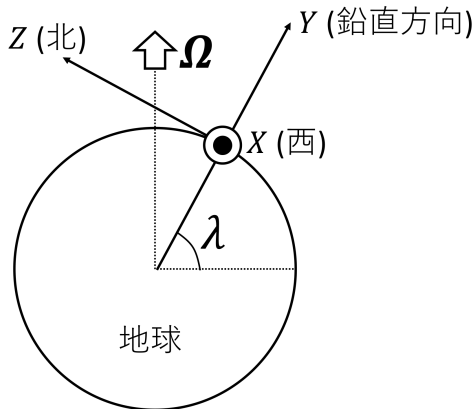


図9 地球固定系 $\Sigma_E(X, Y, Z)$ 軸

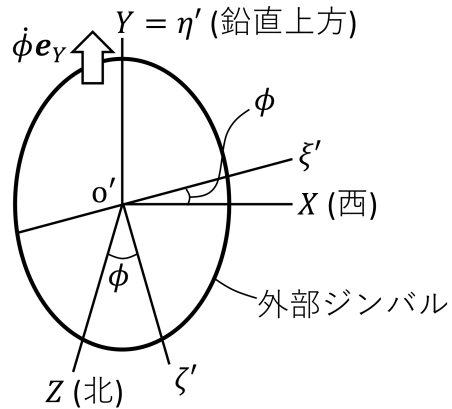


図10 外部ジンバル固定系 $\Sigma'(\xi', \eta', \zeta')$ 軸

と表される。これが解答の式

$$(\dot{L}')_{\xi} = \dot{L}'_{\xi} + (\mathbf{o} \times \mathbf{L}')_{\xi}$$

の意味するところである。

6-20 ジャイロコンパスの示北原理

6-20 全体のまとめ

まず小問 (a) の要約を通してジャイロコンパスの構造についてまとめる。

■(a) 要点

- 慣性系に対し，地球（したがって地球固定系 $\Sigma_E(X, Y, Z)$ 軸）が角速度 Ω で回転する（図9参照）。
- 地球固定系 Σ_E に対し，外部ジンバル（したがって外力ジンバル固定系 $\Sigma'(\xi', \eta', \zeta')$ 軸）が角速度 $\dot{\phi}e_Y$ で回転する（図10参照）。
- 外部ジンバル固定系 Σ' に対し，内部ジンバル（したがって内部ジンバル固定系 $\Sigma(\xi, \eta, \zeta)$ 軸）が角速度 $\dot{\theta}e_{\xi}$ で回転する（図11参照）。
- 内部ジンバル固定系 Σ に対し，回転子が角速度 $\dot{\psi}e_{\zeta}$ で回転する。

角速度は加法的だから，慣性系に対する Σ ，回転子の角速度はそれぞれ

$$\begin{aligned} \mathbf{o} &= \Omega + \dot{\phi}e_Y + \dot{\theta}e_{\xi} \\ \boldsymbol{\omega} &= \Omega + \dot{\phi}e_Y + \dot{\theta}e_{\xi} + \dot{\psi}e_{\zeta} \end{aligned}$$

となる。これらの内部ジンバル固定系 Σ に関する成分を計算した。

■結論 押し広げた Euler の方程式（回転子の中心を原点 o' とする内部ジンバル固定系 Σ に関する L', N' の式）を用い（小問 (a),(b),(c) はその各項の計算），

- 定常状態ではコンパスは北を向くこと
- 定常状態は安定であること

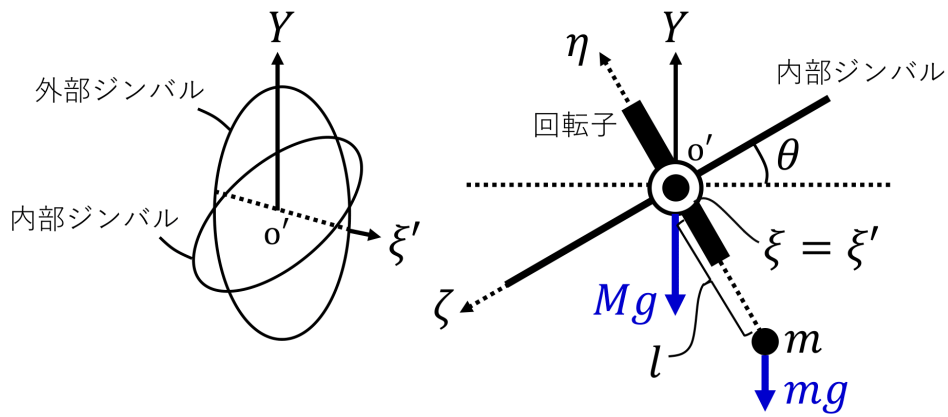


図 11 外部ジンバル固定系 $\Sigma(\xi, \eta, \zeta)$ 軸

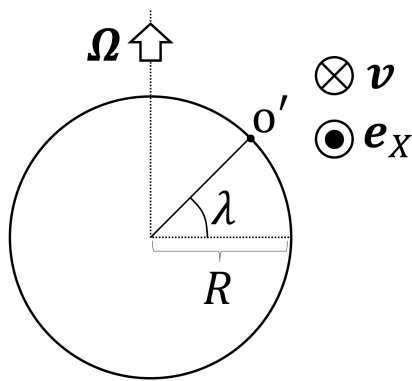


図 12 回転子の中心 o'

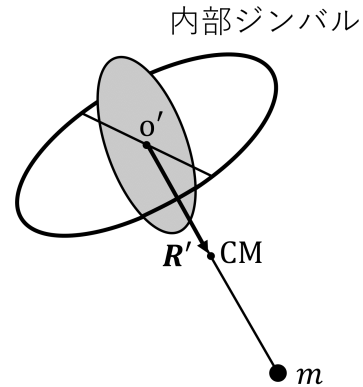


図 13 ジャイロコンパスの重心 (CM)

を示した.

(b) 要点

- 慣性系に対して回転子の中心 o' (地球に固定) は速度

$$\mathbf{v} = (R \cos \lambda) \Omega (-\mathbf{e}_X)$$

を持つ (図 12 参照).

- 慣性系に対してジャイロコンパスの重心 (CM) は速度

$$\mathbf{V} = \mathbf{v} + \mathbf{o} \times \mathbf{R}'$$

を持つ (図 13 参照).

これらの内部ジンバル固定系 Σ に関する成分を計算した.

(c) について

問題 6-19 式 (ii):

$$\mathbf{L}' = \sum m_\nu \mathbf{r}'_\nu \times \dot{\mathbf{r}}'_\nu + M \mathbf{R}' \times \mathbf{v}$$

における右辺第 1 項 (o' まわりの通常の角運動量) は, 回転子と小質量とで角速度が異なるから,

(右辺第 1 項) = (ジャイロコンパス全体の慣性テンソル)(共通の角速度)

とできない.

$$(\text{小質量の慣性テンソル})_{ik} \equiv m(x_i^2 \delta_{ik} - x_i x_k) \rightarrow ml^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i, k = \xi, \eta, \zeta$$

に注意し (最右辺では内部ジンバル固定系に関する成分を行列の形に示した), \mathbf{L} の式において

$$\begin{aligned} (\text{右辺第 1 項}) &= (\text{回転子の角運動量}) + (\text{小質量の角運動量}) \\ &= \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_\xi \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{pmatrix} + ml^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} o_\xi \\ o_\eta \\ o_\zeta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (A + ml^2)o_\xi \\ Ao_\eta \\ C\omega_\zeta + ml^2 o_\zeta \end{pmatrix} \quad (\because \omega_\xi = o_\xi, \omega_\zeta \neq o_\zeta), \\ (\text{右辺第 2 項}) &= (M + m) \begin{pmatrix} 0 \\ -l' \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_\xi \\ v_\eta \\ v_\zeta \end{pmatrix} = (M + m) \begin{pmatrix} -l'v_\zeta \\ 0 \\ l'v_\xi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とする.

$\mathbf{N}' \equiv \sum \mathbf{r}'_\nu \times \mathbf{F}_\nu$ について, 回転子の図 11 より重力 Mg の寄与はなく ($\mathbf{r}'_\nu = 0$), 重力 mg が $mg \sin \theta (-\mathbf{e}_z)$ の寄与をする.

(d) について

■押し広げた Euler の方程式 (8),(9),(10) 押し広げた Euler の方程式 (問題 6-19(iv)):

$$\dot{L}'_\xi + (o_\eta L'_\zeta - o_\zeta L'_\eta) + M(v_\eta V_\zeta - v_\zeta V_\eta) = N'_\xi, \quad (\xi)$$

$$\dot{L}'_\eta + (o_\zeta L'_\xi - o_\xi L'_\zeta) + M(v_\zeta V_\xi - v_\xi V_\zeta) = N'_\eta, \quad (\eta)$$

$$\dot{L}'_\zeta + (o_\xi L'_\eta - o_\eta L'_\xi) + M(v_\xi V_\eta - v_\eta V_\xi) = N'_\zeta \quad (\zeta)$$

において $M \rightarrow M + m$ と置き換え,

$$\text{式 (7)}: \begin{cases} L'_\xi = (A + ml^2)o_\xi - (M + m)l'v_\zeta \\ L'_\eta = Ao_\eta \\ L'_\zeta = C\omega_\zeta + ml^2 o_\zeta + (M + m)l'v_\xi \end{cases},$$

$$\text{式 (6)}: \begin{cases} V_\xi = v_\xi + o_\zeta l' \\ V_\eta = v_\eta \\ V_\zeta = v_\zeta - o_\xi l' \end{cases}, \quad \text{小問 (c)}: \begin{cases} N'_\xi = -mgl \sin \theta \\ N'_\eta = 0 \\ N'_\zeta = 0 \end{cases}$$

を代入すると

$$\text{式 (}\xi\text{)} \Leftrightarrow \text{式 (8)}, \quad \text{式 (}\eta\text{)} \Leftrightarrow \text{式 (9)}, \quad \text{式 (}\zeta\text{)} \Leftrightarrow \text{式 (10)}$$

となる.

■定常状態では「 $|\mathbf{o}| \simeq O(\Omega)$, $|\dot{\mathbf{o}}| = 0$ 」(p.268, 1.5), 式 (12) の 2,3 行上の式 定常状態では「 $|\mathbf{o}| \simeq O(\Omega)$, $|\dot{\mathbf{o}}| = 0$ 」(p.268, 1.5) について, \mathbf{o} の式 (3) より

$$\mathbf{o} = \Omega \mathbf{f}(\lambda, \theta_0, \phi_0), \quad |\mathbf{f}| = O(1)$$

なので $|\mathbf{o}| \simeq O(\Omega)$ である. また $\mathbf{f}(\lambda, \theta_0, \phi_0) = \text{const}$ より $\dot{\mathbf{o}} = 0$ となる.

さらに式 (12) の 2,3 行上の式を得るには, \mathbf{v} の式 (5) より

$$\mathbf{v} = R\Omega \mathbf{g}(\lambda, \theta_0, \phi_0), \quad |\mathbf{g}| = O(1)$$

なので $|\mathbf{v}| \simeq O(\Omega)$ である. また $\mathbf{g}(\lambda, \theta_0, \phi_0) = \text{const}$ より $\dot{\mathbf{v}} = 0$ となることを用いる.

■角速度の大小関係 (11) 式 (11) は

$$\omega_0 \sim 10^3 \text{rad/s}, \quad (11-1)$$

$$\frac{mgl}{C\omega_0} \sim 10^{-3} \text{rad/s}, \quad (11-2)$$

$$\Omega \simeq 7.29 \times 10^{-5} \text{rad/s} \quad (11-3)$$

から成る.

式 (11-1) は回転子の角速度の目安を宣言している.

式 (11-2) は

$$\frac{mgl}{C\omega_0} \sim \frac{mgl}{Ml^2\omega_0} \sim \frac{1}{10} \frac{g}{l\omega_0} \sim \frac{1}{10} \frac{10\text{m/s}}{1\text{m} \times 10^3\text{s}^{-1}}$$

による.

式 (11-3) は

$$\Omega \simeq \frac{2\pi}{24 \times 60 \times 60\text{s}}$$

として得られる.

式 (11-2) \gg 式 (11-3) であることは θ_0 の式 (12) の評価で用いる.

「(11) の程度であるから $\frac{ml^2}{C}\Omega^2 \ll \frac{mlR}{C}\Omega^2 \sim 10^{-3}(\text{rad/s})^2$ 」とあるが, これ自体は式 (11) とは独立に確かめられる:

$$\frac{ml^2\Omega^2/C}{mlR\Omega^2/C} = \frac{l}{R} \sim \frac{1\text{m}}{6400\text{km}} \ll 1,$$

$$\frac{mlR}{C}\Omega^2 \sim \frac{mlR}{Ml^2}\Omega^2 \sim \frac{1}{10} \frac{R}{l}\Omega^2 \sim \frac{1}{10} \frac{6400 \times 10^3\text{m}}{1\text{m}} (7.29 \times 10^{-5}\text{s}^{-1})^2 \sim 10^{-3}\text{s}^{-2}.$$

式 (11) の 3 行下 「 $|t| \lesssim 10^4\text{s}$ に対しては $\omega_\zeta \simeq \omega_0$ (一定)」は次のように考えられる. 今, p.268, 1.7:

$$\dot{\omega}_\zeta = \frac{ml^2O(\Omega^2)}{C} + \frac{mlRO(\Omega^2)}{C}$$

の右辺の $\dot{\omega}_\zeta$ への寄与が主に第 2 項から来るのを見た. はじめ $\omega_\zeta = \omega_0$ であったとして, (第 2 項) $\sim 10^{-3}\text{s}^{-2}$ が ω_ζ に $\omega_0/100 \sim 10^4\text{s}^{-1}$ 程度の変化をもたらすには 10^4s 程度の時間を要する ($10^{-3}\text{s}^{-2} \times 10^4\text{s} = 10^1\text{s}^{-1}$).

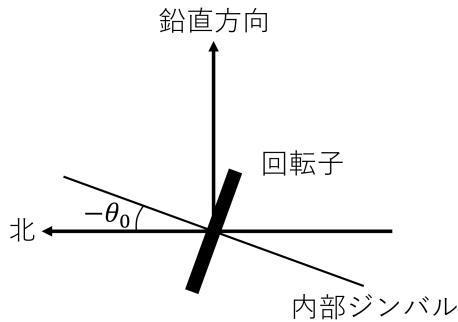


図 14 北半球でのコンパスの向き

■ θ_0 の式 (12) の評価

- 式 (11-2) \gg 式 (11-3) $\Leftrightarrow \varepsilon \equiv \frac{C\omega_0\Omega}{mgl} \ll 1$
- 1 次近似 $\tan^{-1} X \simeq X$

に注意し

$$\begin{aligned} \theta_0 &= \tan^{-1} \left(\frac{\varepsilon \sin \lambda}{1 + \varepsilon \cos \lambda} \right) = -\tan^{-1} \{ \varepsilon \sin \lambda (1 + O(\varepsilon)) \} \\ &= -\varepsilon \sin \lambda + O(\varepsilon^2) = O(\varepsilon) \ll 1 \end{aligned}$$

とすれば良い.

■ 「北半球では少し下を向く」 (d) 解答の最後「北半球では少し下を向く」について,

$$\sin \lambda \geq 0, \quad \theta_0 \leq 0$$

なので, 図 14 のように少し上を向くと考えられる.

(e) 定常状態の安定性

押し広げた Euler の方程式 (の ξ, η 成分) において定常状態からのずれ θ_1, ϕ_1 の 2 次以上の微小量を捨てると,

- $\ddot{\theta}_1, \ddot{\phi}_1$ を無視
 - θ_1, ϕ_1 は長い周期 T_L の振動
 - (ここから $\ddot{\theta}_1, \ddot{\phi}_1$ を無視したことが正当化される)
 - \Leftrightarrow 定常状態は安定
- $\ddot{\theta}_1, \ddot{\phi}_1$ を考慮, 時間依存性 $\theta_1, \phi_1 \sim e^{i\nu' t}$ を仮定
 - $\nu' \sim \omega_0$ の速い振動
 - ← 実は振幅が小さい

となる.

(e) について

■ 「 $\Omega \sin \theta_0 \theta_1 \dots$ は $\Omega^2 \theta_1$ の程度」 (p.269, 1.1,2) これは式 (12)1 行下より $\sin \theta_0 \simeq \theta_0 = O(\Omega)$ となるからである.

■ p.269, 1.6 第 1 式 押し広げた Euler の方程式 (8) に

$$\begin{aligned} (A + ml^2)\ddot{\theta}_1 &\simeq (A + ml^2)\ddot{\theta}_1, \\ -ml\dot{v}_\zeta &\simeq 0, \\ C\omega_\eta\omega_\zeta &\simeq C\omega_0\{\dot{\phi}_1 \cos \theta_0 + \Omega(\sin \lambda \cos \theta_0 + \cos \lambda \sin \theta_0 + \theta_1 \cos \lambda \cos \theta_0)\} \quad (\omega_\zeta \simeq \omega_0 \text{とした}) \\ &\simeq C\omega_0\dot{\phi}_1 \cos \theta_0 + \Omega(\sin \lambda \cos \theta_0 + \theta_1 \cos \lambda \cos \theta_0) \quad (\because \Omega \sin \theta_0 = O(\Omega^2)), \\ o_\eta o_\zeta, v_\xi o_\eta, v_\eta o_\xi &\simeq 0, \\ -mgl \sin \theta_0 &\simeq -mgl(\sin \theta_0 + \theta_1 \cos \theta_0) \end{aligned}$$

を代入すると

$$\begin{aligned} &(A + ml^2)\ddot{\theta}_1 + \theta_1(C\omega_0\Omega \cos \lambda \cos \theta_0) \\ &+ \dot{\phi}_1 C\omega_0 \cos \theta_0 + (C\omega_0\Omega \sin \lambda \cos \theta_0 + mgl \sin \theta_0) = 0, \quad (*) \\ (\text{定数項}) &= C\omega_0 \cos \theta_0 \left(\Omega \sin \lambda + \frac{mgl}{C\omega_0} \tan \theta_0 \right) \\ &\simeq C\omega_0 \cos \theta_0 (\Omega \sin \lambda - \Omega \sin \lambda) = 0 \end{aligned}$$

なので $\ddot{\theta}_1$ を無視すると p.269, 1.6 第 1 式になる.

■ p.269, 1.6 第 2 式 押し広げた Euler の方程式 (9) に

$$\begin{aligned} A\dot{o}_\eta &\simeq A(\ddot{\phi}_1 \cos \theta_0 + \Omega\dot{\theta}_1 \cos \lambda \cos \theta_0), \\ A o_\zeta o_\xi &\simeq 0, \\ -C o_\zeta o_\xi &\simeq -C\omega_0(\dot{\theta}_1 - \Omega\phi_1 \cos \lambda) \quad (\omega_\zeta \simeq \omega_0) \end{aligned}$$

を代入すると

$$A \cos \theta_0 \ddot{\phi}_1 + (\Omega \cos \lambda \cos \theta_0 - C\omega_0)\dot{\theta}_1 + C\omega_0\Omega \cos \lambda \phi_1 = 0 \quad (**)$$

となるので, $\ddot{\phi}_1$ を無視し

$$\frac{C\omega_0\Omega \cos \lambda}{C\omega_0 - \Omega \cos \lambda \cos \theta_0} = \Omega \cos \lambda + O(\Omega^2)$$

を用いると p.269, 1.6 第 2 式になる.

■ 長い周期 (15) の評価 長い周期 (15) を評価すると

$$T_L \sim \left(\frac{mgl}{C\omega_0} \right)^{-1/2} \Omega^{-1/2} \sim (10^{-3} \text{s}^{-1})^{-1/2} \times (7 \times 10^{-5} \text{s}^{-1})^{-1/2} \sim 10^3 \text{s}$$

となる.

■p.269, 1.13,14 の式 式 (*) 左辺第 2 項は $\theta_1\Omega$ に比例する項を捨てなければ

$$\begin{aligned} & (mgl \cos \theta_0 + C\omega_0\Omega \cos \lambda \cos \theta_0)\theta_1 \\ & \simeq (mgl + C\omega_0\Omega \cos \lambda)\theta_1 \quad (\cos \theta_0 \simeq 1) \\ & = \frac{C\omega_0}{\Omega \cos \lambda} \times \frac{mgl\Omega}{C\omega_0} \left(1 + \frac{C\omega_0\Omega}{mgl} \cos \lambda \right) \cos \lambda \\ & = \frac{C\omega_0^2 \nu^2}{\Omega \cos \lambda} \end{aligned}$$

とまとめられ, p.269, 1.13 の式を得る.

一方, 式 (**) 左辺第 2 項では $\dot{\theta}_1\Omega$ に比例する項を捨てて p.269, 1.14 の式を得る.

■特性方程式 (p.269, 1.16) $\theta_1 \equiv \alpha e^{i\nu t}, \phi_1 \equiv \beta e^{i\nu t}$ を p.269, 1.13,14 の式に代入すると

$$\begin{pmatrix} -A'\nu^2 + \frac{C\omega_0}{\Omega \cos \lambda} \nu^2 & iC\omega_0\nu' \\ -iC\omega_0\nu' & -A\nu'^2 + C\Omega\omega_0 \cos \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる. $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ の条件が 1.16 の特性方程式である.

$$\begin{aligned} (\nu'^2 \text{の係数}) &= - \left\{ (A'C \cos \lambda)\Omega\omega_0 + \frac{AC}{\cos \lambda} \frac{\nu^2\omega_0}{\Omega} + C^2\omega_0^2 \right\}, \\ & \frac{\nu^2\omega_0}{\Omega} \text{は } \Omega\omega_0 \text{の } (\nu/\Omega)^2 \sim 10^4 \text{倍,} \\ & \omega_0^2 \text{は } \Omega\omega_0 \text{の } (\omega_0/\Omega)^2 \sim 10^{16} \text{倍} \end{aligned}$$

だから「 $\Omega\omega_0$ に比例する項 (を) 無視」(p.269, 1.19) して良い.

■固有振動数 ν の式 (16) $C\omega_0 + \frac{A\nu^2}{\Omega \cos \lambda}$ を (\dots) と略記し, ν'^2 の式 (1.20) で $O(\nu^4)$ を捨てることにすると,

$$\begin{aligned} 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4A'A\nu^2}{(\dots)^2}} &\simeq 1 \pm \left(1 - \frac{1}{2} \frac{4A'A\nu^2}{(\dots)^2} \right) = \begin{cases} 2 - \frac{1}{2} \frac{4A'A}{(\dots)^2} \nu^2 \\ \frac{1}{2} \frac{4A'A}{(\dots)^2} \nu^2 \end{cases}, \\ \therefore \nu'^2 &\simeq \begin{cases} \frac{(C\omega_0)^2}{A'A} (\dots) - \frac{C\omega_0}{(\dots)} \nu^2 \\ \frac{C\omega_0}{(\dots)} \nu^2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{(C\omega_0)^2}{A'A} + \left(\frac{C\omega_0}{A'\Omega \cos \lambda} - 1 \right) \nu^2 + O(\nu^4) \\ \nu^2 (1 + O(\nu^2)) \end{cases} \\ &\simeq \begin{cases} \frac{(C\omega_0)^2}{A'A} & (\because \omega_0 \gg \nu) \\ \nu^2 \end{cases} \end{aligned}$$

となる.

5 平面上を転がるコインの運動

本章は文献 [4, pp.153–163]

山本義隆, 中村孔一, 2013, 朝倉物理学大系 1 解析力学 I, 株式会社朝倉書店, 東京

における, 平面上を転がるコインの運動に関するノートである. 第 5.1 節と第 5.2 節でコインの運動に関する議論が一通り終了する. コインの運動は非ホロノミックな拘束に支配されている. 関連事項として, ホロノミックな拘束についてそれ以降にまとめてある.

5.1 微分量の 1 次式で与えられる非ホロノミックな拘束に対する一般論

2.5.3 非ホロノミックな拘束 (前半)

$x^k (k = 1, \dots, N)$ を系の配位を表す任意の座標とし, それらをまとめて $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^N)$ と書く. 系のポテンシャルは \mathbf{x} の関数 $U(\mathbf{x})$ として, 運動エネルギーは $\dot{\mathbf{x}}$ の関数として $T(\dot{\mathbf{x}})$ 表される. これに対して

$$L^0(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = T(\dot{\mathbf{x}}) - U(\mathbf{x})$$

を定義する.

さて, 非ホロノミックな拘束 ($f^\mu(\mathbf{x}, t) = 0$ という形に表せない拘束) として

$$a^\mu_k dx^k + a^\mu_0 dt = 0 \quad (\mu = 1, \dots, p) \quad (7)$$

という形の条件を考えると

$$\begin{aligned} & \text{仮想変位 (dt = 0) に対し } a^\mu_k \delta x^k = 0 \\ \rightarrow & \frac{d}{dt} \frac{\partial L^0}{\partial \dot{x}^k} - \frac{\partial L^0}{\partial x^k} = \lambda_\mu a^\mu_k. \end{aligned}$$

が得られる [3, pp.156–157].

2.5.3(前半) について

■「積分不可能」 「これが積分不可能」(式 (2.5.19) の 1 行下) とは $a^\mu_k dx^k + a^\mu_0 dt$ がある $f^\mu(\mathbf{x}, t)$ の全微分とならないということである.

■接点がすべらずに転がる場合 「たとえ滑らかな拘束でなくとも, ……たとえば, 摩擦力があっても接点がすべらずに転がる場合には…… $F'_k = \lambda_\mu a^\mu_k$ ……で与えられる」(p.158) について, 図 15 に示した平面上を転がる円筒の位置は一般化座標 ϕ, x で指定され, 拘束条件は $dx - a d\phi$ となる. 拘束力の ϕ 成分はトルクを与えると考えられ (例 2.5.1 参照), $\mathbf{F}' \equiv (F_x, F_\phi) = (-F', F'a)$ だから $\delta \mathbf{x} \equiv (\delta x, \delta \phi)$ との直交条件

$$\mathbf{F}' \cdot \delta \mathbf{x} = -F'(\delta x - a \delta \phi) = 0$$

が得られる. これは図 16 のように配位空間内で \mathbf{F}' と $\delta \mathbf{x}$ が直交することを意味しており, \mathbf{F}' が配位空間に直交するわけではないから, 拘束は滑らかでないと考えられる.

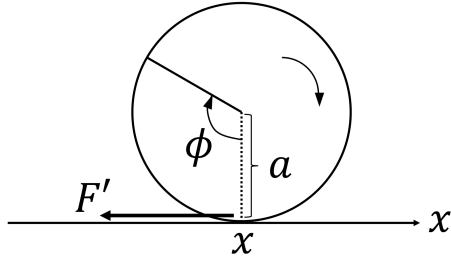


図 15 平面上を転がる円筒

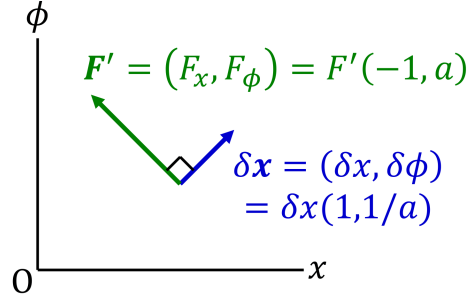


図 16 配位空間内の拘束力 F'

5.2 平面上を転がるコインの運動 (例 2.5.2)

摩擦のある水平面上を滑らずに転がるコイン (半径 a) の運動を考える. XY 平面を水平面とするような空間固定系 (X, Y, Z) 軸をとり, コインと水平面の接点の座標を $(X, Y, 0)$ とする. またコインの重心 o を通りコインの面内にある水平な ξ 軸, コインの面内で ξ 軸と 90° の角を成す η 軸, 重心 o を通りコインに垂直な ζ 軸を持つ剛体系に対して Euler 角 ϕ, θ, ψ を導入する (図 17 参照). 今の場合, コインの配位を決める座標 $\{X^k\}$ は

$$X, Y, \phi, \theta, \psi$$

である. コインが滑らずに転がる条件は拘束条件

$$\dot{X} + a \cos \phi \dot{\psi} = 0, \quad \dot{Y} + a \sin \phi \dot{\psi} = 0$$

として表される. 座標 $\{X^k\}$ に対する方程式 (10) と拘束条件から,

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_0, & \phi &= \Omega t + \phi_0, & \psi &= \omega t + \psi_0, \\ X &= X_0 - \frac{\omega}{\Omega} a \sin(\Omega t + \phi_0), & Y &= Y_0 + \frac{\omega}{\Omega} a \cos(\Omega t + \phi_0) \end{aligned}$$

という定常解が見出される. これは一般にコインが水平面と一定の傾き θ_0 を保ちながら一定の自転角速度 ω で回転し, 接点が一定の角速度 Ω で円運動する運動を表す (図 18 参照).

例 2.5.2 について

図 17 の青色で示した部分より重心の座標の式 (2.5.37) が, 緑色で示した部分より拘束条件 (2.5.41) が分かる.

あらかじめ式 (2.5.50):

$$\dot{\theta} = 0, \quad \dot{\phi} = \Omega(\text{定数}), \quad \dot{\psi} = \omega(\text{定数})$$

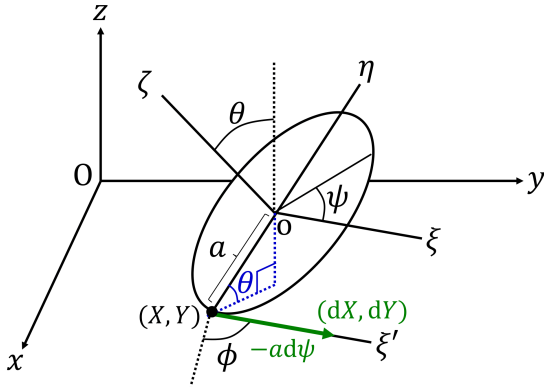


図 17 平面上を転がるコイン

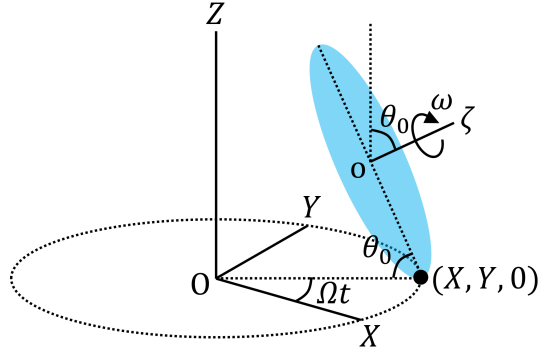


図 18 コインの定常的な回転運動 (図 1 の再掲)

の定常解を仮定して計算を簡略化すると,

$$\text{式 (2.5.38)} \quad \rightarrow \quad (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = (\dot{X} - a\Omega \cos \theta \cos \phi, \dot{Y} - a\Omega \cos \theta \sin \phi, 0),$$

$$\text{式 (2.5.39)} \quad \rightarrow \quad (\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta) = (0, \Omega \sin \theta, \omega + \Omega \cos \theta),$$

$$\begin{aligned} \text{式 (2.5.40)} \quad \rightarrow \quad L^0 &= \frac{m}{2} \{ \dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + (a\Omega)^2 \cos^2 \theta \} - ma\Omega \cos \theta (\cos \phi \dot{X} + \sin \phi \dot{Y}) \\ &\quad + \frac{1}{2} A (\Omega \sin \theta)^2 + \frac{1}{2} C (\omega + \Omega \cos \theta)^2 - mga \sin \theta \end{aligned}$$

となる. Lagrange 方程式 (2.5.42-46) は

$$\mathcal{E}_X[L^0] = m\ddot{X} + ma\Omega^2 \cos \theta \sin \phi = \lambda_1, \quad (42)$$

$$\mathcal{E}_Y[L^0] = m\ddot{Y} - ma\Omega^2 \cos \theta \cos \phi = \lambda_2, \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\theta[L^0] &= ma \sin \theta \frac{d}{dt} (\sin \phi \dot{X} - \cos \phi \dot{Y}) + ma^2 \Omega^2 \sin \theta \cos \theta - ma \sin \theta \Omega (\cos \phi \dot{X} + \sin \phi \dot{Y}) \\ &\quad - A\Omega^2 \sin \theta \cos \theta + C(\omega + \Omega \cos \theta) \sin \theta \Omega + mga \cos \theta = 0, \end{aligned} \quad (44)$$

$$\mathcal{E}_\psi[L^0] = 0 = \lambda_1 a \cos \phi + \lambda_2 a \sin \phi, \quad (45)$$

$$\mathcal{E}_\phi[L^0] = -ma \cos \phi (\cos \phi \ddot{X} + \sin \phi \ddot{Y}) = 0 \quad (46)$$

となる. 上記の簡略化した L^0 の式からは $\frac{d}{dt} \frac{\partial L^0}{\partial \theta}$ の項が現れない. しかし拘束条件によりこの項は消える. 式 (42),(43),(44),(46) に拘束条件を代入し

$$ma\Omega \sin \phi (\omega + \Omega \cos \theta) = \lambda_1, \quad (42')$$

$$-ma\Omega \cos \phi (\omega + \Omega \cos \theta) = \lambda_2, \quad (43')$$

$$(ma^2 + C) \sin \theta \Omega (\omega + \Omega \cos \theta) - A\Omega^2 \sin \theta \cos \theta = -mga \cos \theta, \quad (44')$$

$$0 = 0 \quad (\text{自明な式}) \quad (46')$$

を得る. 式 (42'), (43') を式 (45) に代入して λ_1, λ_2 を消去すると自明な式 $0 = 0$ になる. 残った式 (44') は式 (2.5.47) に定常条件 (2.5.50) を代入したものになっている.

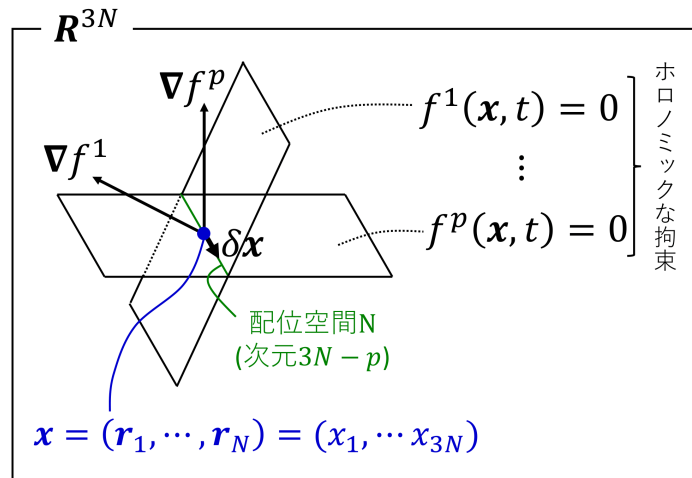


図 19 ホロノミックな拘束

2.5 拘束条件と拘束力

N 個の質点の系を考え、 α 番目の質点の位置を \mathbf{r}_α で表し、各質点の位置を $\mathbf{x} = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ とまとめて書く。質点が p 個のホロノミックな拘束条件

$$f^\mu(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (\mu = 1, \dots, p)$$

に支配されているとき、系の配位を表す点 \mathbf{x} は $n = 3N - p$ 次元の配位空間 N 上を運動する (図 19 参照)。

滑らかな拘束 (拘束力 \mathbf{F}' が N に直交するような拘束のこと) を考えると、 N 上の仮想変位 $\delta\mathbf{x}$ に対して

$$\begin{aligned} \mathbf{F}' &= (F'_1, \dots, F'_N) \perp \delta\mathbf{x} \\ \Rightarrow \mathbf{F}' &= \lambda_\mu \nabla f^\mu \\ \Rightarrow \mathbf{F}' &\text{は仮想ポテンシャル } U' \equiv -\lambda_\mu f^\mu \text{ から導かれる。} \end{aligned}$$

2.5.2 拘束系のラグランジュ方程式

未知の量は

- $\mathbf{x}(t)$ の $3N$ 個の成分
- \mathbf{F}' を決める p 個の λ_μ

であり、これらは

- 運動方程式

$$\begin{aligned} m_\alpha \ddot{\mathbf{r}}_\alpha &= -\nabla_\alpha U(\mathbf{x}) + \underbrace{\lambda_\mu \nabla_\alpha f^\mu(\mathbf{x}, t)}_{\text{拘束力}} \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L^0}{\partial \dot{x}^k} - \frac{\partial L^0}{\partial x^k} - \lambda_\mu \frac{\partial f^\mu}{\partial x^k} &= 0, \quad (k = 1, \dots, 3N) \end{aligned} \quad (8)$$

$$(L^0(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \equiv T(\dot{\mathbf{x}}) - U(\mathbf{x}), \quad T(\dot{\mathbf{x}}) : \text{運動エネルギー}, \quad U(\mathbf{x}) : \text{ポテンシャル})$$

● 拘束条件

$$f^\mu(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (\mu = 1, \dots, p)$$

から求まる.

式 (8) と拘束条件 $f^\mu(\mathbf{x}, t) = 0$ は $\{x^k, \lambda_\mu\}$ を一般化座標, $\bar{L}^0 \equiv L^0 - U'$ をラグランジアンと見た $3N + p$ 個の Lagrange 方程式として得られる.

なお式 (8) と拘束条件 $f^\mu(\mathbf{x}, t) = 0$ は $n = 3N - p$ 個の Lagrange 方程式と同等であることが確かめられる. すなわち n 個の一般化座標 $q = (q^1, \dots, q^n)$ を用いて系の配位を $\mathbf{x} = \mathbf{x}(q, t)$ とパラメトライズし, L^0 を q, \dot{q}, t の関数と見なしたもの

$$L(q, \dot{q}, t) = L^0 \left(\mathbf{x} = \mathbf{x}(q, t), \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right)$$

をラグランジアンと定義すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L^0}{\partial \dot{x}^k} - \frac{\partial L^0}{\partial x^k} - \lambda_\mu \frac{\partial f^\mu}{\partial x^k} &= 0, \quad \text{拘束条件 } f^\mu(\mathbf{x}, t) = 0 \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} &= 0 \quad (i = 1, \dots, n). \end{aligned}$$

■導出 ラグランジアン

$$L(q, \dot{q}, t) = L^0 \left(\mathbf{x} = \mathbf{x}(q, t), \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right)$$

に対して Lagrange 方程式が成り立つから

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{x}^k}{\partial \dot{q}^i} \frac{\partial L^0}{\partial \dot{x}^k} \right) - \left(\frac{\partial x^k}{\partial q^i} \frac{\partial L^0}{\partial x^k} + \frac{\partial \dot{x}^k}{\partial q^i} \frac{\partial L^0}{\partial \dot{x}^k} \right) \\ &= \frac{\partial x^k}{\partial q^i} \frac{d}{dt} \frac{\partial L^0}{\partial \dot{x}^k} + \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial x^k}{\partial q^i} \right) \frac{\partial L^0}{\partial \dot{x}^k} - \left(\frac{\partial x^k}{\partial q^i} \frac{\partial L^0}{\partial x^k} + \frac{\partial \dot{x}^k}{\partial q^i} \frac{\partial L^0}{\partial \dot{x}^k} \right) \\ &\quad \left(\because \dot{x}^k = \frac{\partial x^k}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial x^k}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \dot{x}^k}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial x^k}{\partial q^i} \right) \\ &= \frac{\partial x^k}{\partial q^i} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L^0}{\partial \dot{x}^k} - \frac{\partial L^0}{\partial x^k} \right) \end{aligned} \tag{9}$$

となる.

ここで仮想変位, すなわち拘束条件 $f^\mu(\mathbf{x}, t) = 0, \mathbf{x} = \mathbf{x}(q, t)$ を破らない同時刻の変位 $\delta x^k = \frac{\partial x^k}{\partial q^i} \delta q^i$ を考えると,

$$0 = \frac{\partial f^\mu}{\partial x^k} \delta x^k = \frac{\partial f^\mu}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial q^i} \delta q^i$$

となる. これは任意の δq^i に対して成り立つから $\frac{\partial f^\mu}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial q^i} = 0$ である. そこで $\{\lambda_\mu\}$ を定数としてその 1 次結合 $-\lambda_\mu \frac{\partial f^\mu}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial q^i} (= 0)$ を上式 (9) の最右辺に加えると

$$\frac{\partial x^k}{\partial q^i} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L^0}{\partial \dot{x}^k} - \frac{\partial L^0}{\partial x^k} - \lambda_\mu \frac{\partial f^\mu}{\partial x^k} \right) = 0$$

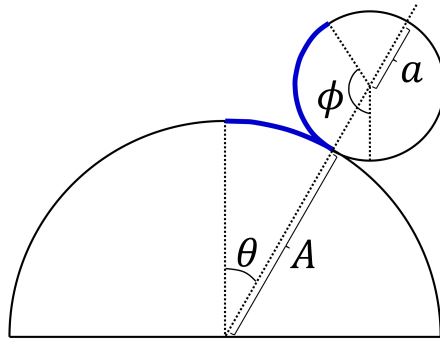


図 20 円筒上を転がる円筒

となるので

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^0}{\partial \dot{x}^k} - \frac{\partial L^0}{\partial x^k} = \lambda_\mu \frac{\partial f^\mu}{\partial x^k} \quad (k = 1, \dots, N) \quad (10)$$

が得られる.

未知の量は $3N$ 個の座標 x^k と p 個の定数 λ_μ であり, これらは $3N$ 個の方程式 (10) と p 個の拘束条件 (7) とから決定されることになる.

例 2.5.1 円筒上を転がる円筒

図 20 のように固定円筒 (半径 A) の上を可動円筒 (半径 a , 質量 m , 中心軸まわりの慣性モーメント $I = ma^2/2$) が, 軸を水平に保って転がるとする. 図 20 のように角度 θ, ϕ を導入し, 可動円筒の中心の回転半径を r とおく.

このとき拘束条件は

$$\mu = 1: f(r) \equiv r - (A + a) = 0, \quad (11)$$

$$\mu = 1: (A + a)\dot{\theta} - a\dot{\phi} = 0 \quad (12)$$

であり, 式 (11) から r が決定される.

式 (12) および Lagrange 方程式

$$\mathcal{E}_r[L^0] = \lambda_1, \quad \mathcal{E}_\theta[L^0] = \lambda_2(A + a), \quad \mathcal{E}_\phi[L^0] = -\lambda_2 a,$$

$$\mathcal{E}_q[L^0] \equiv \frac{d}{dt} \frac{\partial L^0}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L^0}{\partial q}$$

から $(\theta, \phi), (\lambda_1, \lambda_2)$ が決定される.

- θ が増大し $\cos \theta = 4/7$ に達すると 2 つの円筒は離れること
- 摩擦力は $\frac{1}{3}mg \sin \theta$ であること

が結論される.

例 2.5.1 について

- 拘束条件 (2.5.32) は 2 つの円筒が接していた弧長 (図 20 の青色で示した部分) が等しい条件 $A\theta = a(\phi - \theta)$ から導かれる.

- ラグランジアン (2.5.33) において

第 1 項……並進の運動エネルギー,

第 2 項……回転の運動エネルギー $\frac{1}{2}I\dot{\phi}^2$

である.

- 固定円筒に働く力のモーメントが

$$F'_\theta = (A + a)\lambda_2 = \frac{1}{3}mg \sin \theta \times (A + a)$$

であることから、摩擦力 $\frac{1}{3}mg \sin \theta$ が得られる.

参考文献

- [1] 江沢洋, 中村孔一, 山本義隆, 2022, 演習詳解 力学 [第 2 版], 株式会社 筑摩書房, 東京.
- [2] 江沢洋, 中村孔一, 山本義隆, 演習詳解 力学 [第 2 版], 株式会社 日本評論社, 東京.
- [3] エリ・デ・ランダウ, イェ・エム・リフシッツ, 2013, ランダウ=リフシッツ理論物理学教程 力学 (増訂 第 3 版)(広重徹, 水戸巖訳), 東京図書株式会社, 東京.
- [4] 山本義隆, 中村孔一, 2013, 朝倉物理学大系 1 解析力学 I, 株式会社朝倉書店, 東京.