

B. ツヴィーバッハ『初級講座 弦理論《基礎編》』

本稿は弦理論の教科書

B. ツヴィーバッハ, 2013, 初級講座 弦理論《基礎編》(樺沢宇紀訳), 丸善プラネット株式会社, 東京

を, 要点と途中計算の分離した見通しの良い自己完結的テキストへと再構成し, さらに補足・考察を加えたノートである. ただし本稿は教科書の内容をほぼ網羅しているものの, 章末問題をはじめとして内容を多少, 取捨選択してある. 特に第5章までのうち古典物理学の基本事項にあたる箇所, 10.2節と10.4節における場の量子論の基礎, 12.3節における調和振動子の量子論の復習に関しては, 本稿では必ずしもすべての結果に導出を与えてはいない. さらに本稿には筆者の誤りや勘違いが潜んでいるかもしれないことをあらかじめ断っておく. 言うまでもなく, 原著を当たるに越したことはない.

なお本稿の他にも理論物理の各種ノートを以下のページで公開している. (B. ツヴィーバッハ『初級講座 弦理論《発展編》』のノートを含む.)

<http://everything-arises-from-the-principle-of-physics.com/>

目次

第1章 緒論	4
第2章 特殊相対性理論・光錐座標系・余剰次元	8
第3章 様々な次元における電磁気学と重力	21
第4章 非相対論的な弦	37
第5章 相対論的な点粒子	43
第6章 相対論的な弦	46
第7章 弦のパラメーター付けと古典的な運動	59
第8章 世界面カレントと保存量	77
第9章 相対論的な光錐弦	90
第10章 各種の光錐場とボゾン	106
第11章 点粒子の光錐量子化	124
第12章 相対論的な量子開弦	138
第13章 相対論的な量子閉弦	172
第14章 超弦理論入門	197
付録 A 教科書全体の要約	212

教科書全体の内容を大まかに把握するため、前書きの一部を以下に抜粋する。また本稿には基本的に載せてはいないが、教科書の各章の冒頭には序文が添えられている。その内容を初見で理解することは困難であるが、1つの章を終えるごとに序文を読み返せば、序文もまた各章の簡潔な要約となっていることが分かる。筆者も本稿の付録 A にて、教科書全体のまとめを試みる。

第 2 版への前書き「本書について」から抜粋

本書『初級講座 弦理論』は、特殊相対論、量子力学の基礎、電磁気学、統計物理の入門的な知識さえあれば、誰にでも読むことができる本である。ラグランジアン力学に慣れていればいくらか役に立つが、それは前提として不可欠の知識ではない。

(中略)

本書の多くの部分においては、天下りに受け入れなければならない部分がほとんどないように、題材を自己完結した形で展開してある。ただし第 14 章、第 21 章、第 22 章、第 23 章では、少数の節において、本書の水準で完全な説明を与えることのできない対象を扱っている。そのような部分では、読者は例外的に、いくらか理に適っていると見なされる事実を額面どおりに受け入れることを要求されるが、それ以外の部分は論理的に展開されており、“完全に”理解できるはずである。難しい題材を扱った少数の節は、上級者向けに書かれているのでは“ない”。

本書は 2 つの部分から成る。第 I 部は“基礎編”，第 II 部は“発展編”である。基礎編は第 1 章に始まり第 14 章で終わる。発展編は第 15 章から始まり第 26 章で終わる。

第 1 章は導入部である。第 2 章は特殊相対性理論の復習であるが、新たな概念も導入してある。それは光錐座標、光錐エネルギー、余剰次元のコンパクト化、オービフォルドなどである。第 3 章では電磁力学と、その相対論的共変性が明白な定式化を復習する。一般相対性理論にもいくらか言及し、次元のコンパクト化の Planck 長さへの影響を学ぶ。我々はこの時点で、余剰次元に関する刺激的な可能性を調べることができる。第 4 章では非相対論的な弦を素材として物理的な直観を養うとともに、ラグランジアン形式による力学の定式化を復習し、これらに関連する術語を導入する。第 5 章では相対論的な点粒子を題材として、相対論的な弦を導入するための土台を準備する。ラグランジアン形式の威力と優美さ (エレガンス) が、この時点において明らかになる。弦理論への最初の遭遇は第 6 章で起こる。そこでは相対論的な弦の古典力学を扱う。これは大変重要な章であり、徹底的な理解が必要である。第 7 章では相対論的な弦の古典的な運動を詳しく学ぶことを通じて、弦の力学 (ダイナミクス) への理解を深める。第 7 章の末尾には宇宙弦 (宇宙紐) に関する節を置いたが、これは理論と実験 (観測) との関係の潜在的な可能性を覗かせる話題である。第 1 章から第 7 章までによって、古典的な弦理論の短期講座を構成することができる。

第 8 章から第 11 章では、相対論的な弦の量子化のための土台を準備する。第 8 章では、自由な弦の運動量や角運動量のような保存量を計算する方法を学ぶ。第 9 章では弦の運動方程式の光錐ゲージ解を与え、光錐弦の量子論でも用いられることになる術語を導入する。第 10 章では量子場と粒子状態に関する基礎を説明するが、そこにおいてスカラー場状態、光子状態、重力子状態を特徴づける自由度の数の取扱いを強調する。第 11 章では相対論的な粒子の光錐ゲージ量子化を実行する。これらすべてが第 12 章に必要な前提となるが、この章も、完全な理解が要求される最重要の部分と位置づけられる。ここでは開弦の光錐ゲージ量子化を行う。そこから理論の臨界次元が得られ、また光子状態の出現が示される。第 12 章ではタキオンの不安定性の問題に言及する節も含まれる。第 13 章では閉弦の量子化と、そこからの重力子状態の出現を論じる。この章にはもっ

とも単純なオービフォールドである半直線において量子閉弦を扱う 2 つの節も含まれている。基礎編の最終章である第 14 章では、超弦に関する話題を紹介する。開弦の Ramond (ラモン) セクターと Neveu-Schwarz (ヌヴェー-シュワルツ) セクターを説明し、それらを組み合わせて超対称性を備えた理論を得る。この章の章末は、II 型の閉弦理論に関する簡単な考察に充ててある。

本書の基礎編の部分は、頂上に弦の量子化を据えた登山道のように特徴づけられる。

(中略)

本書では弦の量子化のために、光錐ゲージを選択した。この量子化のアプローチは、事前にいくらか量子力学を学んでいる学生であれば、細部まで完全に理解できるはずのものである。Lorentz 共変な弦の量子化では、事情は同じでは“ない”。すなわち負のノルムを持つ状態を扱わねばならず、ハミルトニアンはゼロになり、量子力学で馴染みのあるような形の Schrödinger 方程式も存在しない。光錐ゲージによるアプローチは、大抵の物理的な問題を扱うために十分に有用であり、実際に、いくつかの問題については、光錐ゲージを採用することによって、特別に取扱いが簡単になるのである。

第 1 章 緒論

1.1 統一理論への道

電気学と磁気学は矛盾 → 電磁気学への統一.

- 物理学のパラダイム
 - 特殊相対性理論
 - 量子力学
- 4つの基本的な力
 - 重力
 - 電磁気力
 - 弱い力 … 一般にニュートリノを含む過程は弱い力によって媒介
 - 強い力 … 強粒子 (ハドロン) を構成するクォークを互いに束縛
- Weinberg-Salam 理論
 - 弱い相互作用に関する予言が可能で, かつ矛盾のない理論
 - 電磁力と弱い力を統一
 - 力を媒介する粒子
 - * W^+, W^-, Z^0 (対称性の破れにより質量を得る, 弱い力を媒介)
 - * 光子 (質量ゼロ, 電磁力を媒介)
- 標準模型 ← 電弱理論, QCD
 - ボゾン (力を媒介)
 - * 8種類のグルーオン
 - * W^+, W^-, Z^0 および光子 (4種類)
 - フェルミオン (物質粒子)
 - * レプトン e^-, μ^-, τ^- , それらに対応するニュートリノ ν_e, ν_μ, ν_τ , それぞれの反粒子 (全 12種類)
 - * クォーク
 - 6種類の香り u, d, c, s, t, b , それぞれについて 3種類の色, それぞれの反粒子 (全 36種類)
- 標準模型の欠陥
 - 重力を含んでいない
 - 「統一という観点によるかどうかはともかく」「量子重力の理論が必要とされる」
 - 手で (恣意的に) 入れなければならない 20 個のパラメーター
- 標準模型の拡張可能性
 - 電弱力と強い力の大統一理論への統一
 - 超対称性 (ボゾンとフェルミオンを関係づける対称性)

1.1 について

■ 「…互いに整合するものではなかった。式のひとつに新しい項を付け加えることによって、矛盾のない一連の方程式を構築…」 (p.1, l.13~) について **変位電流の項** (下記の青字) を考慮してはじめて以下のように電荷保存則が満たされる。また理論の共変性が保証される。

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$
$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \vec{\nabla} \cdot \left(c \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \right\} = 0.$$

実際、変位電流を含む正しい Maxwell 方程式は共変性が明白な形 (3.34): $\partial_\nu F^{\mu\nu} = \frac{1}{c} j^\mu$ に書くことができる。このとき上で行った電荷保存則の導出は、簡単に

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{1}{c} \partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} = 0$$

となる。

■ 「量子力学は、理論というよりもむしろ枠組みであり、…」 (p.2, l.9~) について 注目に値する。

■ 「Fermi 定数」 (p.2, l.26) について 例えば文献 [1, pp.445–446] を参照。

1.2 物理学の統一理論としての弦理論

- 「弦理論においては量子重力の部分の整合性を成立させるために、他のすべての相互作用も同時に必要となる」
- 「弦は 1 種類であり、弦の振動としてあらゆる粒子が現れるので、すべての粒子が単一の理論に自然に組み込まれる」
- 「Einstein の理論を量子化しようとする際に起こる問題は、弦理論には現れないように見える」
- 弦理論では「恣意的に調整すべき無次元のパラメーターを含まない」
「弦理論は単位を持つ唯一のパラメーターとして、弦の長さ l_s を含む」
- 弦理論では「時空次元が理論的に確定する」
- 開弦だけを想定する理論と、開弦と閉弦の存在を両方想定する理論がある
 - 開弦は一般に、閉じて閉弦へと移行できるボゾンの弦理論と超弦理論がある
- – ボゾンの弦理論
ボゾンのみを含む、26 次元時空
- 超弦理論
ボゾンとフェルミオンを含む、10 次元時空
- 重力は閉弦の振動モード
- 弦理論の間に多くの相互関係が見出された
- 弦理論は古典的な相対論的弦に対する量子力学

■弦の長さ l_s に関する p.5 の訳註の引用

l_s は確かに長さの単位を持つ弦理論の基礎パラメーターであり、弦の典型的な長さの目安と見なされるが、これは弦が固定された長さ l_s を持つという意味ではないし、静的平衡状態における弦の固有な長さが有限値 l_s に設定されるという意味でもない。古典論的に弦の静的な状態を考えるならば、弦が引き伸ばされた状態を保持するような境界条件が設定されない限り、弦の長さがゼロまで縮んだ状態が、最もエネルギーの低い安定な状態である (6.7 節)。

1.3 弦理論とその検証

- 弦理論の予言の検証可能性
 - － 余剰次元の検出
 - － 宇宙弦 (宇宙的な寸法を持つ弦 (p.143)) の発見
 - － 弦理論から導かれる 4 次元理論の超対称性
- 弦理論の低エネルギー領域における標準模型への帰着
 - － D-ブレーンを用いたモデル
- 弦理論の解 (弦の真空モデル) は多数
 - － 解は離散的なパラメーターと連続的なパラメーターによって特徴づけられる
しかし標準模型を再現するには、連続的なパラメーターは避けなければならない
(実際、連続パラメーターは、実は質量を持たない未知の場の存在を意味してしまう)
連続的なパラメーターを含まない理論を見出すことは、磁束コンパクト化の文脈において可能
→ 10^{500} 以上の解から成る “景観”
 - － 景観の中から標準模型を再現する解を探す
- 弦理論において重力は相対論的弦の “量子論的” な振動から見出される
(“古典的” な振動からではない)
 - － 冗談半分で「弦理論は重力を予言した」と言われる

■p.7 訳註の引用 余剰次元が Planck 長さ $l_P \sim 10^{-33}$ cm 程度であれば、それが直接の観測にかかることはおそくない。ところが弦理論の余剰次元の寸法として、0.1mm 程度のかかなり大きな尺度さえ許容されることが分かった。我々の 3 次元空間が D-ブレーンに含まれているとすると、D-ブレーンの外の余剰次元を検出し得るのは、D-ブレーンに拘束されない重力に関する実験ということになる。これに関して、p.7 訳註を引用する。詳しくは 3.10 節を参照。

つまり D-ブレーンの概念の発見 (1995 年) 以降、我々に余剰次元が見えない理由として、それが必ずしも極端に小さく (l_P 程度まで) コンパクト化しているからということではなく、たとえば我々の実効的な世界を構成する要素のほとんど (光子を含む Yang-Mills ボゾンやカイラルフェルミオン、開弦の状態として現れる) が、余剰次元方向には拡がり制限された D-ブレーンに拘束されているからだという考え方も可能になったわけである。

1.3 について

■ 「……弦の真空モデルが連続なパラメーターを含んではならないことは明白である」(p.8 下から 8,7 行目) について 素朴に考えても、連続パラメーターから連続無限個の真空モデルが出てくるのは好ましくない。

1.4 展望と概観

- Michael Green と John Schwarz
「時空次元を 10 次元とする超弦理論が深刻な内部矛盾を含まない」
- 「ゲージ理論と近い類縁関係にある理論が、弦理論の D-ブレーンにおいて現れる」(→ 第 15 章)
- 「ある種の 4 次元ゲージ理論と、閉じた超弦の理論のひとつの注目すべき等価性 (AdS/CFT 対応)」(→ 第 23 章)
- ブラックホールはエントロピーと温度を持つ
← D-ブレーンと弦が制御された方法で集積したブラックホールの描像から説明
- 「弦理論は急膨張——宇宙が最も初期の段階で経験したと推測される劇的な指数関数的膨張の時期——を実現する具体的なモデルを提供するかもしれない」
- 「弦理論は、まだ完成されていない理論である」
「基礎方程式は未だ知られておらず、理論の概念的な基礎にも未知の部分が多い」

第 2 章 特殊相対性理論・光錐座標系・余剰次元

“相対論的な弦”のように用いられる相対論的 (relativistic) という言葉は, Einstein の特殊相対性理論と整合することを意味している. 本章では特殊相対性理論を復習し, 光錐座標系と光錐エネルギーの概念を導入する. それからコンパクト化した余剰な空間次元の概念を説明し, 量子力学の例を用いて, それらが小さければ低エネルギーにおいて, ほとんどその影響が現れないことを示す.

2.1 単位系と理論のパラメーター

- 測定において, 我々には実際には無単位数 (1 秒の何倍か, 等) を数えている
- 長さ L , 時間 T , 質量 M を基本 3 単位として他の量を記述できる
Coulomb の法則

$$|\vec{F}| = \frac{|q_1 q_2|}{r^2} \quad (\text{Gauss 単位系})$$

$$\rightarrow \text{電荷の単位 esu,} \quad [\text{esu}] = M^{1/2} L^{3/2} T^{-1}$$

- 質量がそれぞれ m_1, m_2, m_3 の 3 種類の粒子を含む理論
 - 単位を持つパラメーター: m_1
 - 無単位のパラメーター: $m_2/m_1, m_3/m_1$
- 弦理論
 - 単位を持つパラメーター: 弦の長さ l_s
 - 無単位のパラメーター: なし

2.2 不変距離と Lorentz 変換

2 つの事象の

$$\begin{cases} \text{慣性系 } S \text{ で見た座標を } x^\mu, x^\mu + \Delta x^\mu \\ \text{慣性系 } S' \text{ で見た座標を } x'^\mu, x'^\mu + \Delta x'^\mu \end{cases}$$

とすると, 2 つの事象の間の不変距離 Δs^2 は

$$\begin{aligned} -\Delta s^2 &\equiv -(\Delta x^0)^2 + (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2 \\ &= -(\Delta x'^0)^2 + (\Delta x'^1)^2 + (\Delta x'^2)^2 + (\Delta x'^3)^2. \end{aligned}$$

- $\Delta s^2 > 0$
 - ⇒ 2 事象は“時間的”に隔たっている
 - ひとつの粒子の世界線の上にある任意の 2 つの事象は“時間的”に隔たっている
 - 「時間的な距離」 $\Delta s \equiv \sqrt{\Delta s^2}$ を定義できる
- $\Delta s^2 = 0$
 - ⇒ 2 事象は“光的”に隔たっている

- $\Delta s^2 < 0$
 - ⇒ 2 事象は“空間的”に隔たっている
 - ある慣性系で 2 事象は同時に起こる

$$-ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

と書くと、 $\eta_{\mu\nu}$ を添字に関して対称としても一般性を失わず、このとき $\eta_{\mu\nu}$ は Minkowski 計量

$$(\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

に他ならない.

4 元量 a^μ, b^μ (正確には教科書 p.19 で後述されているように 4 元ベクトル) に対し

$$a_\mu \equiv \eta_{\mu\nu} a^\nu, \quad a \cdot b \equiv a_\mu b^\mu = a^\mu b_\mu : 4 \text{ 元内積}$$

を定義すると $-ds^2 = dx \cdot dx$ と書ける.

$(\eta_{\mu\nu})$ の逆行列

$$(\eta^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を導入すると、 $\eta^{\mu\nu} a_\nu = a^\mu$.

慣性系 S から見て慣性系 S' が x 方向に速度 v で等速推進するとき (S と S' の座標軸は平行、 $t = t' = 0$ において両者の原点は一致)、同一点の S, S' から見た座標 x^μ, x'^μ の関係は Lorentz 変換

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - \beta ct) \\ ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

$$\beta \equiv v/c, \quad \gamma \equiv 1/\sqrt{1 - \beta^2}$$

で与えられる. これは (2.40): $\eta_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = \eta_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu$ を満たす線形変換である.

線形変換 $x'^\mu = L^\mu{}_\nu x^\nu$ が Lorentz 変換を表す、すなわち式 (2.40): $\eta_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = \eta_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu$ を満たすための条件は [$\eta_{\mu\nu}$ が 2 階共変テンソルとして変換すること] (2.45):

$$L^\mu{}_\alpha \eta_{\mu\nu} L^\nu{}_\beta = \eta_{\alpha\beta}$$

であり、ここから $\det(L^\mu{}_\alpha) = \pm 1$ が帰結される.

- 単なる空間的な回転も Lorentz 変換
- 4 元ベクトル
 - Lorentz 変換の下で x^μ と同じように変換
 - 微分量 dx^μ は 4 元ベクトル [$dx'^\mu = (\partial x'^\mu / \partial x^\nu) dx^\nu$]

- 4元ベクトル a^μ , $a^2 \equiv a \cdot a$: 4元内積

$$a^2 < 0 \Rightarrow a^\mu \text{は時間的なベクトル}$$

$$a^2 > 0 \Rightarrow a^\mu \text{は空間的なベクトル}$$

$$a^2 = 0 \Rightarrow a^\mu \text{は零ベクトル}$$

計算練習 2.1

$$\begin{aligned} ds'^2 &= -(dx'^0)^2 + (dx'^1)^2 + (dx'^2)^2 + (dx'^3)^2 \\ &= -\gamma^2(dx^0 - \beta dx^1)^2 + \gamma^2(-\beta dx^0 + dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \\ &= -\cancel{\gamma^2(1-\beta^2)}(dx^0)^2 + \cancel{\gamma^2(1-\beta^2)}(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \\ &= ds^2. \end{aligned}$$

計算練習 2.2

$$L^{-1} = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \right) = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を導入すると式 (2.44): $L^\mu{}_\alpha L^\nu{}_\beta \eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta}$ と同時に $(L^{-1})^\alpha{}_\lambda (L^{-1})^\beta{}_\mu \eta_{\alpha\beta} = \eta_{\lambda\mu}$ が成り立ち, $b_\lambda = \eta_{\lambda\mu} b^\mu$ は共変ベクトルの変換則

$$\begin{aligned} b'_\lambda &= \{(L^{-1})^\alpha{}_\lambda (L^{-1})^\beta{}_\mu \eta_{\alpha\beta}\} (L^\mu{}_\nu b^\nu) \\ &= (L^{-1})^\alpha{}_\lambda (\eta_{\alpha\nu} b^\nu) \quad (\because (L^{-1})^\beta{}_\mu L^\mu{}_\nu = \delta^\beta{}_\nu) \\ &= (L^{-1})^\alpha{}_\lambda b_\alpha \end{aligned}$$

に従う。よって

$$\begin{aligned} a'^\mu b'_\mu &= (L^\mu{}_\alpha a^\alpha) \{(L^{-1})^\beta{}_\mu b_\beta\} \\ &= a^\alpha b_\alpha. \quad (\because L^\mu{}_\alpha (L^{-1})^\beta{}_\mu = \delta^\beta{}_\alpha) \end{aligned}$$

2.2 について

- 時間的な距離の式 (2.12):

$$\Delta s \equiv \sqrt{\Delta s^2} \quad \text{if} \quad \Delta s^2 > 0$$

の説明から分かるように, 粒子の世界線に沿う 2 事象は時間的に隔たっているから, (教科書の第 2.4 節のように) 粒子の固有時間や 4 元速度を実数として定義できる。

- Einstein の和の規約について,
教科書 p.15, 1.2 では「同じ項において 3 回以上同じ添字が現れてはならない」とされている。

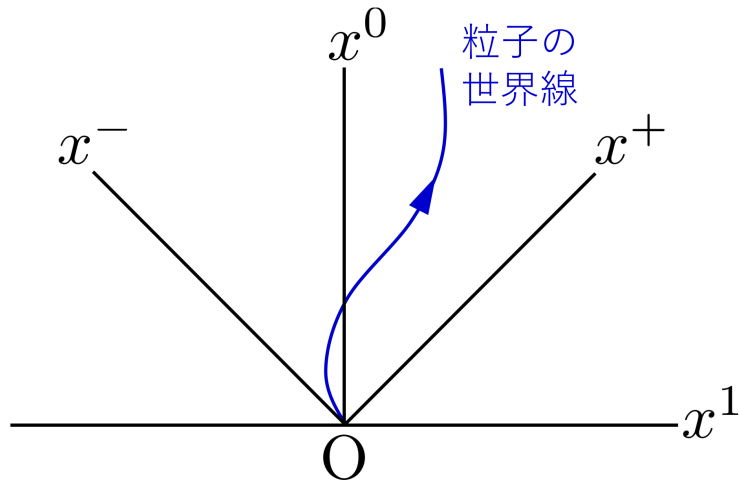


図1 光錐座標 x^\pm (教科書の図 2.2(p.21))

- 式 (2.21):

$$-ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

における $\eta_{\mu\nu}$ が添字に関して対称として良い理由として, $\eta_{\mu\nu}$ がゼロでない反対称部分を持つとするとそれは和 $\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ に寄与しないことが述べられている.

2.3 光錐座標

相対論的な弦の量子化

- 光錐座標の採用 (教科書全般)
 - 最も直接的に行える
- 特別の座標系を用いない (教科書第 24 章)
 - 多くの知識が必要

時間座標 x^0 と空間座標のひとつ x^1 の代りに, 光錐座標

$$x^+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 + x^1), \quad x^- \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 - x^1)$$

を用いる (x^2, x^3 はそのまま用いる).

- 図1のように光錐座標は座標軸が光線の世界線を成す
- 図1のように (光子を除く) 物理的な粒子の世界線に沿って常に座標 x^\pm は増大するという意味で, これは時間座標と見なせる
 - x^+ を“光錐時間”の座標, x^- を空間座標と見なす

光錐座標を用いると

$$\begin{aligned} -ds^2 &= -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \\ &= -\left(\frac{dx^+ + dx^-}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{dx^+ - dx^-}{\sqrt{2}}\right)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \\ &= -2dx^+dx^- + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \end{aligned}$$

となる。4つの値 $+, -, 2, 3$ をとる添字を用いてこれを

$$ds^2 = \hat{\eta}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

と書くと、光錐計量 $\hat{\eta}_{\mu\nu}$ は

$$(\hat{\eta}_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で与えられる。

任意の4元ベクトル a^μ の光錐座標成分を

$$a^+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(a^0 + a^1), \quad a^- \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(a^0 - a^1)$$

で定義する。4元内積は

$$\begin{aligned} a \cdot b &\equiv -a^0b^0 + a^1b^1 + a^2b^2 + a^3b^3 \\ &= -a^-b^+ - a^+b^- + a^2b^2 + a^3b^3 \\ &= \hat{\eta}_{\mu\nu} a^\mu b^\nu \end{aligned}$$

となる。ここで $a_\nu \equiv \hat{\eta}_{\nu\mu} a^\mu$ を定義すると $a \cdot b = a_\nu b^\nu$ と書けることになる。 $a_\nu \equiv \hat{\eta}_{\nu\mu} a^\mu$ は具体的には添字を下げる規則

$$a_+ = -a^-, \quad a_- = -a^+, \quad a_2 = a^2, \quad a_3 = a^3$$

を与える。

x^1 軸に沿う等速直線運動 $x^1 = \beta x^0$ は光錐座標における直線

$$x^- = \frac{1-\beta}{1+\beta} x^+ \tag{2.65}$$

で表される [導出は下記]。そこで傾き

$$\frac{dx^-}{dx^+} = \frac{1-\beta}{1+\beta}$$

を光錐速度と呼ぶと、これは実際の速度 (と光速との比) β と図2のように関係する。直観的に解釈すると、 x^+ 軸に沿う運動では粒子の空間座標 x^- が変化せず光錐速度はゼロになり、 x^- 軸に沿う運動では一定の光錐時間 x^+ のうちに空間座標 x^- が変化するため光錐速度は発散する。

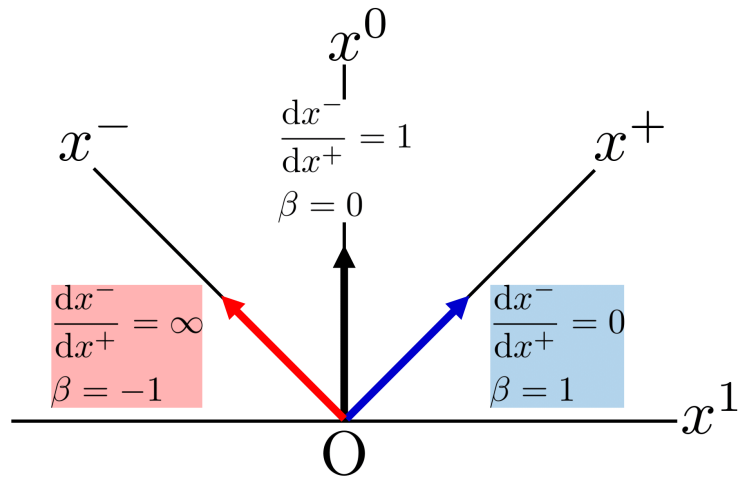


図2 光錐速度 dx^-/dx^+ と速度パラメーター β の関係 (教科書の図 2.3(p.23))

2.3 節, 式の導出など

■式 (2.65) の導出 $x^1 = \beta x^0$ に対して

$$x^\pm = \frac{x^0 \pm x^1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \pm \beta}{\sqrt{2}} x^0$$

なので, 式 (2.65):

$$x^- = \frac{1 - \beta}{1 + \beta} x^+$$

を得る.

計算練習 2.3

座標 x'^μ が光錐座標 (x^+, x^-, x^2, x^3) であるとする, 不変距離の表式は

$$ds^2 = \hat{\eta}_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu$$

となる. これは Lorentz 変換によって得られた座標 x'^μ に対する表式

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu$$

に矛盾するから, 座標 x^μ を光錐座標に移行させるような Lorentz 変換は存在しない.

幾何学的に言っても, 式 (2.34) の Lorentz 変換によって座標軸は図 3 のように変わるため, x^\pm 軸を得ることはできない.

2.3 について

■光錐座標 x^\pm の定義式 (2.50) について 教科書の図 2.2(p.21) のように x^0, x^1 軸を反時計回りに 45° 回転させて x^-, x^+ 軸が得られるとき, 座標系に固定された視点からは時空点が時計回りに 45° 回転して見えるか

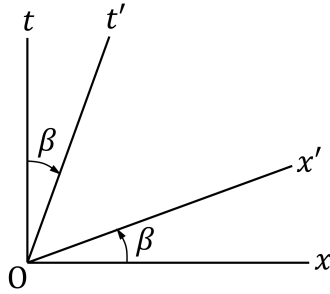


図3 x 方向への Lorentz 推進

ら，時空の同一点を2つの座標系から見た座標 $(x^0, x^1), (x^-, x^+)$ は

$$\begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-45^\circ) & -\sin(-45^\circ) \\ \sin(-45^\circ) & \cos(-45^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^0 \end{pmatrix}$$

で関係付けられる。

■光錐計量 (2.57) について これは光錐座標への変換

$$x = (x^0, x^1, x^2, x^3) \rightarrow x' = (x'^+, x'^-, x'^2, x'^3) = \left(\frac{x^0 + x^1}{\sqrt{2}}, \frac{x^0 - x^1}{\sqrt{2}}, x^2, x^3 \right)$$

に対する2階共変テンソルの変換則

$$\hat{\eta}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \eta_{\alpha\beta}$$

から得られるものである(問題10.3と本稿の解答を参照)。なお計算練習2.3で見たように光錐座標への変換は Lorentz 変換ではないけれど，座標変換は線形変換であり，それ故にベクトル成分の変換則になっているため，以上の議論は有効である(問題10.3も同様)。

式(2.57)の光錐計量 $\hat{\eta}_{\mu\nu}$ に関する p.22 の訳註を以下に引用する。

本章では光錐計量にハット付きの $\hat{\eta}_{\mu\nu}$ という記号を充ててあるが，後の方の章では光錐計量にも通常の計量と同じ $\eta_{\mu\nu}$ が用いられる。特に断り書きが無い場合，Minkowski 計量を含む式は，添字を $\mu, \nu = 0, 1, 2, \dots$ と置いても， $\mu, \nu = +, -, 2, \dots$ と置いてもよい。

■スカラー積の式(2.59) 式(2.59): $a \cdot b = -a^-b^+ - a^+b^- + a^2b^2 + a^3b^3$ は

$$-a^-b^+ - a^+b^- = -\frac{1}{2}(a^0 - a^1)(b^0 + b^1) - \frac{1}{2}(a^0 + a^1)(b^0 - b^1) = -a^0b^0 + a^1b^1 : (2.59)$$

と確かめられる。

2階共変テンソルと2つの反変ベクトルを縮約した量 $a \cdot b = \eta_{\mu\nu} a^\mu b^\nu$ はスカラーになるから，どの座標系に関する成分を用いて計算しても同じ値を持つ。よって光錐座標系における成分 $\hat{\eta}_{\mu\nu}, a^\mu, b^\nu$ を用いて $a \cdot b = \hat{\eta}_{\mu\nu} a^\mu b^\nu : (2.59)$ とできることが，テンソルの変換則に関する議論からあらかじめ分かっている。

2.4 相対論的なエネルギーと運動量

固有時間 $t_P \dots$ 粒子に固定した時計の経過時間,

$$dt_P = \frac{ds}{c} = dt \sqrt{1 - (\vec{v}/c)^2}.$$

これはスカラーであり, その間の粒子の変位 dx^μ はベクトルだから, 比

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{dt_P} = \gamma(c, \vec{v})$$

は速度 4 元ベクトルとなる. [他方, 座標時間による微分 dx^i/dt は一般にベクトル成分として変換しない.]

そこで運動量 4 元ベクトル $p^\mu = mu^\mu$ を定義すると, これは相対論的なエネルギーと運動量

$$E = \gamma mc^2, \quad \vec{p} = \gamma m\vec{v}$$

を成分に持ち ($p^\mu = (E/c, \vec{p})$),

$$p^\mu p_\mu = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \vec{p} \cdot \vec{p} = m^2 c^2.$$

計算練習 2.4

式 (2.67): $(E/c)^2 - \vec{p} \cdot \vec{p} = m^2 c^2$ の確認.

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - \vec{p} \cdot \vec{p} = \gamma^2 m^2 (c^2 - v^2) = m^2 c^2.$$

$p^\mu p_\mu$ はスカラーだから, これは粒子の静止系で評価した値に等しい. 粒子の静止系では $p^\mu = (mc, \vec{0})$ のので

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - \vec{p} \cdot \vec{p} = p^\mu p_\mu = (mc)^2.$$

2.5 光錐座標系のエネルギーと運動量

$$p^0 = \sqrt{\vec{p} \cdot \vec{p} + m^2 c^2} \geq |\vec{p}| \geq |p^1|$$

$$\Rightarrow p^\pm \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(p^0 \pm p^1) \geq 0$$

であり, この意味で p^\pm は両方ともエネルギー的である (エネルギーと解釈できるための必要条件を満たしている).

光錐時間を x^+ と選んだので, 光錐エネルギーを E_{lc} として Schrödinger 方程式

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x^+} = \frac{E_{lc}}{c} \psi$$

が成り立つことを要請する. このとき運動量 p^μ を持つ粒子の波動関数

$$\psi(x) = e^{ip \cdot x / \hbar} = \exp\left(\frac{i}{\hbar}(p_+ x^+ + p_- x^- + p_2 x^2 + p_3 x^3)\right)$$

表1 v と dx^-/dx^+ , p^- の関係

v	$-c \rightarrow 0 \rightarrow c$
dx^-/dx^+	$\infty \rightarrow 1 \rightarrow 0$
p^-	$\infty \rightarrow mc/\sqrt{2} \rightarrow 0$

に対して

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x^+} = -p_+ \psi$$

なので光錐エネルギーは

$$-p_+ = p^- = \frac{E_{lc}}{c}$$

に同定される.

$$x^+ : \text{光錐時間}, \quad p^- : \text{光錐エネルギー}.$$

注解 すなわち x^+ を光錐時間とする解釈の下で,

平面波状態に対するエネルギーの式と同様の関係が光錐成分に関しても成り立つこと

$$E = i\hbar \partial_t = -cp_0 \quad \rightarrow \quad E_{lc} = i\hbar \partial_+ = -cp_+ = cp^-$$

を要求すると, p^- がエネルギーと解釈されることになる.

以降, 教科書では $+$ や $-$ を必ず上付き添字として用いる (p.27, 1.11~13).

x^1 軸正の方向に進む粒子の速度が光速に近づくと $p^- \rightarrow 0$ となることが分かる [本稿次節で補足]. これは光錐速度の遅い粒子ほど光錐エネルギーも小さくなることを意味する.

2.5 について

■ 「 p^\pm は両方とも物理的な粒子に関して正の値を持つので, 両方がエネルギー的と言える」(式 (2.85) の上 2 行) について 相対論的力学における自由粒子のエネルギー $E = mc^2/\sqrt{1 - (\vec{v}/c)^2} = \sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^2c^2}$ には不定性がなく, 常に正の値を持つ [2, p.29]. もちろんポテンシャル・エネルギーを含めた全エネルギーは一般に負の値をとっても良い.

■ 「光錐速度の減少に伴って光錐エネルギーも減少する」(p.27) ことについて 教科書 p.27 では「 $+x^1$ 方向に光速に近い速度で運動している粒子」のみを考えて「光錐速度の減少に伴って光錐エネルギーも減少する」ことを確かめた. このことは速度の全範囲 $-c \leq v \leq c$ にわたって正しい. 実際, 光錐エネルギー (を c で割った値)

$$p^- = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \sqrt{(p^1)^2 + (mc)^2} - p^1 \}$$

と p^1 の関係は図 4 のようである.

よって x^1 軸に沿って運動する粒子の速度 v と光錐速度 dx^-/dx^+ , 光錐エネルギー p^- の関係は表 1 のようにまとめられる.

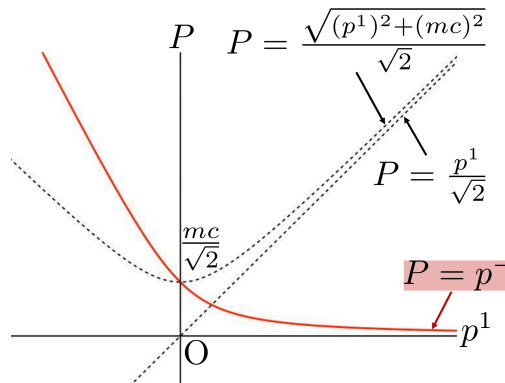


図4 p^1 と p^- の関係

2.6 余剰次元と Lorentz 不変性

- 時間は1次元で、余剰次元は空間的.
- 余剰次元を持つ時空中における Lorentz 変換は

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + (dx^4)^2 + \dots$$

を不変に保つ線形の座標変換として定義される (\rightarrow 光速不変).

2.7 コンパクト化した余剰次元

1次元世界を考え、 x 座標を直線に沿う原点からの距離として導入する. 距離 $2\pi R$ 進むごとに同じ風景が繰り返される時、互いに $2\pi R$ だけ座標値が異なる任意の2点を同一視することにし、これを

$$x \sim x + 2\pi R$$

と書く. 区間 $0 \leq x < 2\pi R$ がこの同一視の“基本領域”を成す.

- このとき1次元世界を半径 R の円として捉えられるけれども、必ずしもこの同一視は1次元世界が円であることを意味しない. 半径 R の円を考えるにはそれを内に含む高次元の空間 (2次元の平面) の存在が前提として必要になるけれど、実際の時空の外にそのようなものを想定することは許されない.
- [座標を $0 \leq x < 2\pi R$ に限定すると] $x = 0$ の点において座標は不連続となる. しかし座標は一価・連続でなければならない. 同一視を導入すると、この不連続性を避けられる.

同一視はコンパクト空間 (「小さな体積しか持たない」余剰次元) を構築するひとつの方法である.

■p.30 訳註の引用

便宜的に“円” (circle) という呼称が使われ、コンパクト空間に関わる形容として“巻き取る” (curl up), “巻き付く” (wrap around) といった表現も用いられるけれども、空間が文字通りの意味で丸まっているわけではないので、平坦な空間の有効範囲がコンパクト化のために $2\pi R$ の区間 (基本領域) で実効的に途切れている、というイメージの方がむしろ適切となる場合も少なくない. この後に言及されるトーラスなども、もちろん抽象的な意味で

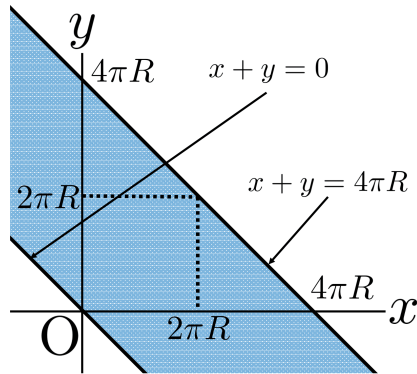


図5 同一視 $(x, y) \sim (x + 2\pi R, y + 2\pi R)$ における基本領域

の位相構造を無視することはできない(示性数 [genus] すなわち ‘穴’ の数には顕著な意味が伴う) が, 曲面によって形成される具体的なドーナツ型のイメージには必ずしも固執せず, 単純に空間内の2方向に有効範囲の制限(基本領域)が設定されていると考えたほうがよいかも知れない(第21章, 図21.1). x 方向の同一視と y 方向の同一視の順序によって, 別のものが形成されるわけではないし, 同一視が導入されても, それだけで空間内の計量が変わることはない.

計算練習 2.5

同一視 $(x, y) \sim (x + 2\pi R, y + 2\pi R)$ によって構築される空間は図5のように, $0 \leq x + y < 4\pi R$ を基本領域として, その境界 $x + y = 0, 4\pi R$ を接続して得られる円筒と見なせる.

2.8 オービフォルド

固定点 同一視によってそれ自身と関係づけられるような特別な点

オービフォルド 同一視によって得られる固定点を持つ基本領域空間

- 実数座標 x を設定された直線, 同一視 $x \sim -x$
 - $x = 0$ は固定点
 - $x \geq 0$ はオービフォルド
- 複素 z 平面, 同一視 $z \sim e^{2\pi i/N} z (N \geq 2 \text{ は整数})$
 - $z = 0$ は固定点
 - $0 \leq \arg(z) < 2\pi/N$ はオービフォルド*1

■ orbifold に関する pp.32–33 の訳註の引用

‘orbifold’ は ‘軌道体’ と訳される場合もあるが, ‘fold’ の含意は ‘折り重ね’ である. 13.6 節を見ると “軌道の折り重ねをもたらす空間構造” といったニュアンスを把握できる.

超弦理論では, 平坦な 10 次元時空間内の理論が出発点になるが, それを現実の物理に結び付けるためには, たとえば余剰次元 6 次元を矛盾のないように ‘上手に’ 処理して, その結果として得られる実効的な 4 次元時空間において, 素粒子モデル構築のために望ましい水準のゲージ対称性と超対称性を実現しなければならない. これを試みる手段として, 単純な円やトーラスへのコンパクト化だけでなく, 複雑な構造を持つオービフォルド空間 (たとえ

*1 これをオービフォルドと見るには, 原点 $z = 0$ も含めなければならないだろう.

ば問題 2.6 を参照) や, 特別な微分幾何学的性質を持つ Calabi-Yau(カラビ-ヤウ) 空間が形成されるようなモデルも考察の対象となるわけである. 21.5 節参照.

2.9 量子力学と矩形井戸

- Planck 定数 \hbar
 - 光子のエネルギー E と角振動数 ω を関係づける比例係数 ($E = \hbar\omega$)
- 量子力学の基本的な交換関係 $[x^i, p_j] = i\hbar\delta^i_j$
 - d 次元空間では添字が d 通りの可能な値を取り得ると見なせば良い

無限に高い障壁を持つ 1 次元矩形井戸ポテンシャル

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq a) \\ \infty & (x \leq 0, a \leq x) \end{cases}$$

の下での粒子の波動関数 $\psi(x)$ に対して

$$\begin{array}{ll} \text{Schrödinger 方程式} & -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi, \quad (0 \leq x \leq a) \\ \text{境界条件} & \psi(0) = \psi(a) = 0 \end{array}$$

であり, これを満たす波動関数とエネルギー

$$\psi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right), \quad E_k = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2, \quad k = 1, 2, \dots, \infty$$

を得る.

2.9 について

式 (2.111): $-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi = E\psi$ の上 2 行「時間に依存する Schrödinger 方程式」は「時間に依存しない」の誤りだろう.

2.10 余剰次元を伴う矩形井戸

矩形井戸問題において, y 方向の余剰次元を加える. 同一視 $(x, y) \sim (x, y + 2\pi R)$ を導入し, 余剰次元は半径 $R \ll a$ にまでコンパクト化しているものとする.

このとき Schrödinger 方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi = E\psi$$

を条件

$$\psi(0, y) = \psi(a, y) = 0, \quad \psi(x, y) = \psi(x, y + 2\pi R)$$

の下で変数分離法にて解くと

$$\begin{aligned}\psi_{k,l}(x,y) &= \psi_k(x)\phi_l(y), \\ \psi_k(x) &= c_k \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right), \quad k = 1, 2, \dots \\ \phi_l(y) &= a_l \sin\left(\frac{ly}{R}\right) + b_l \cos\left(\frac{ly}{R}\right), \quad l = 0, 1, 2, \dots \\ E_{k,l} &= \frac{\hbar^2}{2m} \left[\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{l}{R}\right)^2 \right]\end{aligned}$$

を得る.

$l = 0$ のエネルギー準位 $E_{k,0}$ が余剰次元を導入する前のエネルギー準位を成し、新たに加わるエネルギー準位の中で最低の準位

$$E_{11} = \frac{\hbar^2}{2m} \left[\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{R}\right)^2 \right] \simeq \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{R}\right)^2 \quad (\because R \ll a)$$

は元の 1 次元問題の低エネルギー領域の準位に比べて遥かに高い。したがって小さな余剰次元の効果は通常のエネルギー水準における実験には現れない。

2.10 について

式 (2.119) の上 2 行「 $\psi_{k,l}(x,y) = \psi_k(x)\psi_l(y)$ 」における $\psi_l(y)$ は $\phi_l(y)$ の誤りと考えられる。

問題 (第 2 章)

問題 2.1 単位系に関する訓練

(a) 教科書 p.12, 1.22 「1 クーロンが何 esu であるかを算出できる (問題 2.1)」について、SI 単位系の電荷 q が Gauss 単位系の電荷 Q に対応するとき、これらは次元が異なり、

$$\frac{Q^2}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2} \Rightarrow Q = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}} q$$

で関係付けられる。よって $q = 1\text{C}$ が $Q = Q^*\text{esu}$ に対応するとき (Q^* は数値)

$$Q^*\text{esu} = \sqrt{8.99 \times 10^9} \text{N}^{1/2} \text{m}.$$

こうして「クーロンと esu は関係しており、後者は 3 つの基本単位によって書き表すことができる」(教科書 p.12, 1.23,24).

第3章 様々な次元における電磁気学と重力

すべての相互作用を説明する理論の候補である弦理論は、Maxwell の電磁気学とその非線形な類似物、および重力を含んでいる。我々は4次元の電気力学の相対論的な定式化を復習し、そこから別の次元数における電磁力学を定義する方法を与える。Einstein の重力理論の簡単な説明を行い、そのNewton 力学極限を利用して Planck 長さ と重力定数の関係を、いろいろな次元に関して論じる。コンパクト化の重力定数への影響を調べ、仮に比較的大きな余剰次元が存在していても、それが観測から逃れ得ることを説明する。

3.1 古典電磁力学

電磁気学の単位系として Heaviside-Lorentz 単位系を用いる。

- コンパクト化した空間次元を伴う時空において、ポテンシャルの組 (Φ, \vec{A}) と (Φ', \vec{A}') が同じ電磁場を与えるけれども、両者を結び付けるゲージパラメーターが見出せないということも起こり得る。
- コンパクト空間全体で定義可能なポテンシャルが存在しない可能性がある。

ポテンシャルを複数用意して、

各々が定義されている領域を継ぎはぎするとコンパクト空間全体が覆われるようにし、

継ぎはぎの重なり合う領域でポテンシャルがゲージ変換で結び付けられていれば良い。

計算練習 3.1

ゲージ変換 (3.10) によって電場は変わらない:

$$\vec{E}' = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{A} + \vec{\nabla} \epsilon) - \vec{\nabla} \left(\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \epsilon}{\partial t} \right) = \vec{E}.$$

3.2 3次元時空の電磁気学

z 座標が省かれた3次元時空への次元低減

- あらゆる量が z 依存性を持たないことを要請
- これは電場と磁場の z 成分を無くすることを意味していない (そのような措置はうまくいかない)

粒子の運動は (x, y) 面内に制約されるため、粒子の運動量の z 成分をゼロに保つ条件

$$E_z = 0, \quad B_x = B_y = 0$$

が必要であり、これは Maxwell 方程式

$$\partial_y E_z - \partial_z E_y = -\frac{1}{c} \partial_t B_x, \quad \partial_z E_x - \partial_x E_z = -\frac{1}{c} \partial_t B_y$$

と矛盾しない (各項がゼロだから)。

こうして3次元時空の電磁気学における場合は、2次元ベクトル \vec{E} と (擬) スカラー場 B_z となる。

3.2 について

z 座標が省かれた 3 次元時空においても, xy 面内に分布するベクトルポテンシャル \vec{A} の渦として (擬) スカラー場 B_z を理解することができる.

3.3 相対論的な電磁気学

電磁ポテンシャルは 4 元ベクトル $A^\mu = (\Phi, \vec{A})$ の成分を成し, 電磁場は場の強度 $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ の成分を成す.

ポテンシャルを導入すると, Maxwell 方程式

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

は恒等式

$$T_{\lambda\mu\nu} \equiv \partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0$$

として自動的に満たされる.

$$j^\mu = (c\rho, \vec{j}), \quad \partial^\mu = \eta^{\mu\alpha} \partial_\alpha, \quad F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

を定義すると, Maxwell 方程式

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

は

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \frac{1}{c} j^\mu$$

にまとめられる.

空間が d 次元の場合にも, \vec{A} を d 次元空間のベクトルとして $A^\mu = (\Phi, \vec{A})$ とし, [$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ に対して] F^{0i} を電場成分 E_i , F^{ij} を磁場成分と見なす. また, 任意次元における Maxwell 理論を

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \frac{1}{c} j^\mu$$

で “定義” する.

計算練習 3.2

式 (3.14): $A_\mu = (-\Phi, A^1, A^2, A^3)$ により

$$\begin{aligned} \text{式 (3.21): } A_\mu &\rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \varepsilon \\ \Leftrightarrow \text{式 (3.10): } &\begin{cases} \Phi &\rightarrow \Phi' = \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \\ \vec{A} &\rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \varepsilon \end{cases} \end{aligned}$$

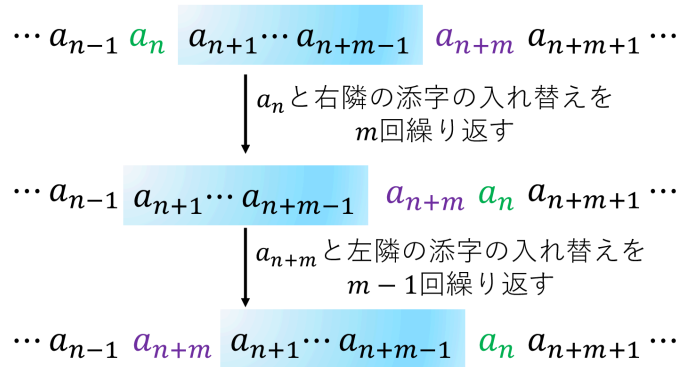


図6 任意の2つの添字 a_n と a_{n+m} の入れ替え

計算練習 3.3

$$\begin{aligned}
T_{\mu\lambda\nu} &= \partial_\mu F_{\lambda\nu} + \partial_\lambda F_{\nu\mu} + \partial_\nu F_{\mu\lambda} \\
&= -\partial_\lambda F_{\mu\nu} - \partial_\mu F_{\nu\lambda} - \partial_\nu F_{\lambda\mu} \\
&= -T_{\lambda\mu\nu}, \\
T_{\lambda\nu\mu} &= \partial_\lambda F_{\nu\mu} + \partial_\nu F_{\mu\lambda} + \partial_\mu F_{\lambda\nu} \\
&= -\partial_\lambda F_{\mu\nu} - \partial_\mu F_{\nu\lambda} - \partial_\nu F_{\lambda\mu} \\
&= -T_{\lambda\mu\nu}.
\end{aligned}$$

計算練習 3.4

第1式の反対称性は場の強度の定義から明らか。第2式、第3式について、テンソルの添字の上げ下げは計量テンソルとの縮約によって定義されることに注意する(それ故、テンソルからテンソルが作られる)。

3.3 について

教科書 p.48, 1.11,12 「任意の2つの添字の入れ替えを実現するには、必ず隣接する添字を奇数回入れ替える必要がある(何故か分かりますか?)」について、図6のように添字 a_n と a_{n+m} を入れ替えると、隣接する添字を $2m-1$ 回入れ替えることになる。

3.4 高次元の球面

[3.5節では点電荷が d 次元空間に作る静電場を求める。本節ではその準備として、 d 次元球面の体積(球体の表面積)の公式を導く。この結果は23.9節でも用いる。]

d 次元球体

$$B^d(R) : x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_d^2 \leq R^2$$

と、それを囲う $d-1$ 次元球面

$$S^{d-1}(R) : x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_d^2 = R^2$$

を定義する。このように“球体”と“球面”は日常的には混同されがちであるけれど、数学的には区別される。[実際、以下で求めるのは“球面”の“体積”であって、球体の体積ではない。] なお引数 R を省いてある場合には $R=1$ を意味するものとする。

- $d=2$

$B^2(R)$ は円盤, $S^1(R)$ は円周, その体積 (長さ) は $\text{vol}(S^1(R)) = 2\pi R$

- $d=3$

$B^3(R)$ は球体, $S^2(R)$ は球面, その体積 (面積) は $\text{vol}(S^2(R)) = 4\pi R^2$

球面 $S^{d-1}(R)$ の体積を計算する。

$$\text{vol}(S^{d-1}(R)) = R^{d-1} \text{vol}(S^{d-1})$$

により, 単位球面の体積 $\text{vol}(S^{d-1})$ を求めれば充分である。 $r^2 \equiv x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_d^2$ に対して積分

$$\begin{aligned} I_d &\equiv \int_{\mathbf{R}^d} dx_1 dx_2 \cdots dx_d e^{-r^2} \\ &= \begin{cases} \prod_{i=1}^d \int_{-\infty}^{\infty} dx_i e^{-x_i^2} = \pi^{d/2} & \text{(Gauss 積分)} \\ \int_0^{\infty} dr \text{vol}(S^{d-1}(r)) e^{-r^2} = \cdots = \frac{1}{2} \text{vol}(S^{d-1}) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) & \text{(球殻積分)} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.49)$$

[球殻積分の詳細は下記] の 2通りの計算結果を等置して

$$\text{vol}(S^{d-1}) = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$$

を得る。ただし

$$\Gamma(x) \equiv \int_0^{\infty} dt e^{-t} t^{x-1}, \quad x > 0$$

はガンマ関数であり, 引数が半整数または整数のとき

$$\Gamma\left(\frac{2n-1}{2}\right) = \frac{2n-3}{2} \cdot \frac{2n-5}{2} \cdots \frac{1}{2} \sqrt{\pi}, \quad (3.58)$$

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad (3.59)$$

(n は自然数) [説明は下記] となることから $\text{vol}(S^{d-1})$ の値が具体的に計算される。上式は $\text{vol}(S^1) = 2\pi, \text{vol}(S^2) = 4\pi$ を再現する。

3.4 節, 式の導出など

■式 (3.49) の球殻積分の詳細 $t = r^2$ と変数変換すると, 式 (3.49):

$$\int_0^{\infty} dr \text{vol}(S^{d-1}(r)) e^{-r^2} = \text{vol}(S^{d-1}) \int_0^{\infty} dr r^{d-1} e^{-r^2} = \frac{1}{2} \text{vol}(S^{d-1}) \int_0^{\infty} dt e^{-t} t^{\frac{d}{2}-1} = \frac{1}{2} \text{vol}(S^{d-1}) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)$$

を得る。

■半整数または整数の引数を持つガンマ関数の式 (3.58), (3.59) の説明

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty dt e^{-t} t^x = - \int_0^\infty dt \left(\frac{d}{dt} (e^{-t} t^x) - x e^{-t} t^{x-1} \right)$$

の最右辺における境界項は, $x > 0$ であればゼロになるので, 漸化式

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad x > 0$$

を得る. これを

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty dt e^{-t} t^{-1/2} = 2 \int_0^\infty du e^{-u^2} = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(1) = \int_0^\infty dt e^{-t} = 1$$

と合わせて用いれば良い.

計算練習 3.5

球面の体積の表式

$$\text{vol}(S^{d-1}(r)) = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} r^{d-1}$$

から球体の体積が球殻積分により

$$\text{vol}(B^d(R)) = \int_0^R dr \text{vol}(S^{d-1}(r)) = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \int_0^R dr r^{d-1} = \frac{\pi^{d/2}}{\frac{d}{2}\Gamma(\frac{d}{2})} R^d = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)} R^d$$

と求まる.

3.4 について

半径 1 の球体について, 半径は無次元量であり, 半径 R の球体との相似比 R が長さの次元を持つ. 或いは積分 (3.47):

$$I_d \equiv \int_{\mathbf{R}^d} dx_1 dx_2 \cdots dx_d e^{-r^2}$$

の被積分関数 e^{-r^2} において, 指数関数の引数 $-r^2$ が次元を持つてはならないことを考えると, はじめから r は適当に無次元化された長さと考えた方が良いかもしれない.

3.5 高次元における電場

d 次元空間において, 点電荷によって生じる電場を計算する. Maxwell 方程式 $\partial_i F^{0i} = \rho$ は Gauss の法則

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho$$

を与える. ところで 3 次元空間における発散定理が成り立つのと同じ理由で, d 次元空間でも同様の定理が成り立つ. また点電荷の作る電場は放射状である. よって点電荷 q を中心とする半径 r の球面 $S^{d-1}(r)$ に囲まれた球体 $B^d(r)$ にわたって上式 (Gauss の法則) を積分すると

$$q = \int_{B^d(r)} d(\text{vol}) \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = E(r) \text{vol}(S^{d-1}(r)), \quad \therefore E(r) = \frac{\Gamma(d/2)}{2\pi^{d/2}} \frac{q}{r^{d-1}}$$

を得る. 電場 $E(r)$ の動径依存性 $1/r^{d-1}$ は空間の次元 d と関係している.

計算練習 3.6

d 次元空間における電場の式 (3.74) は $d = 3$ に対して

$$E(r) = \frac{\sqrt{\pi}/2}{2\pi^{3/2}} \frac{q}{r^2} = \frac{q}{4\pi r^2}$$

を与える.

計算練習 3.7

2つの電荷 q の間に働く力の次元は

$$\frac{ML}{T^2} = \frac{[q]^2}{L^{d-1}}$$

なので電荷の次元は $[q] = M^{1/2}L^{d/2}T^{-1}$ となる. これは空間の次元 d に依存する.

3.6 重力と Planck 長さ

- Newton の重力理論を用いて, 各種次元における Planck 長さの定義と, その重力定数との関係を理解
- 一般相対性理論は弦理論の, 長距離かつ重力の弱い極限にあたる

弱い重力が存在すると, 計量には Minkowski 計量からの小さな揺らぎ $h_{\mu\nu}(x)$ が生じる:

$$\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x).$$

Einstein 方程式は $h_{\mu\nu}$ についての線形化された方程式に近似的に書き換えられ, 座標の無限小の変更 $x'^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon^{\mu}(x)$ に伴う $h^{\mu\nu} (\equiv \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}h_{\alpha\beta})$ の変更

$$h^{\mu\nu} \rightarrow h^{\mu\nu} + \partial^{\mu}\varepsilon^{\nu} + \partial^{\nu}\varepsilon^{\mu}$$

はこれを不変にするゲージ変換である. [$h_{\mu\nu}(x)$ に対する線形化された場の方程式について, 本稿次節で補足しつつまとめる.]

3つの基本定数 G, c, \hbar の数値がすべて 1 になるような単位系として Planck 単位系を導入すると, Planck 単位系における長さや時間や質量の単位量はそれぞれ

$$\text{Planck 長さ } l_P = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} = 1.6 \times 10^{-33} \text{ cm}$$

⇐ 「極端に短い」

$$\text{Planck 時間 } t_P = \frac{l_P}{c} = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^5}} = 5.4 \times 10^{-44} \text{ s}$$

⇐ 「信じられないくらい短い」「光が Planck 長さを進む時間」

$$\text{Planck 質量 } m_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 2.2 \times 10^{-5} \text{ g}$$

⇐ 「大変に大きな質量」「陽子質量のおおよそ 10^{19} 倍」

となる.

3.6 について

■重力場のゲージ変換の復習 重力場が弱い場合を考えると、計量が

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1$$

となる座標系が存在すると考えられる。座標変換を行うと計量も変換されるけれど、新しい座標系の計量も上と同じ条件を満たすような一連の座標変換が存在する。実際、 $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu(x)$ という座標変換に対して $h^{\mu\nu}$ は

$$h^{\mu\nu} \rightarrow h'^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} + \partial^\mu \varepsilon^\nu + \partial^\nu \varepsilon^\mu \quad (3.84)$$

と変化するので [本稿次節で導出], $|\partial^\mu \varepsilon^\nu|$ が十分小さいようなゲージ関数 ε^μ を用いて変換を行えば良い。重力場のゲージ変換とは、具体的にはこのような座標変換のことである。

1つの便利なゲージは Lorenz ゲージと呼ばれるものである (もう1つの重要な例として、10.6節の光錐ゲージが挙げられる)。ゲージ変換によって結ばれる無数の近似的 Lorenz 座標系の中に、

$$\bar{h}^{\mu\nu} \equiv h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}h \quad (\text{ただし } h \equiv h^\mu{}_\mu)$$

が Lorenz ゲージ条件

$$\partial_\nu \bar{h}^{\mu\nu} = 0$$

を満たすものが存在する。実際、ゲージ変換 $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu$ に対して

$$\partial_\nu \bar{h}^{\mu\nu} \rightarrow \partial'_\nu \bar{h}'^{\mu\nu} = \partial_\nu \bar{h}^{\mu\nu} - \partial^\nu \partial_\nu \varepsilon^\mu$$

となるので、

$$\partial^\nu \partial_\nu \varepsilon^\mu = \square \varepsilon^\mu = \partial_\nu \bar{h}'^{\mu\nu}$$

の解 ε^μ を用いてゲージ変換を行えば、新しい座標系の $\bar{h}^{\mu\nu}$ はゲージ条件 $\partial_\nu \bar{h}'^{\mu\nu} = 0$ を満たす。

Lorenz ゲージの下では、線形化された Einstein 方程式は源の項を持つ波動方程式

$$\square \bar{h}^{\mu\nu} = -16\pi T^{\mu\nu}$$

に簡略化される。

■線形化された $h_{\mu\nu}$ の式 (3.82) $h_{\mu\nu}$ の1次までとると、曲率テンソルは

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}(h_{\alpha\nu,\beta\mu} + h_{\beta\mu,\alpha\nu} - h_{\alpha\mu,\beta\nu} - h_{\beta\nu,\alpha\mu})$$

と表される [3, p.247]. ただし $(\dots)_{,\mu} \equiv \partial_\mu(\dots)$, $(\dots)^{\cdot\mu} \equiv \partial^\mu(\dots)$, etc とし、以降いちいち断らない。これは次のように確かめられる。

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = g_{\alpha\lambda} R^\lambda{}_{\beta\mu\nu} = g_{\alpha\lambda} (\Gamma^\lambda{}_{\beta\nu,\mu} - \Gamma^\lambda{}_{\beta\mu,\nu} + \Gamma^\lambda{}_{\sigma\mu} \Gamma^\sigma{}_{\beta\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\sigma\nu} \Gamma^\sigma{}_{\beta\mu})$$

において

$$g_{\alpha\lambda} \Gamma^\lambda{}_{\beta\nu} \equiv \Gamma_{\alpha\beta\nu} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta,\nu} + g_{\nu\alpha,\beta} - g_{\beta\nu,\alpha}) = \frac{1}{2}(h_{\alpha\beta,\nu} + h_{\nu\alpha,\beta} - h_{\beta\nu,\alpha})$$

は、したがって $\{\Gamma^\lambda_{\sigma\mu}\}$ は $h_{\mu\nu}$ の 1 次だから

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} \simeq g_{\alpha\lambda}(\Gamma^\lambda_{\beta\nu,\mu} - \Gamma^\lambda_{\beta\mu,\nu}) = \frac{1}{2}\{(\cancel{h_{\alpha\beta,\nu\mu}} + h_{\nu\alpha,\beta\mu} - h_{\beta\nu,\alpha\mu}) - (\cancel{h_{\alpha\beta,\mu\nu}} + h_{\mu\alpha,\beta\nu} - h_{\beta\mu,\alpha\nu})\}$$

を得る.

さらに Ricci テンソルとスカラー曲率はそれぞれ

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta} &\equiv R^\mu_{\alpha\mu\beta} = g^{\mu\nu} R_{\nu\alpha\mu\beta} \\ &= \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(h_{\nu\beta,\alpha\mu} + h_{\alpha\mu,\nu\beta} - h_{\nu\mu,\alpha\beta} - h_{\alpha\beta,\nu\mu}) + O(h_{\alpha\beta}^2) \\ &= \frac{1}{2}(h_{\nu\beta,\alpha}{}^{,\mu} + h_{\alpha\mu,\beta}{}^{,\nu} - h_{,\alpha\beta} - h_{\alpha\beta,\mu}{}^{,\nu}) + O(h_{\alpha\beta}^2), \\ R &\equiv g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu} \\ &= \eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} \frac{1}{2}(h_{\alpha\nu,\mu\beta} + h_{\mu\beta,\alpha\nu} - h_{\alpha\beta,\mu\nu} - h_{\mu\nu,\alpha\beta}) + O(h_{\alpha\beta}^2) \\ &= \frac{1}{2}(h_{\alpha\nu}{}^{,\nu\alpha} + h_{\mu\beta}{}^{,\beta\mu} - h_{,\mu}{}^{,\mu} - h_{,\alpha}{}^{,\alpha}) + O(h_{\alpha\beta}^2) \quad (\because \eta^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} = h) \\ &= (h_{\mu\nu}{}^{,\mu\nu} - h_{,\mu}{}^{,\mu}) + O(h_{\alpha\beta}^2) \end{aligned}$$

となるので, Einstein テンソルは

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta} &\equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R \\ &= R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}R + O(h_{\alpha\beta}^2) \\ &= \frac{1}{2}(h_{\nu\beta,\alpha}{}^{,\nu} + h_{\alpha\mu,\beta}{}^{,\mu} - h_{,\alpha\beta} - h_{\alpha\beta,\mu}{}^{,\mu}) - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}(h_{\mu\nu}{}^{,\mu\nu} - h_{,\mu}{}^{,\mu}) + O(h_{\alpha\beta}^2) \end{aligned} \quad (1)$$

で与えられる.

なおこれは

$$\bar{h}^{\alpha\beta} \equiv h^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}h$$

を用いて

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{2} \left[\left(h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}h \right)_{,\mu}{}^{,\mu} + \eta_{\alpha\beta} \left(h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \right)_{,\mu\nu} - \left(h_{\alpha\mu} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\mu}h \right)_{,\beta}{}^{,\mu} - \left(h_{\beta\mu} - \frac{1}{2}\eta_{\beta\mu}h \right)_{,\alpha}{}^{,\mu} \right] + O(h_{\alpha\beta}^2) \\ &= -\frac{1}{2}[\bar{h}_{\alpha\beta,\mu}{}^{,\mu} + \eta_{\alpha\beta}\bar{h}_{\mu\nu}{}^{,\mu\nu} - \bar{h}_{\alpha\mu,\beta}{}^{,\mu} - \bar{h}_{\beta\mu,\alpha}{}^{,\mu}] + O(h_{\alpha\beta}^2) \end{aligned}$$

と書き換えられる. これは文献 [3, p.248] の式 (8.32) である.

さて, Einstein テンソルの表式 (1) を用いると

$$\begin{aligned} G^{\mu\nu} &= g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} G_{\alpha\beta} \simeq \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} G_{\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{2}\eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} \{(\partial_\alpha \partial^\tau h_{\tau\beta} + \partial_\beta \partial^\sigma h_{\alpha\sigma} - \partial_\alpha \partial_\beta h - \partial_\sigma \partial^\sigma h_{\alpha\beta}) - \eta_{\alpha\beta}(\partial^\sigma \partial^\tau h_{\sigma\tau} - \partial_\sigma \partial^\sigma h)\} \\ &= -\frac{1}{2}\{\partial^2 h^{\mu\nu} - \partial_\alpha(\partial^\mu h^{\nu\alpha} + \partial^\nu h^{\mu\alpha}) + \partial^\mu \partial^\nu h\} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(\partial^\sigma \partial^\tau h_{\sigma\tau} - \partial^2 h) \end{aligned}$$

なので, Einstein 方程式 $G^{\mu\nu} = 0$ は

$$\{\partial^2 h^{\mu\nu} - \partial_\alpha(\partial^\mu h^{\nu\alpha} + \partial^\nu h^{\mu\alpha}) + \partial^\mu \partial^\nu h\} + \eta^{\mu\nu}(\partial^\sigma \partial^\tau h_{\sigma\tau} - \partial^2 h) = 0$$

を与える。これは教科書の式 (3.82):

$$\partial^2 h^{\mu\nu} - \partial_\alpha (\partial^\mu h^{\nu\alpha} + \partial^\nu h^{\mu\alpha}) + \partial^\mu \partial^\nu h = 0$$

と比較される式であり、実際には左辺に付加的な項 $\eta^{\mu\nu}(\partial^\sigma \partial^\tau h_{\sigma\tau} - \partial^2 h)$ が現れると考えられる。実際、この式は文献 [4, p.186] に見出される。ただし Einstein 方程式をこのように訂正しても、今後の議論には影響しないことを 10.6 節で確かめる予定である。

■弱い重力場のゲージ変換 (3.84) の導出 座標変換 (3.83): $x'^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon^{\mu}(x)$ に対して $\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} = \delta^{\mu}_{\alpha} + \partial_{\alpha}\varepsilon^{\mu}$ なので、2 階反変テンソルの変換則は

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu} &= (\delta^{\mu}_{\alpha} + \partial_{\alpha}\varepsilon^{\mu})(\delta^{\nu}_{\beta} + \partial_{\beta}\varepsilon^{\nu})(\eta^{\alpha\beta} + h^{\alpha\beta}) \\ &\simeq \delta^{\mu}_{\alpha}\delta^{\nu}_{\beta}(\eta^{\alpha\beta} + h^{\alpha\beta}) + \delta^{\mu}_{\alpha}(\partial_{\beta}\varepsilon^{\nu})\eta^{\alpha\beta} + \delta^{\nu}_{\beta}(\partial_{\alpha}\varepsilon^{\mu})\eta^{\alpha\beta} \\ &= \eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu} + \partial^{\mu}\varepsilon^{\nu} + \partial^{\nu}\varepsilon^{\mu} \end{aligned}$$

となる。ここで右辺は座標 x の関数であるのに対し、左辺は同一の点を表す新しい座標 x' の関数 $\eta^{\mu\nu} + h'^{\mu\nu}(x')$ である。しかしながら微小量の 1 次までの近似では

$$h'^{\mu\nu}(x') = h'^{\mu\nu}(x + \varepsilon) \simeq h'^{\mu\nu}(x) \simeq h^{\mu\nu}(x)$$

となって、引数が x にそろうので [2, p.302], 式 (3.84):

$$\delta h^{\mu\nu} = \partial^{\mu}\varepsilon^{\nu} + \partial^{\nu}\varepsilon^{\mu}$$

が得られる。

■Planck 単位系

$$\text{Planck 長さ } l_{\text{P}} = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}}, \quad \text{Planck 時間 } t_{\text{P}} = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^5}}, \quad \text{Planck 質量 } m_{\text{P}} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$$

を単位として長さ, 時間, 質量をそれぞれ無次元化すると, 3 つの基本単位 G, c, \hbar はそれぞれ

$$G \rightarrow \frac{G}{l_{\text{P}}^3/m_{\text{P}}t_{\text{P}}^2} = 1, \quad c \rightarrow \frac{c}{l_{\text{P}}/t_{\text{P}}} = 1, \quad \hbar \rightarrow \frac{\hbar}{m_{\text{P}}l_{\text{P}}^2/t_{\text{P}}} = 1$$

と無次元化される。逆に $G = 1, c = 1, \hbar = 1$ と置く Planck 単位系では $l_{\text{P}} = \sqrt{G\hbar/c^3}$, etc. が 1 と置かれるため、確かに長さ, 時間, 質量は無次元量と見なされる。言い換えれば Planck 単位系では $l_{\text{P}}, t_{\text{P}}, m_{\text{P}}$ をそれぞれ長さ, 時間, 質量の単位として, 単位量との比を考えている (2.1 節参照)。

教科書 p.58 下から 5 行目「Planck 長さは極端に短く」について, Planck 長さが式 (3.90): $l_{\text{P}} = 1.6 \times 10^{-33} \text{cm}$ であるのに対し, 例えば Bohr 半径は $a_0 = 5.3 \times 10^{-9} \text{cm}$ である。

なお実際にこのような単位系が用いられるのは式 (9.6): $\hbar = c = 1$ 以降である。しかしここでも $G = 1$ までは要求されておらず, したがってあらゆる物理量が無次元化されるわけではない。実際このとき全ての物理量は質量のベキとして表すことができる。(このように $\hbar = c = 1$ だけを要求する単位系を自然単位系と呼んで, Planck 単位系と区別しているようにも読める。しかし式 (22.120) の箇所では $G = 1$ とおく単位系も自然単位系と呼んでいる。)

最後に p.58 の訳註を引用する。

c と \hbar が弦理論の構築以前の前提として定まっている基礎定数である (と仮定される) のに対し, G はこれらと同等に基礎的な定数という位置づけのものではない. まず, 本章これ以降で扱われるように, G は時空次元に依存して定義され, 余剰次元の体積に依存するということがある. また, 弦理論の総体的な構想によれば, G は ‘力学的に’ ディラトン場の解 \rightarrow 弦の結合定数 $g \rightarrow$ 重力定数 G という順序で従属的に決まるべき数値と見なされ (13.4 節), ある意味で ‘被調整的’ な性格を伴う. したがって, G を利用して定義される Planck 単位系にも, G に (もしくは g に) ‘合わせて’ 決めてある可変の単位系という意味合いがある ($G \propto g^2$ なので $l_P \propto g, t_P \propto g, m_P \propto 1/g$). 22.6 節の後半を参照.

計算練習 3.8

$$[G^\alpha c^\beta \hbar^\gamma] = M^{-\alpha+\gamma} L^{3\alpha+\beta+2\gamma} T^{-(2\alpha+\beta+\gamma)}$$

に対して, まず $l_P = G^\alpha c^\beta \hbar^\gamma$ において, これが長さの単位を持つことを要求すると

$$\begin{aligned} -\alpha + \gamma &= 0, & 3\alpha + \beta + 2\gamma &= 1, & 2\alpha + \beta + \gamma &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha &= 1/2, & \beta &= -3/2, & \gamma &= 1/2 \end{aligned}$$

となって式 (3.90): $l_P = \sqrt{G\hbar/c^3}$ を得る.

次に $t_P = G^\alpha c^\beta \hbar^\gamma$ において, これが時間の単位を持つことを要求すると

$$\begin{aligned} -\alpha + \gamma &= 0, & 3\alpha + \beta + 2\gamma &= 0, & 2\alpha + \beta + \gamma &= -1 \\ \Leftrightarrow \alpha &= 1/2, & \beta &= -5/2, & \gamma &= 1/2 \end{aligned}$$

となって式 (3.91): $t_P = \sqrt{G\hbar/c^5}$ を得る.

最後に $m_P = G^\alpha c^\beta \hbar^\gamma$ において, これが質量の単位を持つことを要求すると

$$\begin{aligned} -\alpha + \gamma &= 1, & 3\alpha + \beta + 2\gamma &= 0, & 2\alpha + \beta + \gamma &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha &= -1/2, & \beta &= 1/2, & \gamma &= 1/2 \end{aligned}$$

となって式 (3.92): $m_P = \sqrt{\hbar c/G}$ を得る.

計算練習 3.9

Planck エネルギー

$$m_P c^2 = 2.2 \times 10^{-8} \text{kg} \times (3.0 \times 10^8 \text{m/s})^2 \times \frac{1 \text{eV}}{1.6 \times 10^{-19} \text{J}} = 1.2 \times 10^{28} \text{eV} = 1.2 \times 10^{19} \text{GeV}$$

は電子の静止エネルギー $m_e c^2 = 0.51 \text{MeV}$ より遥かに大きい.

3.7 重力ポテンシャル

重力場 \vec{g} を, 質量 m に及ぼす重力が $m\vec{g}$ となるように定義する. また $\vec{g} = -\vec{\nabla} V_g$ を満たす重力ポテンシャル V_g を導入する. このとき任意次元で

$$[V_g] = \frac{[\text{エネルギー}]}{M}$$

となる.

d 次元空間 ($D = d + 1$ 次元時空) における重力ポテンシャル $V_g^{(D)}$ は

$$\vec{\nabla}^2 V_g^{(D)} = 4\pi G^{(D)} \rho_m$$

を満たすと考える。左辺の単位は空間の次元に依らないのに対し、右辺の質量密度 ρ_m の単位は空間の次元に依るので、重力定数 $G^{(D)}$ の単位も空間の次元によって変わる。

計算練習 3.10

重力場 (3.96): $\vec{g} = -\vec{\nabla}V_g$ は渦無し場なので、粒子 (質量 m) を閉ループに沿って 1 巡させるときに、重力に逆らう力 $+m\vec{\nabla}V_g$ の閉ループに沿う周回積分に他ならない、重力場に対して行う正味の仕事はゼロである。

3.7 について

重力定数 $G^{(D)}$ の単位を具体的に調べておく。式 (3.97):

$$[V_g] = \frac{[\text{エネルギー}]}{M} = \frac{L^2}{T^2}$$

より式 (3.102): $\vec{\nabla}^2 V_g^{(D)} = 4\pi G^{(D)} \rho_m$ の両辺の単位は

$$\frac{1}{T^2} = [G^{(D)}] \frac{M}{L^d}$$

となるので

$$[G^{(D)}] = M^{-1} L^{D-1} T^{-2}$$

を得る。

3.8 次元と Planck 長さ, 計算練習 3.11

式 (3.102): $\vec{\nabla}^2 V_g^{(D)} = 4\pi G^{(D)} \rho_m$ の左辺の単位が, 従って右辺の単位が次元 D に依らないことから, $G^{(D)}$ の単位は

$$[G^{(D)}] \frac{M}{L^{D-1}} = [G] \frac{M}{L^3} \rightarrow [G^{(D)}] = L^{D-4} [G]$$

と決まる。ここで式 (3.90): $l_P = \sqrt{G\hbar/c^3}$ より

$$[G] = \frac{[c^3] L^2}{[\hbar]} \tag{3.104}$$

だから

$$[G^{(D)}] = \frac{[c^3] L^{D-2}}{[\hbar]}$$

を得る。そこで D 次元時空の Planck 長さ $l_P^{(D)}$ を

$$\begin{aligned} (l_P^{(D)})^{D-2} &= \frac{\hbar G^{(D)}}{c^3} \\ &= \frac{\hbar G}{c^3} \cdot \frac{G^{(D)}}{G} = l_P^2 \frac{G^{(D)}}{G} \end{aligned} \tag{3.108}$$

として導入する。

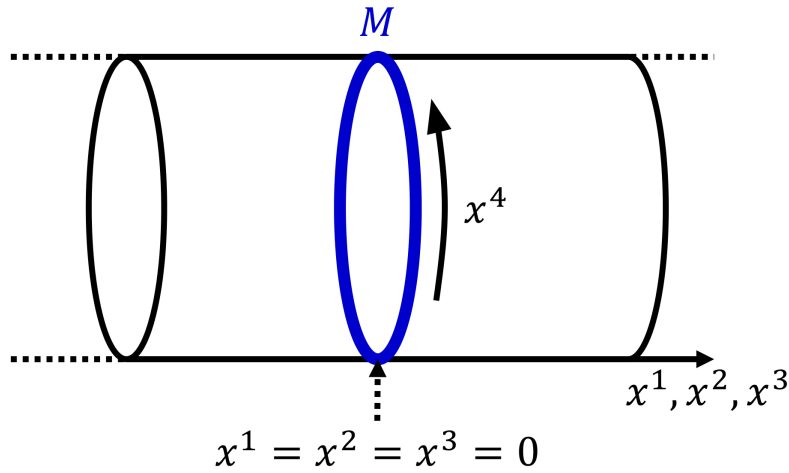


図7 半径 R の円にコンパクト化した x^4 次元と、これに巻き付く全質量 M の輪 (教科書の図 3.2(p.62))

■まとめ

- $G^{(D)}$ の定義 $\vec{\nabla}^2 V_g^{(D)} = 4\pi G^{(D)} \rho_m$
- $G^{(D)}$ の単位 $[G^{(D)}] = L^{D-4}[G]$
- $l_p^{(D)} = \hbar G^{(D)} / c^3$ を導入.

3.9 重力定数とコンパクト化

余剰次元はコンパクト空間を形成しており、「これから示すように、4次元の実効的な Planck 長さは、元々の高次元の Planck 長さの値と、余剰次元の体積に依存して決まる。」

「本節では、重力定数に対するコンパクト化の影響を調べる。」

$G^{(5)}$ の与えられた 5次元時空のうち x^4 次元が半径 $2\pi R$ にコンパクト化しているとして $G^{(4)}$ を計算する。 x^4 方向の輪 $x^1 = x^2 = x^3 = 0$ に沿って質量 $M = 2\pi R m$ が一様に分布しているとする (m は単位長さあたりの質量, 図7参照).

5次元時空における質量密度は

$$\rho^{(5)} = m\delta(x^1)\delta(x^2)\delta(x^3)$$

で与えられる。一方、実効的な 4次元時空では質量は位置 $x^1 = x^2 = x^3 = 0$ の質点のように見えるから、質量密度は

$$\rho^{(4)} = M\delta(x^1)\delta(x^2)\delta(x^3)$$

で与えられ、ここから

$$\rho^{(5)} = \frac{1}{2\pi R} \rho^{(4)}$$

が得られる。よって 5次元時空における重力方程式

$$\vec{\nabla}_g^{(5)}(x^1, x^2, x^3) = 4\pi G^{(5)} \rho^{(5)}$$

は 4 次元時空における重力方程式

$$\vec{\nabla}^2 V_g^{(5)}(x^1, x^2, x^3) = 4\pi G \rho^{(4)}, \quad G = \frac{G^{(5)}}{2\pi R}$$

になり (ただし左辺の $V_g^{(5)}$ を 4 次元時空における重力ポテンシャルと見なす), 求める結果

$$\frac{G^{(5)}}{G} = 2\pi R \equiv l_C$$

を得る.

余剰次元が 2 つ以上ある場合には, 余剰次元の体積 (各余剰次元の長さの積) を V_C として, これは

$$\frac{G^{(D)}}{G} = V_C$$

と一般化される.

3.9 について

■誤植 p.62 一番下の行「 $\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) = 0$ 」は $\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) = 1$ の誤りだろう.

■まとめ 最終的な結果 $G^{(D)}/G = V_C$ は予告通り, D 次元時空の Planck 長さ $l_P^{(D)}$ と余剰次元の体積 V_C から 4 次元時空の Planck 長さ l_P を与える関係となっている. この導出では重力場の方程式における質量密度を考える際, 5 次元時空における図 7 の質量の輪が, 4 次元時空において空間原点に置かれた質点に見えることが鍵となっている.

3.10 大きな余剰次元

任意次元における Planck 長さ (3.108): $(l_P^{(D)})^{D-2} = l_P^2 \frac{G^{(D)}}{G}$ は, 重力定数とコンパクト化との関係 (3.117): $\frac{G^{(D)}}{G} = V_C$ により $(l_P^{(D)})^{D-2} = l_P^2 (l_C)^{D-4}$ となるので (ただし各余剰次元が共通の長さ l_C を持つものとして $V_C = (l_C)^{D-4}$ とした),

$$l_C = l_P^{(D)} \left(\frac{l_P^{(D)}}{l_P} \right)^{\frac{2}{D-4}}$$

を得る.

$l_P \sim 10^{-33}$ cm であり, $l_P^{(D)}$ を現在の加速器実験によって調べられている距離尺度 10^{-16} cm よりもいくぶん短い値 $l_P^{(D)} \sim 10^{-18}$ cm とする.

このとき $D = 5$ とすると $l_C \sim 10^{12}$ cm となり, このような大きな余剰次元が存在していれば, とっくの昔に検知されているはずである.

次に $D = 6$ とすると $l_C \sim 10 \mu\text{m}$ であり, これは光学顕微鏡でも見える程度の距離尺度となる. しかし尺度 l_C よりも遥かに長い距離尺度で成り立たなければならない重力の逆自乗則が確認されているのは約 $50 \mu\text{m}$ までなので, このような“大きな余剰次元”の存在は実験結果と抵触しない. 弦理論において開弦の振動として現れる Maxwell のゲージ場は余剰次元を“感知しない”ため, 電気力の逆自乗則が 10^{-11} cm まで確認されていることは大きな余剰次元の可能性を排除しない.

なお, Planck 質量と現実の素粒子の質量が大きく隔たっているという階層性は, 余剰次元が基本的な距離尺度よりもはるかに大きいことから生じるものと仮定される.

3.10 について

■ 「 $l_P^{(5)} \sim 10^{-18} \text{cm}$ で, $l_P \sim 10^{-33} \text{cm}$ であれば, 式 (3.119) により $l_C \sim 10^{12} \text{cm} \sim 10^7 \text{km}$ である. ……5次元では現実的な筋書きを作ることができなかった」(p.64, 1.16~1.19) について $D = 5$ の場合でも $l_P^{(5)}$ をより小さい値に設定すれば, 式 (3.119):

$$l_C = \frac{(l_P^{(5)})^3}{l_P^2}$$

の値をさらに小さくすることはできるだろう. 例えば式 (3.112) と同じ結果 $l_C \sim 10^{-3} \text{cm}$ を得たければ $l_P^{(5)} \sim 10^{-23} \text{cm}$ と設定すれば良い.

■ 「2つの質点間に働く力は, …… $1/r^4$ のような依存性を示すようになると考えられる」(p.65, 1.13, 1.14) について これは重力ポテンシャルの満たす式 (3.102) が静電ポテンシャルの満たす式 (3.76) と同じ形になるため, 重力場の r 依存性が電場の式 (3.74) と同じく $1/r^{d-1}$ となることから分かる.

■ 実効的な3次元空間を D3-ブレーンと捉えることについて p.65 の訳注を引用する.

あるいは, 実効的な3次元空間を, 複数の Dp -ブレーン ($p > 3$) の交差部分とする考え方もある (第21章).

問題 (第3章)

問題 3.3 3次元の電磁気学

3.2節 p.46 で言及されている問題 3.3 を解く.

(a) 粒子は z 方向に運動しないため, さらに $j_z = 0$ が要求される. これは Maxwell 方程式

$$\partial_x B_y - \partial_y B_x = \frac{1}{c} j_z + \frac{1}{c} \partial_t E_z$$

と矛盾しない (各項がゼロだから). 3次元時空における Maxwell 方程式は

$$\begin{aligned} \partial_x E_y - \partial_y E_x &= -\frac{1}{c} \partial_t B_z, \\ \partial_z B_z &= 0, \\ \partial_x E_x + \partial_y E_y &= \rho, \\ \partial_y B_z &= \frac{1}{c} j_x + \frac{1}{c} \partial_t E_x, \\ -\partial_x B_z &= \frac{1}{c} j_y + \frac{1}{c} \partial_t E_y, \end{aligned}$$

Lorentz 力の法則は

$$\frac{dp_x}{dt} = q \left(E_x + \frac{v_y}{c} B_z \right), \quad \frac{dp_y}{dt} = q \left(E_y - \frac{v_x}{c} B_z \right)$$

となる.

(b) 3次元時空において, $A^\mu = (\Phi, A^1, A^2)$ とすると $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ の成分は式 (3.20), すなわち

$$F_{01} = -E_x = -F_{10}, \quad F_{02} = -E_y = -F_{20}, \quad F_{03} = -E_z = -F_{30},$$

その他の成分はゼロ

で与えられる.

Maxwell 方程式 (3.34): $\partial_\nu F^{\mu\nu} = \frac{1}{c} j^\mu$ は

$$\begin{aligned}\mu = 0 &\rightarrow \partial_x E_x + \partial_y E_y = \rho, \\ \mu = 1 &\rightarrow -\frac{1}{c} \partial_t E_x + \partial_y B_z = \frac{1}{c} j_x, \\ \mu = 2 &\rightarrow -\frac{1}{c} \partial_t E_y - \partial_x B_z = \frac{1}{c} j_y\end{aligned}$$

を再現する.

運動方程式

$$\frac{dp_\mu}{ds} = \frac{q}{c} F_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{ds}$$

は, 粒子のエネルギーを \mathcal{E} と書くと

$$\begin{aligned}\mu = 0 &\rightarrow \dot{\mathcal{E}} = q(\dot{x}E_x + \dot{y}E_y), \\ \mu = 1 &\rightarrow \dot{p}_x = q\left(E_x + \frac{v_y}{c}B_z\right) \\ \mu = 2 &\rightarrow \dot{p}_y = q\left(E_y - \frac{v_x}{c}B_z\right)\end{aligned}$$

を成す (ドットは座標時間 t による微分).

問題 3.6 ガンマ関数に対する解析接続

この問題の結果は問題 12.4 で用いられる.

ガンマ関数の定義式において, 引数 z が正の実部を持つ複素数であるとする.

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty dt e^{-t} t^{z-1}, \quad \Re(z) > 0$$

$\Re(z) > 0$ において, 次式を証明せよ.

$$\Gamma(z) = \int_0^1 dt t^{z-1} \left(e^{-t} - \sum_{n=0}^N \frac{(-t)^n}{n!} \right) + \sum_{n=0}^N \frac{(-t)^n}{n!} \frac{1}{z+n} + \int_1^\infty dt e^{-t} t^{z-1}$$

上の右辺が $(z) > -N - 1$ において数学的に定義可能となる理由を述べよ. 右辺は $\Gamma(z)$ を $(z) > -N - 1$ へ解析接続した式にあたる. このガンマ関数が $0, -1, -2, \dots$ において極を持つことを説明し, $z = -n$ (n は正の整数) における留数を求めよ.

与式は

$$\int_0^1 dt t^{z-1} \sum_{n=0}^N \frac{(-t)^n}{n!} = \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 dt t^{z+n-1} = \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n}$$

より成立している.

もとの $\Gamma(z)$ の定義式では積分が下限 $t = 0$ で収束するために $\Re(z) > 0$ が課されるが, 変形後は

$$\int_0^1 dt t^{z-1} \left(e^{-t} - \sum_{n=0}^N \frac{(-t)^n}{n!} \right)$$

において被積分関数が $t^{z-1}\mathcal{O}(t^{N+1}) = \mathcal{O}(t^{\Re(z)+N})$ なので、これは $(z) > -N - 1$ であれば下限 $t = 0$ で発散しない。(そしてこの N は任意に選べる.)

与式の $\frac{1}{\{z-(-n)\}}$ の項を見れば、 $\Gamma(z)$ が $z = -n$ (n は正の整数) を 1 位の極に持つことが分かる。その留数は係数 $\frac{(-1)^n}{n!}$ である。

第4章 非相対論的な弦

4.1 横方向の振動に関する運動方程式

- 張力に逆らって弦を引き伸ばすと弦のエネルギーは高くなり、相対論的な弦に対してその静止質量は重くなる。
- 相対論的な弦に対して、張力 T_0 と質量線密度 μ_0 は $T_0 = \mu_0 c^2$ の関係にある (第6章)。現段階では、少なくとも両辺が同じ単位を持っていることを確認できる。
[一般に応力とエネルギー密度は同じ単位 (次元) を持つ。
ただしここでは T_0 は力であり、 μ_0 は質量の線密度である。]

静的な状態において x 軸の $0 \leq x \leq a$ を占め、 y 方向にのみ振動する古典弦を考える (単位長さあたりの質量 μ_0 、弦の全質量 $M = \mu_0 a$)。小さな振動 $|\partial y / \partial x| \ll 1$ を仮定して張力 T_0 を一定と見なすと、 x から $x + dx$ までの素片に対する運動方程式

$$(\mu_0 dx) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x+dx} - T_0 \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_x \simeq T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx$$

は波動方程式

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v_0^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \quad v_0 \equiv \sqrt{\frac{T_0}{\mu_0}}$$

になる。

4.2 境界条件と初期条件

- Dirichlet 境界条件
弦の両端が壁に固定されている条件:

$$y = 0 \quad (x = 0, a).$$

- Neumann 境界条件
図8のように弦の両端それぞれに質量のない小さな輪をつけて摩擦のない支柱に通したとき、

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0 \quad (x = 0, a).$$

[$\partial y / \partial x \neq 0$ とすると輪には y 方向の無限に大きな加速度を持ち、 $\partial y / \partial x = 0$ となる位置へと瞬間的に移動する。]

初期条件として y と $\partial y / \partial x$ の初期値を与えると、波動方程式の一般解

$$y(t, x) = h_+(x - v_0 t) + h_-(x + v_0 t)$$

における、境界条件を満たす h_{\pm} が求まる。

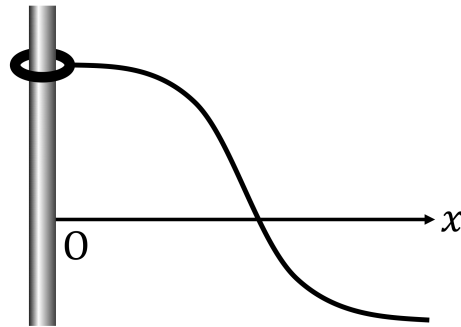


図8 弦の自由端には Neumann 境界条件が課される

4.3 横方向振動の振動数

弦の振動 $y(t, x) = y(x) \sin(\omega t - \phi)$ が波動方程式を満たすための条件

$$y''(x) + \omega^2 \frac{\mu_0}{T_0} y(x) = 0$$

から

$$\text{Dirichlet 境界条件} \rightarrow y_n(x) = A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \quad \omega_n = \sqrt{\frac{T_0}{\mu_0}} \frac{n\pi}{a}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\text{Neumann 境界条件} \rightarrow y_n(x) = A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \quad \omega_n = \sqrt{\frac{T_0}{\mu_0}} \frac{n\pi}{a}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

を得る.

4.4 より一般的な弦の振動

■弦の質量密度が位置の関数 $\mu(x)$ になっている場合 弦の振動 $y(t, x) = y(x) \sin(\omega t - \phi)$ が波動方程式を満たすための条件

$$y''(x) + \omega^2 \frac{\mu_0}{T_0} y(x) = 0$$

において $\mu_0 \rightarrow \mu(x)$ と置き換わる.

関数 $\mu(x)$ を特定しなければ、この式の解を詳しく調べることはできない.

■弦の縦方向 (弦に沿った方向) の振動 弦の素片に正味の力がかかるためには、その両端にかかる張力の大きさが違わなければならない、弦全体において張力が一定と仮定することができない. なお「相対論的弦では縦方向の振動は許容されない」ことについて、6.8 のノートの箇所でも補足しつつまとめる.

4.5 ラグランジアン力学の復習

時間に依存しないポテンシャル $V(x)$ の下で x 方向に運動する質量 m の点粒子に対して

$$\begin{aligned} \text{ラグランジアン} \quad L &\equiv \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V, \\ \text{作用} \quad S &\equiv \int_{t_i}^{t_f} L dt \quad (\text{積分は任意の径路 } x(t) \text{ に沿う}), \\ \text{Hamilton の原理} &\Rightarrow \text{Newton の第 2 法則} \quad m\ddot{x} = -V'(x). \end{aligned}$$

4.6 非相対論的な弦のラグランジアン

非相対論的な弦に対し

$$\begin{aligned} T &= \int_0^a \frac{1}{2}(\mu_0 dx) \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2, \\ x \text{ から } x + dx \text{ までの素片の伸び} \quad &\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} - dx \simeq dx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \\ \Rightarrow V &= \int_0^a \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx \end{aligned}$$

なので、ラグランジアン密度を

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu_0 \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2}T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$$

として

$$\text{ラグランジアン} \quad L = \int_0^a \mathcal{L} dx, \quad \text{作用} \quad S = \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^a dx \mathcal{L}$$

となる.

最小作用原理

$$0 = \delta S = \int_0^a \left[\mu_0 \frac{\partial y}{\partial t} \delta y \right]_{t=t_i}^{t=t_f} dx + \int_{t_i}^{t_f} \left[-T_0 \frac{\partial y}{\partial x} \delta y \right]_{x=0}^{x=a} dt - \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^a dx \left(\mu_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \delta y$$

において、我々が最初と最後の弦の状態を任意の指定するため、 $\delta y(t_i, x) = \delta y(t_f, x) = 0$ であることから最右辺第 1 項は消える。また、Dirichlet 境界条件と Neumann 境界条件のいずれに対しても最右辺第 2 項は消えるため、運動方程式として波動方程式

$$\mu_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

が得られる。

Dirichlet 境界条件 (両端固定) の下での弦の運動を考えると、弦の運動量は保存しない。これは壁が弦に力を及ぼすことによる。一方、弦の運動量 $p_y = \int_0^a \mu_0 \frac{\partial y}{\partial t} dx$ の時間微分は

$$\frac{dp_y}{dt} = \int_0^a \mu_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx = \int_0^a T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx = T_0 \left[\frac{\partial y}{\partial x} \right]_{x=0}^{x=a}$$

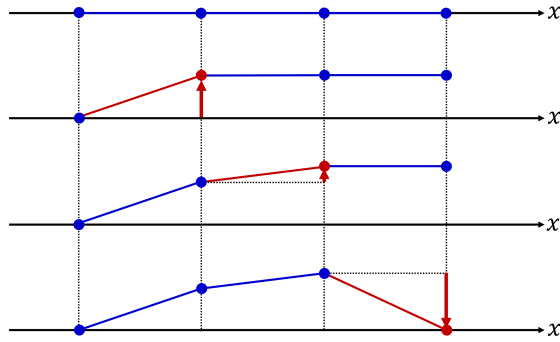


図9 弦を伸ばす仕事

なので, Neumann 境界条件 ($x = 0, a$ で $\partial y / \partial x = 0$) では運動量が保存する. 弦理論では端点が D-ブレインに接続している弦を考える上で, Dirichlet 弦が重要となる.

弦の場合のようにラグランジアン密度が

$$\mathcal{P}^t \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}, \quad \mathcal{P}^x \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'}$$

(ただし $\dot{y} \equiv \partial y / \partial t, y' \equiv \partial y / \partial x$) のみの関数であれば, 最小作用原理から得られる運動方程式は

$$\frac{\partial \mathcal{P}^t}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{P}^x}{\partial x} = 0$$

となる. 弦に対して

$$\mathcal{P}^t = \mu_0 \frac{\partial y}{\partial t} : \text{運動量密度}, \quad \mathcal{P}^x = -T_0 \frac{\partial y}{\partial x}$$

なので

$$\begin{aligned} \text{Dirichlet 境界条件} &\Leftrightarrow \mathcal{P}^t = 0 \quad (\text{端点で}) \\ \text{Neumann 境界条件} &\Leftrightarrow \mathcal{P}^x = 0 \quad (\text{端点で}) \end{aligned}$$

である.

4.6 について

■弦のポテンシャルエネルギー (4.33) について 図9のように弦を x 方向の幅 dx おきに分割し, x 座標の小さい側から順に弦を変位させて弦の素片を伸ばしたときの仕事を考えれば良い.

■式 (4.46) の $\mathcal{P}^t, \mathcal{P}^x$ について 弦の座標 $y(t, x)$ は数学的には物体の位置と言うよりも, t, x を引数とする場として扱われる. 場の理論において場 y に共役な場 $\mathcal{P}^t = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{y}$ は場の運動量密度と解釈される. 空間座標 x に対しても類似の量 $\mathcal{P}^x = \partial \mathcal{L} / \partial y'$ が定義されていることに注目する. 8.3 節で明らかになるように, \mathcal{P}^x の物理的な意味は運動量の流束 (流れの密度) である.

計算練習 4.1 ξ を変数 x, t のいずれかとすると, 変分に伴い

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \rightarrow \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial \delta y}{\partial \xi} \right)^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 + 2 \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial \delta y}{\partial \xi} + O(\delta y^2)$$

と変化するから $\delta \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 = 2 \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial \delta y}{\partial \xi}$.

計算練習 4.2

$$\delta \dot{y} = \frac{\partial}{\partial t} \delta y, \quad \delta y' = \frac{\partial}{\partial x} \delta y$$

として部分積分する.

計算練習 4.3 式 (4.47): $\mathcal{P}^t = \mu_0 \frac{\partial y}{\partial t}$, $\mathcal{P}^x = -T_0 \frac{\partial y}{\partial x}$ から直ちに分かる.

問題 (第 4 章)

問題 4.1 弦の小さな横方向振動の取扱いの無矛盾性

4.1 節の p.72 で言及されている問題 4.1 を解く.

4.1 節の解析では, 弦の素片にかかる水平方向の力 dF_h を無視した. これは各位置で弦の傾き $\partial y / \partial x \equiv \tan \theta$ (の絶対値) が小さいという条件の下で

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\partial y / \partial x)^2}} \simeq 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2, \\ \therefore dF_h &= [T_0 \cos \theta]_x^{x+dx} = -\frac{1}{2} T_0 \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right]_x^{x+dx} \simeq -T_0 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx \end{aligned}$$

となり, これが垂直方向の力 (4.4):

$$dF_v \simeq T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx$$

と比べて $|dF_h| \ll |dF_v|$ となることから正当化される.

■微小振動を仮定しない場合 微小振動の仮定を外しても, 同時に弦の張力の非一様性を考慮すれば同じ波動方程式を得ることができる. 実際, 各位置 x で弦の伸びにより張力は $T(x)$ になっているとすると, 図 10 において x 方向の力のつり合い

$$0 = T(x + \Delta x) \cos \theta(x + \Delta x) - T(x) \cos \theta(x)$$

より $T(x) \cos \theta(x)$ は位置 x に依らずに一定となり, その値は波のないときの弦の張力 T_0 に一致する ($\theta(x) \rightarrow 0$ のとき $T(x) \cos \theta(x) \rightarrow T_0$). よってこの場合にも幅 Δx の弦の微小部分に働く力の y 成分は

$$[T(x) \sin \theta(x)]_x^{x+\Delta x} = [T(x) \cos \theta(x) \tan \theta(x)]_x^{x+\Delta x} = T_0 [\tan \theta(x)]_x^{x+\Delta x} \simeq T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Delta x$$

となる. こうすれば角度 $\theta(x)$ が微小であることを仮定する必要はない (近似に用いたのは横幅 Δx が微小であることだけである).

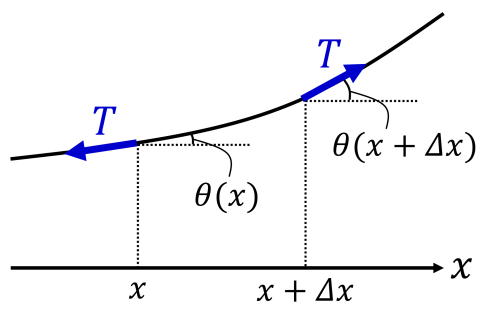


図 10 弦を伝わる横波

第5章 相対論的な点粒子

相対論的な弦の作用は、相対論的な点粒子の作用からの自然な一般化によって得られる。

5.1 相対論的な点粒子の作用

相対論的な自由粒子を考えよう。あらゆる Lorentz 座標系において同じ運動方程式が成立しなければならない。そのためには作用が Lorentz スカラーであれば十分である。このときすべての Lorentz 座標系で、作用が定常的となる〔停留値をとる〕粒子の世界線が一致し、それは同一の運動方程式を満たす。

粒子の固有時間 $\int \frac{ds}{c}$ は Lorentz スカラーであり、これに Lorentz 不変量として mc^2 をかけると作用の単位を持つ量になる (m は粒子の質量)。そこで点粒子の作用を

$$S = -mc \int ds = \int_{t_i}^{t_f} dt L, \quad L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

と考える。これは光速を超えない粒子の運動に対してのみ定義されている。 $mc \int ds$ の前に付く無単位の数値因子は -1 となっている。このことは、低速の極限でラグランジアンが

$$L \simeq -mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

となって、運動方程式に影響を与えない定数項 $-mc^2$ を除いて、非相対論的な自由粒子のラグランジアン $\frac{1}{2}mv^2$ に一致することから正当化される。

なお、このとき正準運動量とハミルトニアンは

$$\vec{p} \equiv \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad H \equiv \vec{p} \cdot \vec{v} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

となる (ただしここでは正準運動量ではなく速度を変数としてハミルトニアンを表している)。

計算練習 5.1

等速推進 $\vec{v} \rightarrow \vec{v} + \vec{v}_0$ の下で非相対論的な自由粒子のラグランジアン $L_{nr} = \frac{1}{2}mv^2$ は

$$L_{nr} \rightarrow L_{nr} + \frac{df}{dt}, \quad f(t, \vec{x}) = m\vec{v}_0 \cdot \vec{x} + \frac{1}{2}mv_0^2 t$$

と変化する。これに対応して現れる作用の付加的な項 $f(t_f, \vec{x}_f) - f(t_i, \vec{x}_i)$ は変分をとると落ちるため (ただし $(t_i, \vec{x}_i), (t_f, \vec{x}_f)$ はそれぞれ時空における粒子の始点と終点)、作用が停留値をとるための条件に他ならない運動方程式は不変である。このように作用が不変でなくとも、運動方程式は不変となり得る。

5.1 について

普通、ハミルトニアンは正準運動量を変数として表す。そこで \vec{p} を用いて式 (5.11): $H = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ を書き換えれば

$$H = \sqrt{m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2}$$

となる。

5.2 パラメーター付け替え不変性

点粒子の作用 $-mc \int ds$ は、粒子の世界線に付けたパラメーターに依らないはずである。実際、世界線に始点 x_i^μ から終点 x_f^μ に向かうときに増加するようなパラメーター τ, τ' を付けると、パラメーターを利用して作用を計算する式は

$$S = -mc \int_{\tau_i}^{\tau_f} \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} d\tau$$

となるので、パラメーター付け替え不変性

$$\begin{aligned} S &= -mc \int_{\tau_i}^{\tau_f} \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} d\tau = -mc \int_{\tau_i}^{\tau_f} \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau'} \frac{dx^\nu}{d\tau'} \frac{d\tau'}{d\tau}} d\tau \\ &= -mc \int_{\tau'_i}^{\tau'_f} \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau'} \frac{dx^\nu}{d\tau'}} d\tau' \end{aligned}$$

が満たされている。

5.3 運動方程式

τ を粒子の世界線に沿った任意のパラメーターとして、点粒子の作用 $S = -mc \int ds$ に対する変分原理から運動方程式

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = 0 \quad \text{または} \quad \frac{dp^\mu}{d\tau} = 0$$

を得る。固有時間 s をパラメーターに選べば

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} = 0$$

となる。 x^μ は、したがって $\frac{d^2 x^\mu}{ds^2}$ は Lorentz ベクトルなので、これは Lorentz 不変性を満たしている。

計算練習 5.2

$\frac{dp_\mu}{d\tau} = \frac{d\tau'}{d\tau} \frac{dp_\mu}{d\tau'}$ なので、 $\frac{d\tau'}{d\tau} \neq 0$ を満たすパラメーター τ' を用いても、式 (5.26): $\frac{dp_\mu}{d\tau} = 0$ と同じ形の運動方程式 $\frac{dp_\mu}{d\tau'} = 0$ が成立する。

5.4 電荷を持つ相対論的な粒子

粒子と電磁場の相互作用を表す項として Lorentz スカラー

$$\frac{q}{c} \int A_\mu dx^\mu$$

を点粒子の作用に加えると (q は粒子の電荷)、変分原理から正しい運動方程式

$$\frac{dp_\mu}{ds} = \frac{q}{c} F_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{ds}$$

が導かれる。

問題 (第 5 章)

問題 5.2 パラメータ付けが任意な粒子の運動方程式

5.3 節 p.94 で言及されている問題 5.2 を解く.

粒子の世界線に付けたパラメーターを τ とし, τ による微分をドットで表す. 作用の変分の式 (5.22) において $ds = \sqrt{-\eta_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta}d\tau$ と書くと

$$\begin{aligned}\delta S &= mc \int_{\tau_i}^{\tau_f} \frac{d(\delta x^\mu)}{d\tau} \frac{\dot{x}_\mu}{\sqrt{-\eta_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta}} d\tau \\ &= -mc \int_{\tau_i}^{\tau_f} \delta x^\mu \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\dot{x}_\mu}{\sqrt{-\eta_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta}} \right) d\tau\end{aligned}$$

となるので, 運動方程式

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\dot{x}_\mu}{\sqrt{-\eta_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta}} \right) = 0$$

が得られると考えられる. これはパラメーター付け替え不変性が明白である.

問題 5.5 荷電点粒子の運動方程式

5.4 節の末尾で言及されている問題 5.5 を解く.

粒子の軌道の変化に伴う粒子の作用 $S_m = -mc \int ds$ の変分は式 (5.25):

$$\delta S_m = - \int \frac{dp_\mu}{d\tau} \delta x^\mu d\tau$$

で与えられる. 一方, 粒子と場の相互作用項 $S_{mf} = \frac{q}{c} \int A_\mu dx^\mu$ の変分は次のように計算できる [2, pp.67-68].

$$\begin{aligned}\delta S_{mf} &= \frac{q}{c} \int \{A_\mu \delta(dx^\mu) + (\delta A_\mu) dx^\mu\} \\ &= \frac{q}{c} \int \{(-dA_\mu) \delta x^\mu + (\delta A_\nu) dx^\nu\} \\ &\quad (\text{端点で } \delta x^\mu = 0 \text{ に注意して部分積分した}) \\ &= \frac{q}{c} \int \{(-\partial_\nu A_\mu) dx^\nu \delta x^\mu + (\partial_\mu A_\nu) \delta x^\mu dx^\nu\} \\ &\quad (\text{場 } A_\mu \text{ の値は時空における粒子の位置で評価されるから}) \\ &= \frac{q}{c} \int F_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \delta x^\mu d\tau.\end{aligned}$$

以上より変分原理

$$0 = \delta(S_m + S_{mf}) = \int \left(-\frac{dp_\mu}{d\tau} + \frac{q}{c} F_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) \delta x^\mu d\tau$$

から粒子の運動方程式 (5.32):

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = \frac{q}{c} F_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau}$$

が導かれる.

第 6 章 相対論的な弦

6.1 空間内の面に関する面積汎関数

弦は時空において 2 次元の世界面を描く。

- 点粒子の作用 … 粒子の描く世界線の“固有長さ”に比例
- 弦の作用 … 弦の描く世界面の“固有面積”に比例 (南部-後藤作用)

まず、任意に指定された時刻に空間内に存在する 2 次元面の面積を考える。2 次元面を含んでいる世界 (今の場合、 $x^1 x^2 x^3$ 空間) を標準空間と呼ぶ。面上の各位置 \vec{x} は 2 つのパラメーター ξ^1, ξ^2 で指定される。パラメーターの値の変化 $d\xi^1, d\xi^2$ に対応する面上の変位

$$d\vec{v}_1 = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} d\xi^1, \quad d\vec{v}_2 = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} d\xi^2$$

の張る面積要素は

$$dA = \sqrt{|d\vec{v}_1|^2 |d\vec{v}_2|^2 - (d\vec{v}_1 \cdot d\vec{v}_2)^2} = d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} \right) \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} \right) - \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} \right)^2}$$

なので、曲面の面積は

$$A = \int d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} \right) \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} \right) - \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} \right)^2} \quad (2)$$

で与えられる。

6.2 面積のパラメーター付け替え不変性

「面全体の面積も、面の小さな部分の面積も、それを計算するためのパラメーターの付け方に依存してはならない」。そこで面積の式 (2) のパラメーター不変性を確かめる。

考えている面 S 上の線要素は

$$d\vec{x} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^i} d\xi^i, \quad \therefore ds^2 = d\vec{x} \cdot d\vec{x} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^j} d\xi^i d\xi^j$$

なので (添字 i, j は 2 つの値 1 と 2 をとる)、面 S の上に誘導された計量テンソルを

$$g_{ij} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^j} \quad (3)$$

として

$$ds^2 = g_{ij} d\xi^i d\xi^j \quad (4)$$

と書ける。計量 g_{ij} を用いて面積の式 (2) は

$$A = \int d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{g}, \quad g \equiv \det(g_{ij}) \quad (5)$$

と書き換えられる。

さて、線要素の式 (4) が任意のパラメーター ξ に対して成り立つためには、もう一組のパラメーターを $(\tilde{\xi}^1, \tilde{\xi}^2)$ 、その計量を \tilde{g}_{pq} としたとき、計量が [2 階共変テンソルの変換則]

$$g_{ij} = \tilde{g}_{pq} \frac{\partial \tilde{\xi}^p}{\partial \xi^i} \frac{\partial \tilde{\xi}^q}{\partial \xi^j}$$

を満たさなければならず [計量の定義式 (3) はこれを満たしている]、ここから

$$\sqrt{g} = \sqrt{\tilde{g}} \left| \det \left(\frac{\partial \tilde{\xi}^i}{\partial \xi^j} \right) \right|, \quad \tilde{g} \equiv \det(\tilde{g}_{pq})$$

が得られる。よって面積の式 (5) は

$$A = \int d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{g} = \int \left[d\tilde{\xi}^1 d\tilde{\xi}^2 \left| \det \left(\frac{\partial \tilde{\xi}^i}{\partial \xi^j} \right) \right| \right] \left[\sqrt{\tilde{g}} \left| \det \left(\frac{\partial \tilde{\xi}^i}{\partial \xi^j} \right) \right| \right] = \int d\tilde{\xi}^1 d\tilde{\xi}^2 \sqrt{\tilde{g}}$$

$$\left(\because \frac{\partial \xi^i}{\partial \tilde{\xi}^k} \frac{\partial \tilde{\xi}^k}{\partial \xi^j} = \delta^i_j \Rightarrow \det \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial \tilde{\xi}^j} \right) \det \left(\frac{\partial \tilde{\xi}^i}{\partial \xi^j} \right) = 1 \right)$$

となり、パラメーター付け替え不変性を満たしている。

6.2 について

なお例えば一般相対性理論において学ぶように、面積の公式 (5): $A = \int d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{g}$ は次のような、 \mathcal{S} の空間次元に依らない仕方で説明できる。まずパラメーター (ξ^1, ξ^2) として正規直交座標 (Ξ^1, Ξ^2) を導入すると (計量は δ_{ij})、面積は

$$A = \int d\Xi^1 d\Xi^2 = \int \left| \frac{\partial(\Xi)}{\partial(\xi)} \right| d\xi^1 d\xi^2$$

と計算できる。ここで任意のパラメーター (ξ^1, ξ^2) への変数変換を行う際の Jacobi 行列式 $\partial(\Xi)/\partial(\xi)$ は、計量テンソルの変換則から

$$g_{ij} = \frac{\partial \Xi_k}{\partial \xi_i} \frac{\partial \Xi_l}{\partial \xi_j} \delta_{kl} \rightarrow \sqrt{g} = \frac{\partial(\Xi)}{\partial(\xi)}$$

と定まる。

計算練習 6.1

面積の式 (2) の根号の中身を (式 (5) の結論を先取りして) $g(\xi)$ と略記すると

$$A = \int d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{g(\xi)} = \int \left[d\tilde{\xi}^1 d\tilde{\xi}^2 \frac{d\xi^1 d\xi^2}{d\tilde{\xi}^1 d\tilde{\xi}^2} \right] \left[\sqrt{g(\tilde{\xi})} \frac{d\tilde{\xi}^1 d\tilde{\xi}^2}{d\xi^1 d\xi^2} \right] = \int d\tilde{\xi}^1 d\tilde{\xi}^2 \sqrt{g(\tilde{\xi})}.$$

計算練習 6.2

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial \tilde{\xi}^k} \frac{\partial \tilde{\xi}^k}{\partial \xi^j} = \delta^i_j \Leftrightarrow MM = 1, \quad \frac{\partial \tilde{\xi}^i}{\partial \xi^k} \frac{\partial \xi^k}{\partial \tilde{\xi}^j} = \delta^i_j \Leftrightarrow \tilde{M}M = 1.$$

6.3 時空内の面に関する面積汎関数

弦が $(d+1)$ 次元時空に描く 2 次元の面を考える。時空には座標 $x^\mu = (x^0, x^1, \dots, x^d)$ が与えられており、面はパラメーター (τ, σ) を用いて

$$x^\mu = X^\mu(\tau, \sigma)$$

と表される。粗く言うと

- σ は弦に沿った位置に関係し、
- τ の増加は時間の経過に対応する

ものとし^{*2}、弦の端点が描く世界線は一定の σ の値を持ち、また世界面上の各点で $dX^0/d\tau \neq 0$ とする。

世界面の面積は、6.1 節の面積の式 (2) で内積を $d+1$ 次元時空におけるスカラー積に置き換え、根号の中身の符号を入れ替えた

$$A = \int d\tau d\sigma \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 - \left(\frac{\partial X}{\partial \tau}\right)^2 \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2} \quad (6)$$

で定義されると考える。これは Lorentz 不変量となっている。

後から充分に明らかとなるが、弦の「どの点が無処へ動いたかを言うことはできない」。「ただ、終状態の弦の各点 p に対して、始状態の弦において、そこへ光速以下の運動によって到達できるような点 p' を見いだすことは可能でなければならない」。ところで可能な運動は時間的な方向に起こるから、これは世界面の各点において、時間的な正接方向があることを意味する (弦が局所的に光速で動いている点は例外である)。一方、空間的な方向は必ず存在する。各点は同時刻に弦を構成している点と空間的に隔たっている。このとき面積の式 (6) の根号の中身は正になることを以下で説明する (時間的な正接を持たないような例外的な点ではゼロになる)。なお、時間的な正接を持たないような例外的な点は連続無限個とならない、すなわち弦の有限の寸法を持つ部分が光速で動くことはできない [これにより面積の式 (6) の被積分関数がゼロになるのは世界面上の離散的な点に限られる]。

■面積の式 (6) の根号の中身が正になること

$$v^\mu(\lambda) = \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} + \lambda \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}$$

とおくと、これは λ の値を変化させることにより、世界面上の任意の点におけるすべての方向の正接ベクトルを表せる。

任意の点が時間的な正接ベクトルと空間的な正接ベクトルの両方を持つためには

$$v^2(\lambda) = \lambda^2 \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 + 2\lambda \frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma} + \left(\frac{\partial X}{\partial \tau}\right)^2$$

が、 λ の値を変化させることにより正と負の両方の値をとり得なければならない。

時間的な正接ベクトルを持たない例外的な点においては、光速での運動のみが物理的な運動として許容されるため、これに対応する零ベクトルの方向が存在しなければならない。このとき唯一つの λ に対して $v^2(\lambda) = 0$ となり、それ以外の λ に対して $v^2(\lambda) > 0$ である。

^{*2} space(空間) の頭文字 s に対応するギリシア文字として σ が、time(時間) の頭文字 t に対応するギリシア文字として τ が用いられているものと想像される。

以上が成立する条件は λ の 2 次式 $v^2(\lambda)$ の判別式に他ならない、面積の式 (6) の根号の中身が

$$\left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 - \left(\frac{\partial X}{\partial \tau}\right)^2 \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 \geq 0$$

となることである (等号は時間的な正接ベクトルを持たない例外的な点で成立する)。

■面積の式 (6) に関する p.107 の訳註の引用

単純な例を念頭に置いて粗い言い方をすると、根号の中の後ろの $(\partial X/\partial \sigma)^2$ は弦の素片の空間的な長さ、 $-(\partial X/\partial \tau)^2$ は固有時間に対応する部分となり、両者の積の部分 (の平方根の $d\tau d\sigma$ 倍) が世界面の素片の固有面積に対する近似にあたる。根号の中の最初の $(\partial X/\partial \tau \cdot \partial X/\partial \sigma)^2$ は τ - σ 非直交性のために生じている補正項である。第 9 章以降では補正項がゼロになるようなパラメーター付けの方法を選ぶことで、具体的な計算の簡略化が行われる。

6.3 について

- 弦の有限の寸法を持つ部分が光速で動くことは、世界面に時間的な正接ベクトルを持つような部分がなくなることから禁止されている (教科書 pp.107–108)。しかしこれは、例外的な点を除いて時間的な正接ベクトルを必要とするそもそもの理由である、「終状態の弦の各点 p に対して、始状態の弦において、そこへ光速以下の運動によって到達できるような点 p' を見いだすことは可能でなければならない」(教科書 p.109. 1.2,3) こと自体に抵触するものではないだろう。
- 図 11 のように x 方向に沿った弦が光速で y 方向に動くとする。このとき弦の描く世界面上の、点 P における正接 PR は空間的である。教科書 pp.107–108 ではその理由が次のように説明されている。すなわち点 P は、点 R と同時刻の点 \bar{R} へは光速で移動できるが、点 R に到達するためには光速を越えなければならない。なるほど実際、図 11 のように、PR は光円錐の外にある。また $\bar{P}\bar{R}$ は光円錐上にあり、零ベクトルである。
- 「後から充分に明らかになるが、弦は、その各部の動きを辿れるような連続体ではないのである」(p.108) について、弦の内部の点の運動を辿ることは、弦の上でパラメーター σ が一定の点の運動を辿ることを意味しており、 σ のパラメーター付けは人為的であることを述べていると考えられる (6.8 節, 6.9 節参照)。いずれにせよこのような曖昧さは量子論の不確定性原理とは無関係に、古典論の段階から存在するものである。

6.4 南部-後藤作用

σ が長さの単位を持ち、 τ が時間の単位を持つものと見なす： $[\tau] = T, [\sigma] = L$ 。パラメーター (τ, σ) の単位に依らず、面積の式 (6) は長さの自乗の単位を持っている。弦の張力 (6.7 節) を T_0 とし、これに T_0/c をかけて作用の単位を持つ量にし (さらに負号を付け) た、

$$S = -\frac{T_0}{c} \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}, \quad \dot{X}^\mu \equiv \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}, \quad X'^\mu \equiv \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}$$

が相対論的な弦の作用となる。これは南部-後藤作用と呼ばれる。

弦の描く世界面上の線要素は

$$-ds^2 = \eta_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta$$

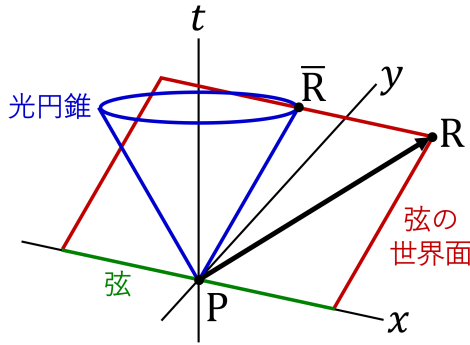


図 11 x 方向に沿った弦が光速で y 方向に動くときに描かれる世界面, および光円錐 (教科書の図 6.5(p.108) に時間軸を付け加えた)

となる ($\xi^1 = \tau, \xi^2 = \sigma$ とし, α, β の値は 1 と 2 を取るものとする). そこで世界面上に誘導された計量

$$\gamma_{\alpha\beta} \equiv \eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta} = \frac{\partial X}{\partial \xi^\alpha} \cdot \frac{\partial X}{\partial \xi^\beta}$$

を定義すると, 南部-後藤作用は

$$S = -\frac{T_0}{c} \int d\tau d\sigma \sqrt{-\gamma}, \quad \gamma \equiv \det(\gamma_{\alpha\beta})$$

と表される. これは 6.2 節と同じ理由で, パラメーターの付け替えに対して不変である.

6.4 について

南部-後藤作用は弦座標の 1 階微分までを含む. このため後で見ると運動方程式は 2 階微分方程式となり, 古典的因果律が満たされることをこの段階で指摘できる. ここで古典的因果律とは弦座標 X^μ とその時間変化率の初期値を与えると, その後の弦の運動が逐次的に完全に決定されることを指す.

なお南部-後藤作用の正当性を非相対論的極限の観点から理解するには, 弦の各要素が持つ何らかの意味での速度を定義しなければならない. 6.8 節では弦の横方向速度を定義し, 南部-後藤作用と (適切な非相対論的極限の表式を持つ) 点粒子の作用との類似性を議論する.

■南部-後藤作用 (6.39) に関する p.110 訳註の引用

同様の記法で点粒子の作用 (5.15) を書くと $S = -mc \int d\tau \sqrt{-(\dot{x})^2}$ である. 自然単位系 (第 9 章, ここでは単に c を省けばよい) に移行して, これを式 (6.39) と比べると, 質量 m (自然単位 L^{-1}) が点粒子の世界線に対して持つ役割とよく似た役割を, 張力 T_0 (自然単位 L^{-2}) が弦の世界面に対して持つことが判る. 弦理論で扱われる相対論的な弦では, 第 4 章の非相対論的な弦とは異なって弦の空間的な長さや質量として何らかの有限規準値が設定されることはなく, 弦の力学を決める先験的なパラメーターは T_0 だけと見なされる. つまり '相対論的な弦' は, 単に特殊相対論に従う弦という意味ではなく, そのように '定義' されているのである.

6.5 運動方程式, 境界条件, D-ブレーン

南部-後藤作用を

$$S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \mathcal{L}(\dot{X}^\mu, X'^\mu), \quad \mathcal{L}(\dot{X}^\mu, X'^\mu) = -\frac{T_0}{c} \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}$$

と書き (\mathcal{L} はラグランジアン密度), 記号

$$\mathcal{P}^\tau_\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} = -\frac{T_0}{c} \frac{(\dot{X} \cdot X')X'_\mu - (X')^2 \dot{X}_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}}, \quad (6.49)$$

$$\mathcal{P}^\sigma_\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'^\mu} = -\frac{T_0}{c} \frac{(\dot{X} \cdot X')\dot{X}_\mu - (\dot{X})^2 X'_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}} \quad (6.50)$$

を導入すると [最右辺については計算練習 6.3], 変分原理により, 弦座標の変化 δX^μ に伴う作用の変分は

$$0 = \delta S = \int_0^{\sigma_1} d\sigma [\delta X^\mu \mathcal{P}^\tau_\mu]_{\tau_i}^{\tau_f} + \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau [\delta X^\mu \mathcal{P}^\sigma_\mu]_0^{\sigma_1} - \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \delta X^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{P}^\tau_\mu}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}^\sigma_\mu}{\partial \sigma} \right) \quad (6.52)$$

と表される [導出は下記]. 弦の始状態・終状態は指定されているため $\delta X^\mu(\tau_i, \sigma) = \delta X^\mu(\tau_f, \sigma) = 0$ であることから最右辺第 1 項は消える. よって [最右辺第 2 項をゼロとするような境界条件の下で], 相対論的な弦の運動方程式

$$\frac{\partial \mathcal{P}^\tau_\mu}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}^\sigma_\mu}{\partial \sigma} = 0$$

を得る.

最右辺第 2 項 $\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau [\delta X^\mu \mathcal{P}^\sigma_\mu]_0^{\sigma_1}$ は μ のとる値 $0, 1, \dots, d$ および弦の端点での σ の値 $\sigma_* \equiv 0, \sigma_1$ で指定される $2D$ 個の項から成る. その各々をゼロにするような, 弦の端点に課すことのできる境界条件として以下の 2 つを考える.

- Dirichlet 境界条件

$$\frac{\partial X^\mu(\tau, \sigma_*)}{\partial \tau} = 0 \quad \text{または} \quad X^\mu(\tau, \sigma_*) = \text{const}, \quad \therefore \delta X^\mu(\tau, \sigma_*) = 0$$

- 自由端点の条件 $\mathcal{P}^\sigma_\mu(\tau, \sigma_*) = 0$

– これが自由端点の条件と呼ばれるのは, 端点の座標に制約を課していないからである

なお τ が変化すると時間 X^0 が変化するため, $\mu = 0$ に対しては Dirichlet 境界条件を課することができず, 自由端点の境界条件が適用される. 閉弦は端点を持たないので境界条件を必要としない.

Dirichlet 境界条件は開弦の端点がある対象に取り付けられているときに成立する. このような対象を D-ブレイン (D は Dirichlet を意味する), 特に p 次元の空間的な拡がりを持つものを Dp -ブレインと呼ぶ. 例として 3 次元空間において $D2$ -ブレインが (x^1, x^2) 面に拡がっており, 弦の両端がここに接続されている場合, 弦の端点は (x^1, x^2) 面内では動けるが x^3 方向には動けない. このとき適用される境界条件は

$$\begin{aligned} \mu = 1, 2 &\rightarrow \text{自由端点の境界条件} \\ \mu = 3 &\rightarrow \text{Dirichlet 境界条件} \end{aligned}$$

となる. なお D-ブレインは弦理論において物理的に存在する実体であり, 恣意的に導入されるものではない.

6.5 節, 式の導出など

■作用の変分 (6.52) の導出

$$\delta S = \int d\tau d\sigma \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} \delta \dot{X}^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'^\mu} \delta X'^\mu \right) = \int d\tau d\sigma \left(\mathcal{P}^\tau_\mu \frac{\partial}{\partial \tau} \delta X^\mu + \mathcal{P}^\sigma_\mu \frac{\partial}{\partial \sigma} \delta X^\mu \right)$$

の最右辺を部分積分して, 式 (6.52) を得る.

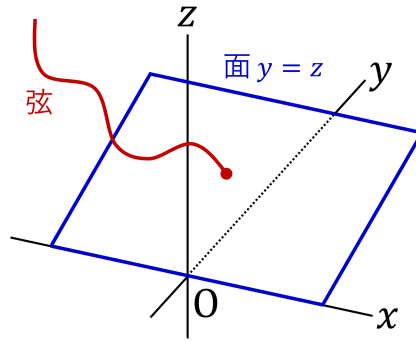


図 12 端点が面 $y = z$ に接続されている弦

計算練習 6.3

$\partial\mathcal{L}/\partial\dot{X}^\mu$ の表式 (6.49), $\partial\mathcal{L}/\partial X'^\mu$ の表式 (6.50) を導くには

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\dot{X}^\mu}(\dot{X} \cdot X') &= \frac{\partial}{\partial\dot{X}^\mu}(\dot{X}^\nu \cdot X'_{\nu}) = \delta^\nu_{\mu} X'_{\nu} = X'_{\mu}, \\ \frac{\partial}{\partial\dot{X}^\mu}(\dot{X})^2 &= \frac{\partial}{\partial\dot{X}^\mu}(g_{\alpha\beta}\dot{X}^\alpha\dot{X}^\beta) = g_{\alpha\beta}(\delta^\alpha_{\mu}\dot{X}^\beta + \dot{X}^\alpha\delta^\beta_{\mu}) = 2\dot{X}_{\mu}, \quad \text{etc.}\end{aligned}$$

に注意しさえすれば良い。

6.5 について

■自由端点の条件 (6.56) について 改めて強調・再確認すると, 自由端点の条件が具体的には式 (6.56): $\mathcal{P}^\sigma_{\mu} = 0$ となるのは, 6.5 節の説明から分かるように, “正しい” 運動方程式を導ける自然な境界条件が Dirichlet 境界条件 (6.55) と自由端点の条件 (6.56) に限られるからである. これらの境界条件の下では最小作用原理から弦の運動方程式を導く際に, 部分積分によって現れる境界の項を消すことができる. なお後の 8.3 節から理解されるように, 自由端点の条件 (6.56) における \mathcal{P}^σ_{μ} は弦の世界面上を流れる運動量の流束と解釈できる量である.

■Dp-ブレーンが座標一定の単純な超平面ではない場合 弦の端点が図 12 のように面 $y = z$ に位置する D-ブレーンに接続されている場合, 端点は x 方向, y 方向, z 方向のいずれにも動けるからと言って, 単純に各空間座標に対して自由端点の境界条件を課せば良いわけではない. yz 面内で y 軸, z 軸と角度 45° を成す y', z' をとると (y' 方向はブレーン $y = z$ 内で, z' 軸はブレーンに直交), 弦座標の y' 成分は Neumann 境界条件を満たし, z' 成分は Dirichlet 境界条件を満たす. 弦座標の y, z 成分に対する境界条件はこれを座標変換して得られる (傾いたブレーンに関する 19.3 節の議論を参照). 実際このように端点がブレーンに接続されているにも関わらず, すべての弦座標が自由端の条件を満たすと考えることは, 素朴に考えても奇妙である.

■「全空間を満たした」D-ブレーン」(p.115, l.7) について ここでは弦の端点が D-ブレーンに接続されていると, 端点の運動はブレーン上に拘束されてしまうと消極的・否定的に捉えるよりも, むしろ端点はブレーンに沿った方向に運動できるようになると積極的・肯定的に捉えるという“発想の転換”を行うと理解しやすい. (もちろん言うまでもなく, これは恣意的・人為的・主観的な価値判断・意味付けに過ぎないけれど.)

■D-ブレーンに関する p.114 訳註の引用

物理的な粒子は我々に見えている 3 次元空間内を自由に動けるので、開弦の振動モードを物理的な粒子に対応させるような理論モデルを考える場合に、定在的な D-ブレーンとして想定されるのは、広がった 3 次元空間を含むような $p \geq 3$ の Dp -ブレーンである。このようなモデルにおいては、弦の端点に対する Dirichlet 型の拘束はコンパクト空間内の方向だけについて考えることになる (第 21 章)。D0~D2 ブレーンや、コンパクト化方向だけの空間次元を持っていて実効空間における拡がりのない Dp -ブレーンも理論要素として用いられるが、その場合は (超弦理論では) D-ブレーン自身が、全空間に広がる閉弦起因の無質量場 (Maxwell 場を一般化した概念) と結合する ‘チャージ’ の担体になるという観点も重要となる (16.4 節, 22.7 節)。

本書では D-ブレーンの性質やその応用が紹介されるが、そもそも「D-ブレーンとは何か?」ということの説明は与えられないので、この問題の詳細については他の文献にあたる必要がある。D-ブレーンは、弦の場の理論において古典的に見いだされる安定なソリトン解である。つまり局所的に (次元の限定された領域に) 高いエネルギーを持って安定している ‘弦の場’ の状態のことであるが、粗雑なイメージとしては、多数の弦が凝集しているような物体と言ってもよいであろう。摂動的に弦を扱うアプローチからは D-ブレーンそのものを導くことはできず、1995 年に J.Polchinski (ポルチンスキー) が理論的に D-ブレーン (の意味) を発見してから、超弦理論は新たな段階を迎えた。

6.6 静的ゲージ

「弦の作用はパラメーター付け替え不変性を備えているので、我々は自由にパラメーターを選ぶことが許される」。適切なパラメーターの選択により、弦の運動の記述が容易となる。

パラメーター τ を

$$\tau = t$$

と選ぶ。これは静的ゲージと呼ばれる。 $X^0 = ct$ なので弦が持つ座標は $X^\mu = \{ct, \vec{X}(t, \sigma)\}$ となり

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} = \left(0, \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right), \quad \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} = \left(c, \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)$$

を得る。

一方、「ここでは σ に関して特別に洗練されたパラメーターの選択を試みることはしない」。閉弦に対しては σ 方向に円が形成されるため、円周を σ_c として同一視

$$(\tau, \sigma) \sim (\tau, \sigma + \sigma_c)$$

を導入しなければならない。

6.7 弦の張力とエネルギー

x^1 軸の $0 \leq x^1 \leq a$ を占める弦を考えると弦の座標は $X^\mu = (ct, f(\sigma), \vec{0})$ となる。ただし $f(\sigma)$ は $f(0) = 0, f(\sigma_1) = a$ を満たす、単調増加する連続関数であり、 $\vec{0}$ は $(d-1)$ 次元ベクトルである。静的ゲージを用いると弦の作用は

$$S = -\frac{T_0}{c} \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2} = -\frac{T_0}{c} \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^{\sigma_1} d\sigma \frac{df}{d\sigma} = \int_{t_i}^{t_f} dt (-T_0 a)$$

と計算できる。最右辺の $-T_0 a$ はラグランジアンに相当する。今の場合、系の運動エネルギーがゼロだから、これはポテンシャルエネルギーが $V = T_0 a$ であることを意味する。 T_0 を弦の持つ [一定の] 張力とする解釈

の下で、これは弦を無限小の寸法から長さ a まで引き伸ばす仕事となっている。このことから作用の式における T_0 を弦の張力と見なすことと、作用の式に付けてある負号の存在が正当化される。

弦にはあらかじめ質量が付与されているのではなく、弦は引き伸ばされてエネルギーを得ることによってのみ質量を持つ。よって単位長さあたりの質量を μ_0 とすると

$$(\mu_0 a) c^2 = T_0 a, \quad \therefore \mu_0 = T_0 / c^2.$$

なお本節で考えた、弦が x^1 軸の $0 \leq x^1 \leq a$ を占めるという状況 $X^\mu = (ct, f(\sigma), \vec{0})$ は運動方程式と境界条件に矛盾するものではないことが確かめられる [確認は下記]。

6.7 節、式の導出

■ x^1 軸に沿って伸ばされた静的な弦が運動方程式と矛盾しないこと 考えている弦の座標 $X^\mu = (ct, f(\sigma), \vec{0})$ に対して

$$\dot{X}^\mu = (c, 0, \vec{0}), \quad X'^\mu = (0, f', \vec{0})$$

であり、これらは τ に依存しない。よって式 (6.49)、式 (6.50) の

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^\tau_\mu &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} = -\frac{T_0}{c} \frac{(\dot{X} \cdot X') X'_\mu - (X')^2 \dot{X}_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}}, \\ \mathcal{P}^\sigma_\mu &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'^\mu} = -\frac{T_0}{c} \frac{(\dot{X} \cdot X') \dot{X}_\mu - (\dot{X})^2 X'_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}} \end{aligned}$$

も τ に依存せず、このとき運動方程式は

$$0 = \frac{\partial \mathcal{P}^\tau_\mu}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}^\sigma_\mu}{\partial \sigma} = \frac{\partial \mathcal{P}^\sigma_\mu}{\partial \sigma}$$

となり、 \mathcal{P}^σ_μ が σ に依存しないことが要請される。ところが再び \mathcal{P}^σ_μ の式 (6.50) に戻り、今考えている弦に対して

$$(\dot{X})^2 = -c^2, \quad (X')^2 = (f')^2, \quad \dot{X} \cdot X' = 0$$

であることを用いると、

$$\mathcal{P}^\sigma_\mu = -\frac{T_0}{c} \frac{c^2 X'_\mu}{\sqrt{c^2 (f')^2}} = -T_0 \frac{X'_\mu}{f'} = -T_0 (0, 1, \vec{0})$$

が得られる。これは確かに σ に依存しないから、運動方程式は満たされている。また第 0 座標に課される自由端点の境界条件 $\mathcal{P}^\sigma_0 = 0$ が満たされていることも見て取れる。

6.7 について

x^1 軸の $0 \leq x^1 \leq a$ を占める弦の作用の計算結果 (6.72) は、弦の描く世界面の面積が $ac(t_f - t_i)$ であることを意味する。弦の描く世界面は $x^0 x^1$ 面内の長方形を成し、 x^0 軸に沿う長さが $c(t_f - t_i)$ 、 x^1 軸に沿う長さが a であることを考えれば、これはもっともなことである。

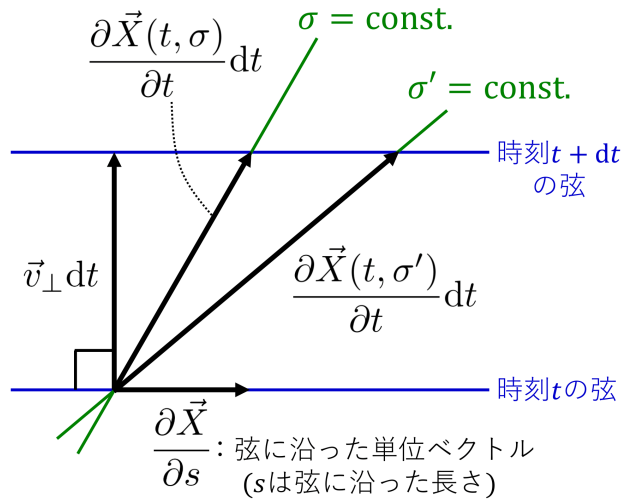


図 13 空間における弦の運動と横方向速度 \vec{v}_\perp (教科書の図 6.11(p.121) を改変)

6.8 横方向速度から見た作用

弦の速度のようなものを定義したい。 $\partial\vec{X}/\partial t$ は [図 13 のように σ が一定の曲線に沿い]、パラメーター σ の選択に依存するため物理的に重要でない。一方、ある指定された時刻 t における弦の上の点が弦に垂直に動いたと仮定した場合の速度として横方向速度 \vec{v}_\perp を定義すると (図 13 参照)、定義によりこれはパラメーターの選択に依らない。弦に沿った単位ベクトル $\partial\vec{X}/\partial s$ (s は弦に沿った長さ) を用いて横方向速度は

$$\vec{v}_\perp = \frac{\partial\vec{X}}{\partial t} - \left(\frac{\partial\vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial\vec{X}}{\partial s} \right) \frac{\partial\vec{X}}{\partial s}$$

と表される。 [これがパラメーター σ の選択に依らずに同一のベクトル \vec{v}_\perp を与えることが図 13 から読み取れる。]

静的ゲージの下で弦の作用は横方向速度 \vec{v}_\perp を用いて

$$S = -T_0 \int dt \int_0^{\sigma_1} d\sigma \frac{ds}{d\sigma} \sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}} \quad (6.88)$$

と表される [導出は下記]。これはラグランジアンが $L = -T_0 \int ds \sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}$ であることを意味する。ここで $T_0 ds$ が弦の素片 ds の静止エネルギーであることに注意すると (単位長さあたりの静止エネルギーは $\mu_0 c^2 = T_0$; (6.75)), これは相対論的な粒子のラグランジアン (5.8): $L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ の自然な一般化になっていることが分かる。

横方向速度 \vec{v}_\perp を用いると、静的ゲージの下で

$$P^{\sigma\mu} = -\frac{T_0}{c^2} \frac{\left(\frac{\partial\vec{X}}{\partial s} \cdot \frac{\partial\vec{X}}{\partial t} \right) \dot{X}^\mu + \left(c^2 - \left(\frac{\partial\vec{X}}{\partial t} \right)^2 \right) \frac{\partial X^\mu}{\partial s}}{\sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}} \quad (6.91)$$

$$\mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{T_0}{c} \frac{\dot{X}^\mu - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right) \frac{\partial X^\mu}{\partial s}}{\sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}} \quad (6.93)$$

と表される [導出は下記].

6.8 節, 式の導出など

■作用の式 (6.88) の導出 静的ゲージ $X^\mu = (ct, \vec{X})$ では

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} = \left(0, \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right), \quad \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} = \left(c, \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)$$

より

$$(\dot{X})^2 = -c^2 + \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2, \quad (X')^2 = \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right)^2, \quad \dot{X} \cdot X' = \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \quad (6.84)$$

である. これを用いて南部-後藤作用における平方根の中を評価すると

$$\begin{aligned} (\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2 &= \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right)^2 + \left[c^2 - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2 - 2 \right] \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right)^2 \\ &= \left(\frac{ds}{d\sigma} \right)^2 \left[\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right)^2 + c^2 - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

となる. 最右辺を

$$\vec{v}_\perp = \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right) \frac{\partial \vec{X}}{\partial s}, \quad \therefore v_\perp^2 = \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right)^2$$

によって書き換えると

$$\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2} = c \frac{ds}{d\sigma} \sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}} \quad (6.87)$$

が得られるので, 南部-後藤作用は式 (6.88) のように表される.

■ $\mathcal{P}^{\sigma\mu}$ の式 (6.91), $\mathcal{P}^{\tau\mu}$ の式 (6.93) の導出 $\mathcal{P}^{\tau\mu}$ の式 (6.50) の分母は上式 (6.87) で与えられる. さらに分子を上式 (6.84) によって簡単にすると

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{\sigma\mu} &= -\frac{T_0}{c} \frac{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right) \dot{X}^\mu - \left(-c^2 + \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2 \right) X'^\mu}{c \frac{ds}{d\sigma} \sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}} \\ &= -\frac{T_0}{c^2} \frac{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right) \dot{X}^\mu + \left(c^2 - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2 \right) \frac{\partial X^\mu}{\partial s}}{\sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}} : (6.93) \end{aligned}$$

となる.

また

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}^{\tau\mu} &= -\frac{T_0}{c} \frac{(\dot{X} \cdot X')X'^{\mu} - (X')^2 \dot{X}^{\mu}}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}} \quad (\because \text{式 (6.49)}) \\
 &= -\frac{T_0}{c} \frac{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}\right) X'^{\mu} - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}\right)^2 \dot{X}^{\mu}}{c \frac{ds}{d\sigma} \sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}} \\
 &\quad (\text{分母に対して式 (6.87) を, 分子に対して式 (6.84) を用いた}) \\
 &= \frac{T_0}{c} \frac{\dot{X}^{\mu} - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}\right) \frac{\partial X^{\mu}}{\partial s}}{\sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}} : (6.93). \quad \left(\because \frac{\partial X^{\mu}}{\partial \sigma} = \frac{ds}{d\sigma} \frac{\partial X^{\mu}}{\partial s}, \quad \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial s}\right)^2 = 1 \right)
 \end{aligned}$$

6.8 について

■横方向速度と縦方向の振動, σ のパラメーター付けについて 弦の速度を定義する方法には曖昧さがあり, 横方向速度の導入は1つの見方に過ぎないと言える. しかしそれは σ の選択に依らない意味を持っているため, 「物理的な運動は弦に対して横方向のものに限られる」(第6章序文) と言って良い. これを踏まえると, 4.4 節で「相対論的な弦では縦方向の振動は許容されない」とあるのは, 正確には縦方向の振動を考えることに意味がないというニュアンスであると推察される.

ところで6.3節の補足で教科書の内容をやや先取りして述べたように, 弦の各点の運動を追うことは σ の人為的なパラメーター付けに還元される. しかしながら横方向速度自体はパラメーター σ の選択に依らずに定義でき, σ のパラメーター付けによって弦の各点の軌跡を定義づけることは別問題である(この点は7.1節ですぐに明白になる). また例えば7.3節における σ のパラメーター付け

$$\frac{ds}{d\sigma} = \sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}$$

の下では, 弦に固定した2点(一定の $d\sigma$ の値だけ隔たる)の間の弦に沿う長さ ds は変化し得ると考えられる.

■式(6.83), 式(6.85)の計算について v_{\perp}^2 の式(6.83)の導出, および式(6.85)第2の等号では $\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial s}\right)^2 = 1$ に注意する.

6.9 自由な開弦の端点の運動

端点が全方向に自由に動ける弦を考える.

弦の内部の点はその運動を辿ることができないのに対し, 弦の端点に関しては速度が明確に定義される. 自由端点の条件の時間成分

$$0 = \mathcal{P}^{\sigma 0} = -\frac{T_0}{c} \frac{\frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial t}}{\sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}}, \quad \therefore \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} = 0 \quad (7)$$

より端点の速度 $\partial \vec{X} / \partial t$ は弦の方向 $\partial \vec{X} / \partial s$ に直交する. すなわち端点は弦に対して横方向に運動する. このとき式(7)により横方向速度が

$$\vec{v}_{\perp} \equiv \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s}\right) \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \equiv \vec{v} \quad (8)$$

となって、端点の速度 $\vec{v} \equiv \partial \vec{X} / \partial t$ に一致することは理に合っている。

式 (7), (8) により自由端点の条件の空間成分は

$$0 = \vec{p}^\sigma = -T_0 \sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}} \frac{\partial \vec{X}}{\partial s}, \quad \therefore v^2 = c^2$$

となるので、端点は光速で運動する。

問題 (第 6 章)

問題 6.9 相対論的な弦のハミルトニアン密度

ここで 7.2 節で言及されている問題 6.9 に解答する。静的ゲージを用いると、弦のラグランジアン密度は作用の式 (6.88) より

$$\mathcal{L} = -T_0 \frac{ds}{d\sigma} \sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}$$

となるから、正準運動量密度は

$$\begin{aligned} \vec{p} &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \vec{X})} \\ &= \frac{T_0 ds}{c^2 d\sigma} \frac{1}{2\sqrt{1 - v_\perp^2/c^2}} \frac{\partial}{\partial (\partial_t \vec{X})} v_\perp^2 \\ &= \frac{T_0 ds}{c^2 d\sigma} \frac{1}{\sqrt{1 - v_\perp^2/c^2}} \left\{ \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right) \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right\} \quad \left(\because v_\perp^2 = \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right)^2 : (6.83) \right) \\ &= \frac{T_0 ds}{c^2 d\sigma} \frac{\vec{v}_\perp}{\sqrt{1 - v_\perp^2/c^2}} \quad \left(\because \vec{v}_\perp = \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right) \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} : (6.82) \right) \end{aligned}$$

で与えられる。よってハミルトニアン密度は

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &\equiv (\partial_t \vec{X}) \cdot \vec{p} - \mathcal{L} \\ &= T_0 \frac{ds}{d\sigma} \left(\frac{v_\perp^2/c^2}{\sqrt{1 - v_\perp^2/c^2}} + \sqrt{1 - v_\perp^2/c^2} \right) \\ &= \frac{T_0 ds/d\sigma}{\sqrt{1 - v_\perp^2/c^2}} \end{aligned}$$

となり、ハミルトニアン

$$H = \int d\sigma \mathcal{H} = \int \frac{T_0 ds}{\sqrt{1 - v_\perp^2/c^2}} : (7.9)$$

を得る。この結果の解釈は 7.2 節に示されている。

第7章 弦のパラメーター付けと古典的な運動

7.1 σ のパラメーター付けの選択

パラメーター τ に対しては静的ゲージ $\tau = t$ を採用した。次に弦が空間内に描く面 $\vec{X}(t, \sigma)$ (これを弦面と呼ぶことにする) に対して便利な σ のパラメーター付けを考える。これにより世界面 $X^\mu(t, \sigma) = (ct, \vec{X}(t, \sigma))$ のパラメーター付けも決定される。

弦面の各点で、時刻 t が一定の弦に沿う方向 $\partial\vec{X}/\partial\sigma$ と、 σ が一定の曲線に沿う方向 $\partial\vec{X}/\partial t$ が直交するようにパラメーター σ を選ぶ:

$$\frac{\partial\vec{X}}{\partial\sigma} \cdot \frac{\partial\vec{X}}{\partial t} = 0.$$

このとき $\partial\vec{X}/\partial t$ は弦に垂直なので、これは横方向速度に他ならない:

$$\vec{v}_\perp = \frac{\partial\vec{X}}{\partial t}.$$

さらに静的ゲージにおいて開弦の端点は弦に対して横方向に運動するため、弦の端点が描く弦面の境界は弦に直交する (6.9 節)。よって図 14 のように、 $t = 0$ における σ の範囲 $[0, \sigma_1]$ が、他のすべての時刻における弦の範囲になる。閉弦に対しても $t = 0$ における σ の範囲 $[0, \sigma_c]$ が、他のすべての時刻における弦の範囲になる。

静的ゲージにおける $\mathcal{P}^{\tau\mu}$ の式 (6.93) と $\mathcal{P}^{\sigma\mu}$ の式 (6.91) はそれぞれ以上の σ の選択により、さらに

$$\mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{T_0}{c^2} \frac{ds/d\sigma}{\sqrt{1 - v_\perp^2/c^2}} \frac{\partial X^\mu}{\partial t}, \quad \mathcal{P}^{\sigma\mu} = -T_0 \sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}} \frac{\partial X^\mu}{\partial s}$$

と簡略化される ($\frac{\partial\vec{X}}{\partial\sigma} \cdot \frac{\partial\vec{X}}{\partial t} = 0, \vec{v}_\perp = \frac{\partial\vec{X}}{\partial t}$ だから)。

7.2 弦の運動方程式の物理的な解釈

弦の長さ ds の素片の静止エネルギーは $T_0 ds$ であり (弦の単位長さあたりの質量は $\mu_0 = T_0/c^2$: (6.75)), 7.1 節で施した σ のパラメーター付けの下で素片は速度 \vec{v}_\perp で横方向に運動するから、素片の全エネルギーは

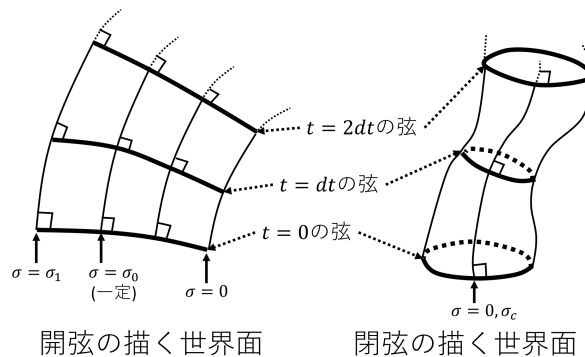


図 14 弦面に対する σ のパラメーター付け (教科書の図 7.1(p.130) を改変)

$T_0 ds / \sqrt{1 - v_{\perp}^2 / c^2}$ となると考えられる。実際このことに整合して、弦のハミルトニアンを計算すると

$$H = \int \frac{T_0 ds}{\sqrt{1 - v_{\perp}^2 / c^2}}$$

となる (問題 6.9 [ただしこの表式はパラメーター σ の具体的な選択に依らずに導かれている])。さて、以上のパラメーター (τ, σ) の選択の下で、弦の運動方程式

$$\frac{\partial \mathcal{P}^{\tau\mu}}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}^{\sigma\mu}}{\partial \sigma} = 0$$

の時間成分は

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{T_0 ds / d\sigma}{c \sqrt{1 - v_{\perp}^2 / c^2}} \right) = 0$$

を与える。先の議論により、これは弦の各素片が持つエネルギー $T_0 ds / \sqrt{1 - v_{\perp}^2 / c^2}$ が保存されることを意味する。また、エネルギー保存則の式も用いると運動方程式の空間成分は

$$\frac{T_0}{c^2} \frac{1}{\sqrt{1 - v_{\perp}^2 / c^2}} \frac{\partial \vec{v}_{\perp}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s} \left(T_0 \sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}} \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right) \quad (7.14)$$

と表される [導出は下記]。実効的な弦の張力と質量密度をそれぞれ

$$T_{\text{eff}} = T_0 \sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}, \quad \mu_{\text{eff}} = \frac{T_0}{c^2} \frac{1}{\sqrt{1 - v_{\perp}^2 / c^2}}$$

と同定することにより、これは非相対論的な弦の運動方程式 [すなわち波動方程式] と類似の形

$$\mu_{\text{eff}} \frac{\partial \vec{v}_{\perp}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s} \left(T_{\text{eff}} \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right)$$

に書き換えられる [元の運動方程式の両辺に共通している T_0 を残してあるのはこの書き換えのためである]。

7.2 節, 式の導出など

■運動方程式 (7.14) の導出 運動方程式の空間成分 $\partial_t \vec{\mathcal{P}}^{\tau} = -\partial_{\sigma} \vec{\mathcal{P}}^{\sigma}$ に 7.1 節の式

$$\vec{\mathcal{P}}^{\tau} = \frac{T_0}{c^2} \frac{ds/d\sigma}{\sqrt{1 - v_{\perp}^2 / c^2}} \vec{v}_{\perp}, \quad \vec{\mathcal{P}}^{\sigma} = -T_0 \sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}} \frac{\partial \vec{X}}{\partial s}$$

を代入すると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[T_0 \sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}} \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right] &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{T_0}{c^2} \frac{ds/d\sigma}{\sqrt{1 - v_{\perp}^2 / c^2}} \vec{v}_{\perp} \right] \\ &= \frac{T_0}{c^2} \frac{ds/d\sigma}{\sqrt{1 - v_{\perp}^2 / c^2}} \frac{\partial \vec{v}_{\perp}}{\partial t}, \quad \left(\because \text{式 (7.7)} : \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{T_0 ds/d\sigma}{c \sqrt{1 - v_{\perp}^2 / c^2}} \right) = 0 \right) \\ \therefore \frac{T_0}{c^2} \frac{1}{\sqrt{1 - v_{\perp}^2 / c^2}} \frac{\partial \vec{v}_{\perp}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial s} \left[T_0 \sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}} \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right] : (7.14) \end{aligned}$$

を得る。

7.2 について

ハミルトニアン (7.9) だけでなく, 式 (7.10):

$$\vec{p}^\tau = \frac{T_0}{c^2} \frac{ds/d\sigma}{\sqrt{1-v_\perp^2/c^2}} \vec{v}_\perp$$

に対しても同様の解釈が可能である. すなわち弦の素片 ds の持つ質量は $\mu_0 ds = T_0 ds/c^2$, 運動量は

$$\frac{T_0 ds}{c^2} \frac{\vec{v}_\perp}{\sqrt{1-v_\perp^2/c^2}}$$

であり, 上式の \vec{p}^τ はこれを $d\sigma$ で割った, パラメーター σ に関する運動量密度になっている. (このことは 8.4 節で言及されている.)

7.3 波動方程式と制約条件

弦の運動方程式は

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial t^2} = \frac{\sqrt{1-v_\perp^2/c^2}}{ds/d\sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\sqrt{1-v_\perp^2/c^2}}{ds/d\sigma} \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right)$$

と書き換えられる. これは

$$\frac{ds/d\sigma}{\sqrt{1-v_\perp^2/c^2}} = 1 \quad (9)$$

となるようにパラメーター σ を選ぶと, 波動方程式

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial \sigma^2}$$

に簡略化される.

パラメーター σ の変化 $d\sigma$ に伴って得られる弦の長さ ds の持つエネルギー $T_0 ds/\sqrt{1-v_\perp^2/c^2}$ を dE と書くと, パラメーター付けの制約条件は

$$\text{式 (9)} \Leftrightarrow d\sigma = \frac{1}{T_0} dE \quad (10)$$

となる. これは同じ σ の長さ $d\sigma$ を持つ弦の素片それぞれが, 等量のエネルギー $T_0 d\sigma$ を運ぶようにパラメーター σ を選ぶことを意味する. このような σ の選択はパラメーター σ に課した直交条件 $\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} = 0$ と両立する.

パラメーターの制約条件は

$$\text{式 (9), 式 (10)} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right)^2 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2 = 1 \\ \frac{1}{T_0} \frac{dE}{d\sigma} = \frac{ds/d\sigma}{\sqrt{1-v_\perp^2/c^2}} = 1 \end{cases} \quad (7.23)$$

と書き換えられる [上式 (7.23) の導出は下記]. また制約条件 (9) により

$$\mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{T_0}{c^2} \frac{\partial X^\mu}{\partial t}, \quad \mathcal{P}^{\sigma\mu} = -T_0 \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}$$

となるから, 自由な端点の境界条件 $\mathcal{P}^{\sigma\mu} = 0$ は Neumann 境界条件 $\partial X^\mu/\partial \sigma = 0$ になる.

7.3 節, 式の導出など

■制約条件 (7.23) の導出 パラメーター付けの条件 (9) は

$$\left(\frac{ds}{d\sigma}\right)^2 + \frac{1}{c^2}v_{\perp}^2 = 1$$

と書き直される. ここで $\frac{\partial \vec{X}}{\partial s}$ が単位ベクトルであることに注意して

$$\left(\frac{ds}{d\sigma}\right)^2 = \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \frac{ds}{d\sigma}\right)^2 = \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}\right)^2, \quad v_{\perp}^2 = \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right)^2$$

とすると, 式 (7.23):

$$\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}\right)^2 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right)^2 = 1$$

を得る.

7.3 について

■パラメーター付けの制約条件 $d\sigma = dE/T_0$ と直交条件 $\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} = 0$ の整合性 「上述のような σ の選択は, あらゆる弦に関して, 直交条件 (7.1) と整合する」(教科書 p.139) ことは次のように理解できる. まず時刻 $t = t_i$ における始状態の弦に対して, 制約条件 (10): $d\sigma = dE/T_0$ を満たすように, すなわち同じ σ の長さ $d\sigma$ を持つ弦の素片それぞれが, 等量のエネルギー $T_0 d\sigma$ を運ぶようにパラメーター σ を付ける. このとき始状態の弦においてパラメーターの範囲 $[\sigma, \sigma + d\sigma]$ に対応する弦の素片は, 直交条件 (7.1): $\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} = 0$ に従って弦に対して横方向に運動し, 微小時間後に弦のパラメーター $[\sigma, \sigma + d\sigma]$ の部分を占める. エネルギー保存則により微小時間後にもこの部分の持つエネルギーは $T_0 d\sigma$ となるから, すべての時刻でパラメーター付けの制約条件 (10) が満たされることになる.

■ \vec{p}^{σ} の式 (7.24) について 第 2 の等号は

$$A(\sigma) \equiv \frac{ds/d\sigma}{\sqrt{1 - v_{\perp}^2/c^2}} = 1$$

となるようにパラメーター σ を選んだことによる.

■6.5 節から 7.3 節のまとめ ここでパラメーターに対する条件を 1 つずつ付け加える度に, 運動方程式などの主要な結論がどのように簡略化されるかを図 15 にまとめる.

7.4 開弦の一般的な運動

自由な端点を持つ開弦の一般的な運動を考えると,

$$\begin{aligned} \text{波動方程式} \quad \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial \sigma^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial t^2} = 0 &\Rightarrow \vec{X}(t, \sigma) = \frac{1}{2} \left(\vec{F}(ct + \sigma) + \vec{G}(ct - \sigma) \right), \\ \text{自由端点の条件} \quad \left. \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right|_{\sigma=0} = 0 &\Rightarrow \vec{X}(t, \sigma) = \frac{1}{2} \left(\vec{F}(ct + \sigma) + \vec{F}(ct - \sigma) \right), \end{aligned} \quad (11)$$

パラメーターの選択	南部-後藤作用 $S = \int d\tau d\sigma \mathcal{L}$ $\mathcal{L} = -\frac{T_0}{c} \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}$	$\begin{cases} \mathcal{P}^\tau{}_\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} = (6.49) \\ \mathcal{P}^{\sigma\mu} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'^\mu} = (6.50) \end{cases}$	運動方程式 $\frac{\partial \mathcal{P}^\tau{}_\mu}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}^{\sigma\mu}}{\partial \sigma} = 0$	開弦の端点 $\sigma = \sigma_1$ に対して $\begin{cases} \text{Dirichlet境界条件} \\ \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} = 0 \quad (\mu \neq 0) \\ \text{自由端点の条件} \\ \mathcal{P}^{\sigma\mu} = 0 \end{cases}$ § 6.5
静的ゲージ $t = \tau$ (§ 6.6)	$\begin{cases} L = -T_0 \int ds \sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}} \\ H = \int \frac{T_0 ds}{\sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}} \end{cases}$ ($T_0 = \mu_0 c^2$ なので、自由粒子の場合の自然な一般化)	$\begin{cases} \mathcal{P}^{\sigma\mu} = (6.91) \\ \mathcal{P}^{\tau\mu} = (6.93) \end{cases}$		§ 6.8
σ に対する条件 $\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} = 0 \dots (\star)$ (弦が空間に描く面の各点で、§ 7.1)		$\begin{cases} \mathcal{P}^{\tau\mu} = (7.3) \\ \mathcal{P}^{\sigma\mu} = (7.4) \end{cases}$	$\begin{aligned} \mu_{\text{eff}} \frac{\partial \vec{v}_\perp}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial s} \left(T_{\text{eff}} \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right), \\ T_{\text{eff}} &\equiv T_0 \sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}, \\ \mu_{\text{eff}} &\equiv \frac{T_0}{c^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}} \end{aligned}$	§ 7.2
σ に対する条件 (§ 7.3) $\frac{dE}{d\sigma} = T_0$ ($dE = T_0 ds / \sqrt{1 - v_\perp^2/c^2}$) ↓ (\star)の下で $\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}\right)^2 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right)^2 = 1$		$\begin{cases} \mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{T_0}{c^2} \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \\ \mathcal{P}^{\sigma\mu} = -T_0 \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} \end{cases}$	$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial \sigma^2}$ 波動方程式	開弦の端点 $\sigma = \sigma_1$ に対して $\begin{cases} \text{Dirichlet境界条件} \\ \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} = 0 \quad (\mu \neq 0) \\ \text{Neumann境界条件} \\ \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} = 0 \end{cases}$ § 7.3

図 15 パラメーター付けの条件とその帰結

$$\text{自由端点の条件} \quad \left. \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right|_{\sigma=\sigma_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{F}(u + 2\sigma_1) = \vec{F}(u) + 2\sigma_1 \frac{\vec{v}_0}{c} \quad (12)$$

(\vec{v}_0 : 定数ベクトル),

パラメーター付けの制約条件

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} = 0, \quad \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}\right)^2 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{d\vec{F}(u)}{du} \right|^2 = 1, \quad (13)$$

すなわち u は曲線 $\vec{F}(u)$ に沿った長さ

であり [導出は下記], 式 (12), 式 (13) を満たす $\vec{F}(u)$ を決めれば弦の運動 (11) が決まる.

式 (11) より $\vec{F}(ct) = \vec{X}(t, 0)$ は開弦の端点 $\sigma = 0$ の位置であり, 式 (12):

$$\vec{F} \left(c \left(t + \frac{2\sigma_1}{c} \right) \right) = \vec{F}(ct) + \frac{2\sigma_1}{c} \vec{v}_0$$

により, 端点は時間周期 $\Delta t = 2\sigma_1/c = 2E/cT_0$ (\cdot : 式 (10): $d\sigma = dE/T_0$) ごとに $\vec{v}_0 \Delta t$ だけ変位する. \vec{v}_0 は時間 Δt における平均速度である [この解釈を成り立たせるために式 (12) 右辺において, \vec{v}_0 の係数 $2\sigma_1/c$ をくり出したものと考えられる]. よって端点の 1 周期 Δt の間の運動を観測すれば $\vec{F}(ct) = \vec{X}(t, 0)$ の関数形が, したがって弦の運動 (11) が完全に決定される.

エネルギー E を与えられた長さ l の真っ直ぐな開弦が, その中点のまわりに一定の角速度 ω で回転する状況を考える. このとき長さ l と角速度 ω はエネルギー E を用いて, したがって $\sigma_1 = E/T_0$ を用いて表される

(式 (10): $d\sigma = dE/T_0$). 実際, 弦の midpoint を原点とし弦の回転面を (x, y) 平面にとると, $\sigma = 0$ の端点の運動は

$$\vec{X}(t, 0) = \vec{F}(ct) = \frac{l}{2}(\cos \omega t, \sin \omega t)$$

で与えられる. これに対して $\vec{F}(u)$ の満たす条件 (12)(ただし円運動の 1 周期における平均速度は $\vec{v}_0 = 0$) を課すと

$$\frac{\omega}{c} = \frac{\pi}{\sigma_1} = \frac{\pi T_0}{E} \quad \Leftarrow \quad \omega \text{ を } E \text{ で表した式} \quad (14)$$

が得られ [導出は下記], さらに $\vec{F}(u)$ の満たす条件 (13) を課すと

$$\begin{aligned} c &= \frac{l}{2}\omega, \quad \Leftarrow \quad \text{端点は光速で運動すること [一般論は 6.9 節]} \\ \therefore E &= \frac{\pi}{2}T_0l \quad \Leftarrow \quad l \text{ を } E \text{ で表した式,} \quad (15) \\ &\quad \text{長さ } l \text{ の静止した弦のエネルギー } T_0l \text{ より大きい} \end{aligned}$$

が見出される [導出は下記]. 式 (14) において弦のエネルギー E が増すと角速度 ω が遅くなることは次のように理解できる. すなわち式 (15) によりエネルギー E が増すと弦の長さ l が増す. このとき端点の速度を光速に保つには, 角速度 ω を遅くする必要がある.

以上により弦の運動 $\vec{X}(t, \sigma)$ も σ_1 を用いて表される [導出は下記]:

$$\vec{X}(t, \sigma) = \frac{\sigma_1}{\pi} \cos \frac{\pi\sigma}{\sigma_1} \left(\cos \frac{\pi ct}{\sigma_1}, \sin \frac{\pi ct}{\sigma_1} \right). \quad (7.63)$$

7.4 節, 式の導出など

■波動方程式の解 (11) の導出 波動方程式の一般解

$$\vec{X}(t, \sigma) = \frac{1}{2} \left(\vec{F}(ct + \sigma) + \vec{G}(ct - \sigma) \right)$$

に対して自由端点の条件

$$0 = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \Big|_{\sigma=0} = \frac{1}{2} \{ \vec{F}'(ct) - \vec{G}'(ct) \} \quad \text{for all } t$$

すなわち

$$\frac{d\vec{F}(u)}{du} = \frac{d\vec{G}(u)}{du}$$

を課すと,

$$\vec{G}(u) = \vec{F}(u) + \vec{a}_0, \quad \therefore \vec{X}(t, \sigma) = \frac{1}{2} \left(\vec{F}(ct + \sigma) + \vec{F}(ct - \sigma) + \vec{a}_0 \right)$$

となる. ここに \vec{a}_0 は定数ベクトルであり, これを任意関数 $\vec{F}(u)$ に含めて $\vec{F} + \vec{a}_0/2 \rightarrow \vec{F}$ と再定義すると, 式 (11):

$$\vec{X}(t, \sigma) = \frac{1}{2} \left(\vec{F}(ct + \sigma) + \vec{F}(ct - \sigma) \right)$$

を得る.

■波動方程式の解 (12) の導出 弦座標式 (11) に対して $\sigma = \sigma_1$ における境界条件

$$0 = \left. \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right|_{\sigma=\sigma_1} = \frac{1}{2} \{ \vec{F}'(ct + \sigma_1) - \vec{F}'(ct - \sigma_1) \} \quad \text{for all } t$$

を課すと,

$$\frac{d\vec{F}}{du}(u + 2\sigma_1) = \frac{d\vec{G}}{du}(u) \quad (u = ct - \sigma_1)$$

となる. これは導関数 \vec{F}' が周期 $2\sigma_1$ の周期関数であることを意味しており, これを積分すると, \vec{F} は式 (12)

$$\vec{F}(u + 2\sigma_1) = \vec{F}(u) + 2\sigma_1 \frac{\vec{v}_0}{c}$$

のように準周期的となる (\vec{v}_0 は定数ベクトル).

■制約条件の帰結 (13) の導出 パラメーター付けの制約条件

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} = 0, \quad \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right)^2 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2 = 1$$

をまとめて

$$\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \pm \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2 = 1 \quad (7.42)$$

と書いておき, 弦座標の式 (11) に対する導関数

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \pm \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\vec{F}'(ct + \sigma) - \vec{F}'(ct - \sigma) \right) \pm \frac{1}{2} \left(\vec{F}'(ct + \sigma) + \vec{F}'(ct - \sigma) \right) = \pm \vec{F}'(ct \pm \sigma)$$

を代入すると, 式 (13):

$$\left| \frac{d\vec{F}(u)}{du} \right|^2 = 1$$

を得る.

■式 (14) の導出 回転弦の端点 $\sigma = 0$ の運動を

$$\vec{X}(t, 0) = \vec{F}(ct) = \frac{l}{2} (\cos \omega t, \sin \omega t)$$

で与えたとき, $\vec{F}(ct) = \vec{X}(t, 0)$ より対応する関数 $\vec{F}(u)$ は

$$\vec{F}(u) = \frac{l}{2} \left(\cos \frac{\omega u}{c}, \sin \frac{\omega u}{c} \right) \quad (7.54)$$

である. これに対して $\vec{F}(u)$ の満たす条件 (12) (ただし円運動の 1 周期における平均速度は $\vec{v}_0 = 0$) を課すと,

$$\frac{\omega}{c}(2\sigma_1) = 2\pi m, \quad \therefore \frac{\omega}{c} = \frac{\pi}{\sigma_1} m \quad (m : \text{整数}) \quad (7.55)$$

を得る. すると時刻 $t = 0$ での弦は

$$\vec{X}(0, \sigma) = \frac{1}{2} \left(\vec{F}(\sigma) + \vec{F}(-\sigma) \right) = \frac{l}{2} \left(\cos \frac{\pi m \sigma}{\sigma_1}, 0 \right)$$

と表されるので、パラメーターの範囲 $0 \leq \sigma \leq \sigma_1$ がちょうど弦全体に対応する (すなわち弦の各点がただ 1 つの σ の値によって指定される) ためには、 $m = 1$ と選ばなければならない。そこで上式 (7.55) に $m = 1$ を代入すると、式 (14):

$$\frac{\omega}{c} = \frac{\pi}{\sigma_1}$$

を得る。

■式 (15) の導出 上式 (7.54) の \vec{F} の導関数

$$\frac{d\vec{F}}{du} = \frac{\omega l}{2c} \left(-\sin \frac{\omega u}{c}, \cos \frac{\omega u}{c} \right)$$

を条件 (13) に代入すると、

$$1 = \left| \frac{d\vec{F}}{du} \right|^2 = \left(\frac{\omega l}{2c} \right)^2, \quad \therefore l = \frac{2c}{\omega}$$

を得る。これは [6.9 節ですでに一般論として見たように、] 弦の端点が光速で運動すること $c = \frac{l}{2}\omega$ を表している。さらに式 (14) を代入すると、

$$l = \frac{2\sigma_1}{\pi} = \frac{2}{\pi} \frac{E}{T_0}, \quad \therefore E = \frac{\pi}{2} T_0 l : (15)$$

を得る。

■回転弦の座標 (7.63) の導出 上式 $l = \frac{2c}{\omega} = \frac{2\sigma_1}{\pi}$ を用いて、 $\vec{F}(u)$ の式 (7.54) の各係数を σ_1 で表すと

$$\vec{F}(u) = \frac{\sigma_1}{\pi} \left(\cos \frac{\pi u}{\sigma_1}, \sin \frac{\pi u}{\sigma_1} \right)$$

となる。これを式 (11) に代入すると

$$\begin{aligned} \vec{X}(t, \sigma) &= \frac{\sigma_1}{2\pi} \left(\cos \frac{\pi(ct + \sigma)}{\sigma_1} + \cos \frac{\pi(ct - \sigma)}{\sigma_1}, \sin \frac{\pi(ct + \sigma)}{\sigma_1} + \sin \frac{\pi(ct - \sigma)}{\sigma_1} \right) \\ &= \frac{\sigma_1}{\pi} \cos \frac{\pi\sigma}{\sigma_1} \left(\cos \frac{\pi ct}{\sigma_1}, \sin \frac{\pi ct}{\sigma_1} \right) : (7.63) \end{aligned}$$

を得る。

計算練習 7.1

$$\begin{aligned} &\vec{X} \left(t + \frac{2\sigma_1}{c}, \sigma \right) - \vec{X}(t, \sigma) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \vec{F}(ct + 2\sigma_1 + \sigma) + \vec{F}(ct + 2\sigma_1 - \sigma) \right\} - \frac{1}{2} \left\{ \vec{F}(ct + \sigma) + \vec{F}(ct - \sigma) \right\} \quad (\because \text{式 (11)}) \\ &= 2\sigma_1 \frac{\vec{v}_0}{c} \quad \left(\because \text{式 (12)} : \vec{F}(u + 2\sigma_1) = \vec{F}(u) + 2\sigma_1 \frac{\vec{v}_0}{c} \right) \end{aligned}$$

なので、 \vec{v}_0 は弦の任意の点 σ の、任意の時刻から設定した一定時間 $2\sigma_1/c$ における平均速度である。

計算練習 7.2

計算練習 7.1 の式を微分して

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{X} \left(t + \frac{2\sigma_1}{c}, \sigma \right) = \frac{\partial}{\partial t} \vec{X}(t, \sigma)$$

を得る。これは弦の任意の点の速度が周期 $2\sigma_1/c$ を持つ周期関数であることを意味する。

7.5 閉弦の運動と尖点

$$\begin{aligned} & \text{波動方程式} \quad \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial \sigma^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial t^2} = 0 \\ \Rightarrow \quad & \vec{X}(t, \sigma) = \frac{1}{2} \left(\vec{F}(u) + \vec{G}(v) \right), \quad u \equiv ct + \sigma, \quad v \equiv ct - \sigma, \\ & \text{パラメーター付けの制約条件} \quad \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} = 0, \quad \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right)^2 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2 = 1 \\ \Rightarrow \quad & |\vec{F}'(u)|^2 = |\vec{G}'(v)|^2 = 1. \quad [\text{導出は下記}] \end{aligned} \tag{16}$$

ここで自由な閉弦を考え

$$\begin{aligned} & \text{同一視} \quad \sigma \sim \sigma + \sigma_1, \quad \sigma_1 = E/T_0 \quad (\because \text{式 (10)} : d\sigma = dE/T_0), \\ & \text{周期条件} \quad \vec{X}(t, \sigma + \sigma_1) = \vec{X}(t, \sigma) \end{aligned}$$

を導入すると

$$\vec{F}'(u + \sigma_1) = \vec{F}'(u), \quad \vec{G}'(v - \sigma_1) = \vec{G}'(v) \tag{17}$$

が導かれる [導出は下記]。式 (16), 式 (17) より $\vec{F}'(u), \vec{G}'(v)$ は周期的な単位ベクトルなので、単位球面上に閉じた曲線を描く。曲線 $\vec{F}'(u), \vec{G}'(v)$ が決まると、積分定数として現れる定数ベクトルの不定性を除いて弦の運動 $\vec{X}(t, \sigma)$ も確定する。

曲線 $\vec{F}'(u)$ と $\vec{G}'(v)$ が交わる場合を考え、交点に対応する (u, v) の値を (u_0, v_0) とする。すなわち

$$\vec{F}'(u_0) = \vec{G}'(v_0)$$

である。このとき $(u, v) = (u_0, v_0)$ となるような (t, σ) の値を (t_0, σ_0) と書くと

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{X}(t_0, \sigma_0) = \frac{1}{2} \left(\vec{F}'(u_0) + \vec{G}'(v_0) \right) = \vec{F}'(u_0)$$

であり、 $\vec{F}'(u_0)$ は単位ベクトルなので、弦の上の点 σ_0 は $\vec{F}'(u_0)$ 方向に光速で運動する。また

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \vec{X}(t_0, \sigma_0) = \frac{1}{2} \left(\vec{F}'(u_0) - \vec{G}'(v_0) \right) = 0$$

であり、一般に弦の上の点 σ_0 は尖点となる (問題 7.7) [$\frac{\partial}{\partial \sigma} \vec{X}(t_0, \sigma_0) \neq 0$ であれば点 σ_0 において弦の接線が引けるため、尖点にはならない]。

7.5 節, 式の導出など

■式 (16) の導出 パラメーター付けの制約条件

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} = 0, \quad \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right)^2 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2 = 1$$

をまとめた式 (7.42):

$$\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \pm \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2 = 1$$

を弦座標 (7.65):

$$\vec{X}(t, \sigma) = \frac{1}{2} \left(\vec{F}(u) + \vec{G}(v) \right), \quad u \equiv ct + \sigma, \quad v \equiv ct - \sigma$$

に課そう. すると上式に対して

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} &= \frac{1}{2} \left(\vec{F}'(u) + \vec{G}'(v) \right), & \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} &= \frac{1}{2} \left(\vec{F}'(u) - \vec{G}'(v) \right), \\ \therefore \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} &= \vec{F}'(u), & \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} &= -\vec{G}'(v) \end{aligned}$$

なので, 式 (16):

$$|\vec{F}'(u)|^2 = 1, \quad |\vec{G}'(v)|^2 = 1$$

を得る.

■式 (17) の導出 弦座標 (7.65):

$$\vec{X}(t, \sigma) = \frac{1}{2} \left(\vec{F}(u) + \vec{G}(v) \right), \quad u \equiv ct + \sigma, \quad v \equiv ct - \sigma$$

に周期条件 $\vec{X}(t, \sigma + \sigma_1) = \vec{X}(t, \sigma)$ を課すと

$$\vec{F}(u + \sigma_1) + \vec{G}(v - \sigma_1) = \vec{F}(u) + \vec{G}(v)$$

となる. これを移項して

$$\vec{F}(u + \sigma_1) - \vec{F}(u) = \vec{G}(v) - \vec{G}(v - \sigma_1)$$

と書くと, 右辺は v だけの関数なので, u による微分はゼロになる. したがって左辺の u -微分もゼロでなければならない. 同様に右辺の v -微分もゼロだから, 導関数の周期性 (17):

$$\vec{F}'(u + \sigma_1) = \vec{F}'(u), \quad \vec{G}'(v - \sigma_1) = \vec{G}'(v)$$

を得る.

7.6 宇宙弦 (宇宙紐)

宇宙弦 …… 宇宙的な寸法を持つ弦

- 初期宇宙の物理から許容される

- 古典的な近似によって研究可能
- 弦理論とは無関係な現象からも生じ得る

直線状の無限に長い相対論的な弦を取り上げ、宇宙弦の観測方法を考える。一般相対性理論によれば、弦の作る重力は

質量密度 μ_0 の寄与(引力)と、
弦の張力 T_0 の寄与(斥力)

が相殺して、正確にゼロになる。

宇宙弦を最も直接的に見いだす方法は、重力レンズ効果を利用するものである。
弦に垂直な面において、弦からの距離 r の円周 C は

$$\frac{C}{r} = 2\pi - \Delta, \quad \Delta: \text{欠損角度}$$

となる。よって弦に垂直な面は、図 16 のように弦を A として平面から中心角 $BAB' = \Delta$ の部分を取り除き、境界 AB, AB' を同一視して得られる領域であり、これは境界 AB, AB' を接続させた円錐として理解できる。

一般相対性理論によれば欠損角度は

$$\Delta = \frac{8\pi G\mu_0}{c^2}$$

である。以下では天体物理的状況から可能と考えられる $\Delta \ll 1$ の場合だけを考察する。

簡単のために観測者 O と光源 S は弦に垂直な同一面上にあるものとして弦による重力レンズ効果を考える。境界 AB は光源 S を通るとしても一般性を失わず、このとき AB' 上に S と同一視される点 S' がある。図 16 のように観測者 O が角 MAM' の範囲にあれば、光源と観測者を結ぶ 2 本の測地線 SO, SO' が得られ、光は両方の測地線をたどって観測者に到達する。

- 弦によるレンズ効果
 - 観測者は同じ形の 2 つの像を見る
- 密集した対象によって生じるレンズ効果
 - 2 つよりも多くの像を形成することになり、像は歪み、互いに全く異なった見え方になる可能性もある

なお欠損角度 Δ が、したがって図 16 の角度 $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ が微小であるという近似の下で、幾何学的な関係から、観測者が見る 2 つの像の間の角度 $\delta\phi$ の表式

$$\delta\phi = \frac{\Delta}{1 + d_O/d_S}, \quad d_O \equiv \overline{OA}, \quad d_S \equiv \overline{AS} \quad (7.94)$$

が得られる [導出は下記].

7.6 節, 式の導出など

■ $\delta\phi$ の表式 (7.94) の導出 図 16 において点 O の観測者が見る 2 つの像の間の角度 (レンズ効果角度) は

$$\delta\phi = \alpha + \beta$$

である。また欠損角度 Δ は三角形 SAO および三角形 S'AO の外角の和なので、

$$\Delta = \alpha + \beta + \alpha' + \beta'$$

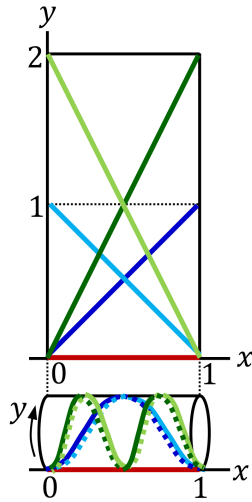


図 17 円筒 $(x, y) \sim (x, y + 1)$ において $(0, 0)$ と $(1, 0)$ を結ぶ測地線 (短いものから 5 本)

となる. よって 6km の長さに地球と同じ質量 6.0×10^{24} kg を含む弦は質量密度 10^{21} kg/m を持ち, 欠損角度 $\Delta = 3.85''$ をもたらす. ここから「天体物理的状況から可能と考えられる」のは「 $\Delta \ll 1$ の場合」(教科書 p.145) であると言える.

計算練習 7.4

μ_0, c, \hbar の冪だけを用いて表される質量 m_s を考える: $m_s = \mu_0^\alpha c^\beta \hbar^\gamma$. このとき

$$[\mu_0] = \frac{M}{L}, \quad [c] = \frac{L}{T}, \quad [\hbar] = \frac{ML^2}{T}$$

より $M = M^{\alpha+\gamma} L^{-\alpha+\beta+2\gamma} T^{-\beta-\gamma}$ となる. そこで

$$\alpha + \gamma = 1, \quad -\alpha + \beta + 2\gamma = 0, \quad -\beta - \gamma = 0$$

を解くと

$$\alpha = 1/2, \quad \beta = -1/2, \quad \gamma = 1/2, \quad \therefore m_s = \sqrt{\frac{\hbar\mu_0}{c}} : (7.86)$$

を得る.

計算練習 7.5

円筒 $(x, y) \sim (x, y + 1)$ において $(0, 0)$ と $(1, 0)$ を結ぶ測地線を, 図 17 に短いものから順に 5 本示す.

問題 (第 7 章)

問題 7.2 回転する直線状の弦

7.4 節における, 回転する直線状の弦について.

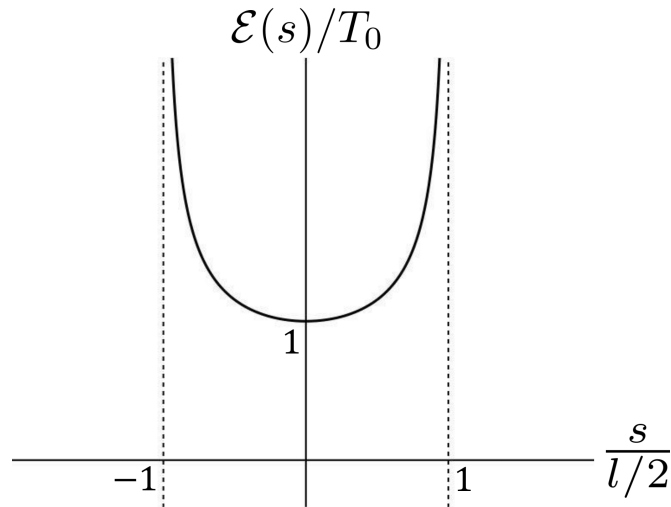


図 18 弦のエネルギー密度 $\mathcal{E}(s)$ のグラフ. $\mathcal{E}(s)$ は弦の端点 $\frac{s}{l/2} = \pm 1$ で発散する.

(a)

弦の素片 ds は速度 $v_{\perp} = s\omega = 2cs/l$ で回転しているので ($l = 2c/\omega$: (7.59)), エネルギー

$$\frac{T_0 ds}{\sqrt{1 - v_{\perp}^2/c^2}} = \frac{T_0 ds}{\sqrt{1 - (2s/l)^2}}$$

を持つ. これを $\mathcal{E}(s)ds$ と等置してエネルギー密度の表式

$$\mathcal{E}(s) = \frac{T_0}{\sqrt{1 - (2s/l)^2}} : (7.64)$$

を得る (図 18 参照).

なお素片 ds に対応するパラメーターの長さを $d\sigma$ とすると, 素片の持つエネルギーは (10): $dE = T_0 d\sigma$ とも表されるから

$$d\sigma = \frac{ds}{\sqrt{1 - (2s/l)^2}}$$

を得る. よって同じパラメーターの長さ $d\sigma$ に対応する弦の長さ ds は, 弦の中心 $s = 0$ の近くほど長くなる. これは弦の中心の近くほど回転速度が遅くなるため, 素片がエネルギー $T_0 d\sigma$ を持つにはより大きな長さ ds を要するからである.

弦上の区間 $[-s, s]$ (ただし $0 \leq s \leq l/2$) が担うエネルギーは

$$\begin{aligned} \hat{E}(s) &= 2 \int_0^s \mathcal{E}(s) ds = 2T_0 \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{1 - (2s/l)^2}} = T_0 l \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = T_0 l \int_{\theta}^{\pi/2} d\theta \\ &= T_0 l \left(\frac{\pi}{2} - \arccos \frac{s}{l/2} \right) \quad (2s/l \equiv x, \quad x \equiv \cos \theta) \end{aligned}$$

なので (積分変数と積分の上限に同じ記号を用いているが, 誤解の恐れはないだろう), 全エネルギーは

$$E = \hat{E}(l/2) = \frac{\pi}{2} T_0 l : (15)$$

となる.

(b)

エネルギー密度 $\mathcal{E}(s) = \frac{T_0}{\sqrt{1-(2s/l)^2}}$ と, 弦全体の平均エネルギー密度 $\frac{E}{l} = \frac{\pi}{2}T_0$ が等しくなるのは位置

$$s = \pm \frac{l}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{2}{\pi}\right)^2}, \quad \sqrt{1 - \left(\frac{2}{\pi}\right)^2} \simeq 0.77$$

である.

(c)

$$\begin{aligned} \hat{E}(s) = \frac{1}{2}E = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2}T_0l \quad \text{となる位置は} \quad \frac{s}{l/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0.71, \\ \hat{E}(s) = \frac{9}{10}E = \frac{9}{10} \times \frac{\pi}{2}T_0l \quad \text{となる位置は} \quad \frac{s}{l/2} = \cos \frac{\pi}{20} \simeq 0.99 \quad \text{である.} \end{aligned}$$

問題 7.7 閉弦の時間発展における尖点

7.5 節 p.143 で言及されている問題 7.7 を解く.

(a)

式 (7.65):

$$\vec{X}(t, \sigma) = \frac{1}{2} \left(\vec{F}(u) + \vec{G}(v) \right), \quad u \equiv ct + \sigma, \quad v \equiv ct - \sigma$$

より

$$\begin{aligned} \vec{T} &\equiv \left(\frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial \sigma^2} \right)_0 = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\vec{F}'(u) - \vec{G}'(v) \right) \right]_0 = \frac{1}{2} \left(\vec{F}''(u_0) + \vec{G}''(v_0) \right), \\ \vec{R} &\equiv \left(\frac{\partial^3 \vec{X}}{\partial \sigma^3} \right)_0 = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\vec{F}''(u) + \vec{G}''(v) \right) \right]_0 = \frac{1}{2} \left(\vec{F}'''(u_0) - \vec{G}'''(v_0) \right) \end{aligned}$$

となる (添字 0 は $(u, v) = (u_0, v_0)$ での値をとることを表す). また式 (16): $|\vec{F}'(u)|^2 = |\vec{G}'(v)|^2 = 1$ を微分すると $\vec{F}' \cdot \vec{F}'' = \vec{G}' \cdot \vec{G}'' = 0$ となるので, 式 (7.76): $\vec{F}'(u_0) = \vec{G}'(v_0)$ とより $\vec{F}'(u_0) \cdot \vec{T} = 0$ を得る. よって $\vec{T} \neq 0$ となる条件として, 2つの径路 $\vec{F}'(u), \vec{G}'(v)$ の交点が生正則であることを仮定すると, $\vec{T} (\neq 0)$ は $\vec{F}'(u_0)$ に直交する.

(b)

Taylor 展開 (7.81):

$$\begin{aligned} \vec{X}(t_0, \sigma) &= \vec{X}_0 + \frac{1}{2}(\sigma - \sigma_0)^2 \vec{T} + \frac{1}{3}(\sigma - \sigma_0)^3 \vec{R} + \dots, \\ \vec{X}_0 &\equiv \vec{X}(t_0, \sigma_0), \quad \vec{T} \equiv \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} \vec{X}(t_0, \sigma_0), \quad \vec{R} \equiv \frac{\partial^3}{\partial \sigma^3} \vec{X}(t_0, \sigma_0) \quad \left(\because \frac{\partial}{\partial \sigma} \vec{X}(t_0, \sigma_0) = 0 \right) \end{aligned}$$

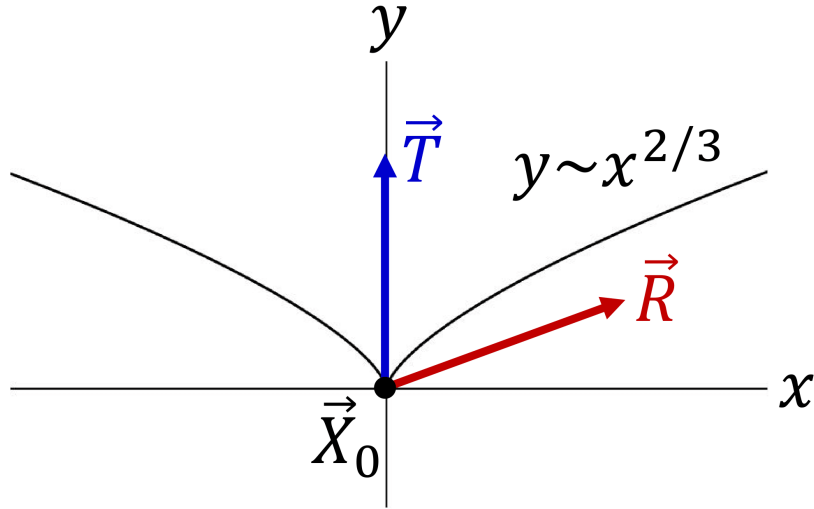


図 19 \vec{X}_0 を原点とし, \vec{T} を y 方向とし, \vec{R} を xy 面に含むような座標系

は, 図 19 のように設定した xy 座標系において

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \equiv \vec{X}(t_0, \sigma) - \vec{X}_0 = \frac{1}{2}(\sigma - \sigma_0)^2 \begin{pmatrix} 0 \\ T \end{pmatrix} + \frac{1}{3}(\sigma - \sigma_0)^3 \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \end{pmatrix} + \dots$$

と成分表示されるので,

$$x \simeq \frac{1}{3}(\sigma - \sigma_0)^3 R_x, \quad y \simeq \frac{1}{2}(\sigma - \sigma_0)^2 T$$

を得る. よって点 σ_0 はその近くで局所的に弦の形が $y \sim |x|^{2/3}$ となるような尖点を成す (図 19 参照). また尖点の速度 (7.77): $\frac{\partial}{\partial t} \vec{X}(t_0, \sigma_0) = c\vec{F}'(u_0)$ は, 小問 (a) により尖点の方向 \vec{T} に垂直な面内にある.

(c)

関数

$$\vec{F}(u) = \frac{\sigma_1}{2\pi} \left(\sin \left(\frac{2\pi u}{\sigma_1} \right), -\cos \left(\frac{2\pi u}{\sigma_1} \right), 0 \right), \quad \vec{G}(v) = \frac{\sigma_1}{4\pi} \left(\sin \left(\frac{4\pi v}{\sigma_1} \right), 0, -\cos \left(\frac{4\pi v}{\sigma_1} \right) \right)$$

をとると, これは $\vec{F}(u + \sigma_1) - \vec{F}(u) = \vec{G}(v) - \vec{G}(v - \sigma_1) = 0$ より式 (7.74) を満たす. これに対して $(t, \sigma) = (0, 0)$ における尖点を考えると, 尖点は (u, v) の値 $(u_0, v_0) = (0, 0)$ を持ち, その位置は

$$\vec{X}_0 = \frac{1}{2} \left(\vec{F}(u_0) + \vec{G}(v_0) \right) = -\frac{\sigma_1}{8\pi} (0, 2, 1)$$

である.

$$\begin{cases} \vec{F}'(u) = \left(\cos \left(\frac{2\pi u}{\sigma_1} \right), \sin \left(\frac{2\pi u}{\sigma_1} \right), 0 \right) \\ \vec{G}'(v) = \left(\cos \left(\frac{4\pi v}{\sigma_1} \right), 0, \sin \left(\frac{4\pi v}{\sigma_1} \right) \right) \end{cases}, \quad \therefore \vec{F}'(u_0) = \vec{G}'(v_0) = (1, 0, 0)$$

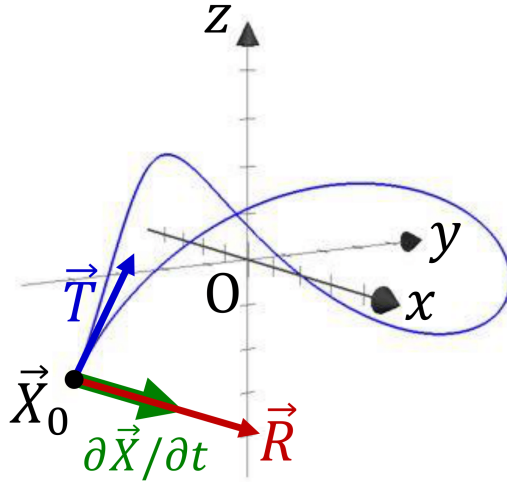


図 20 $t = 0$ における閉弦と尖点 \vec{X}_0

なので式 (16): $|\vec{F}'(u)|^2 = |\vec{G}'(v)|^2 = 1$ が満たされており, 尖点の速度 (7.77): $\frac{\partial}{\partial t} \vec{X}(t_0, \sigma_0) = c\vec{F}'(u_0)$ は $(c, 0, 0)$ である.

$$\begin{cases} \vec{F}''(u) = \frac{2\pi}{\sigma_1} \left(-\sin\left(\frac{2\pi u}{\sigma_1}\right), \cos\left(\frac{2\pi u}{\sigma_1}\right), 0 \right) \\ \vec{G}''(v) = \frac{4\pi}{\sigma_1} \left(-\sin\left(\frac{4\pi v}{\sigma_1}\right), 0, \cos\left(\frac{4\pi v}{\sigma_1}\right) \right) \end{cases}, \quad \therefore \begin{cases} \vec{F}'''(u) = \frac{2\pi}{\sigma_1} (0, 1, 0) \\ \vec{G}'''(v) = \frac{4\pi}{\sigma_1} (0, 0, 1) \end{cases}$$

なので尖点の向きは

$$\vec{T} = \frac{1}{2} \left(\vec{F}'''(u_0) + \vec{G}'''(v_0) \right) = \frac{\pi}{\sigma_1} (0, 1, 2)$$

である.

$$\begin{cases} \vec{F}'''(u) = -\left(\frac{2\pi}{\sigma_1}\right)^2 \left(\cos\left(\frac{2\pi u}{\sigma_1}\right), \sin\left(\frac{2\pi u}{\sigma_1}\right), 0 \right) \\ \vec{G}'''(v) = -\left(\frac{4\pi}{\sigma_1}\right)^2 \left(\cos\left(\frac{4\pi v}{\sigma_1}\right), 0, \sin\left(\frac{4\pi v}{\sigma_1}\right) \right) \end{cases}, \quad \therefore \begin{cases} \vec{F}''''(u_0) = -\left(\frac{2\pi}{\sigma_1}\right)^2 (1, 0, 0) \\ \vec{G}''''(v_0) = -\left(\frac{4\pi}{\sigma_1}\right)^2 (1, 0, 0) \end{cases}$$

より

$$\vec{R} = \frac{1}{2} \left(\vec{F}''''(u_0) - \vec{G}''''(v_0) \right) = \frac{3}{2} \left(\frac{2\pi}{\sigma_1} \right)^2 (1, 0, 0)$$

であり, 尖点は \vec{T} と \vec{R} によって張られる, yz 平面に平行な面に含まれる. $t = 0$ における閉弦

$$\vec{X}(t = 0, \sigma) = \frac{1}{2} \left(\vec{F}(\sigma) + \vec{G}(-\sigma) \right) = \frac{\sigma_1}{8\pi} (2 \sin \Sigma - \sin(2\Sigma), -2 \cos \Sigma, -\cos(2\Sigma)), \quad \Sigma \equiv \frac{2\pi\sigma}{\sigma_1}$$

が尖点 \vec{X}_0 を持つ様子を, \vec{T}, \vec{R} の方向とともに図 20 に示す.

(d)

$\vec{F}'(u) = \vec{G}'(v)$ となるためには $\sin\left(\frac{2\pi u}{\sigma_1}\right) = 0, \sin\left(\frac{4\pi v}{\sigma_1}\right) = 0$, すなわち m, n を任意の整数として

$$u = \frac{m\sigma_1}{2}, \quad v = \frac{n\sigma_1}{4}$$

となる必要がある。このとき $\vec{F}'(u) = (\cos(m\pi), 0, 0)$, $\vec{G}'(v) = (\cos(n\pi), 0, 0)$ となるから、これらが一致するのは m と n の偶奇が一致するときである。

$$ct + \sigma \equiv u = \frac{m\sigma_1}{2}, \quad ct - \sigma \equiv v = \frac{n\sigma_1}{4}$$

を (t, σ) について解くと

$$t = \frac{\sigma_1}{4c} \left(m + \frac{n}{2} \right), \quad \sigma = \frac{\sigma_1}{4} \left(m - \frac{n}{2} \right)$$

となるから、偶奇の一致する整数 m, n に対して t が 1 周期 $0 \leq t < \sigma_1/4c$ に含まれるのは

$$m + \frac{n}{2} = 0, \frac{1}{2}$$

となるときである。 $m + \frac{n}{2} = 0$ のとき $n = -2m$ より n は偶数なので m も偶数となる。よって $m + \frac{n}{2} = 0$ となる整数の組 (m, n) は

$$n = -2m, \quad m = 0, \pm 2, \pm 4, \dots \quad (18)$$

で与えられる。 $m + \frac{n}{2} = \frac{1}{2}$ のとき $n = -2m + 1$ より n は奇数なので m も奇数となる。よって $m + \frac{n}{2} = \frac{1}{2}$ となる整数の組 (m, n) は

$$n = -2m + 1, \quad m = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots \quad (19)$$

で与えられる。

ところで $u = \frac{m\sigma_1}{2}, v = \frac{n\sigma_1}{4}$ に対して

$$\vec{F}(u) = \frac{\sigma_1}{2\pi} (\sin(m\pi), -\cos(m\pi), 0), \quad \vec{G}(v) = \frac{\sigma_1}{4\pi} (\sin(n\pi), 0, -\cos(n\pi))$$

なので、偶奇の等しい m は同一の $\vec{F}(u)$ を、偶奇の等しい n は同一の $\vec{G}(v)$ を与えるから、式 (18) の各組 (m, n) は同一の $\vec{X}(t, \sigma)$ を与え、式 (19) の各組 (m, n) もまた同一の $\vec{X}(t, \sigma)$ を与える。そこで m, n の組 (18) から $0 \leq \sigma < \sigma_1$ を満たすものとして $(m, n) = (0, 0)$ を選び、 m, n の組 (19) から $0 \leq \sigma < \sigma_1$ を満たすものとして $(m, n) = (1, -1)$ を選ぶと、1 周期の間に形成される尖点として

$$(t, \sigma) = (0, 0) \quad ((m, n) = (0, 0)),$$

$$(t, \sigma) = \left(\frac{\sigma_1}{8c}, \frac{3}{8}\sigma_1 \right) \quad ((m, n) = (1, -1))$$

の 2 点が得られる。

第 8 章 世界面カレントと保存量

8.1 電荷の保存

電磁気学の Maxwell 理論において、電荷密度 ρ 、電流密度 \vec{j} に対して $j^\alpha = (c\rho, \vec{j})$ は

$$0 = \partial_\alpha j^\alpha = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} \Rightarrow \frac{d}{dt} \int_V \rho d^3x = - \int_S \vec{j} \cdot d\vec{a}$$

を満たす。これは領域 V 内の電荷 $Q = \int_V \rho d^3x$ が、その領域の表面 S からの電荷の流入・流出によってのみ変化することを意味する (電荷保存則)。このため j^α は保存するカレントと呼ばれる。しかし正確には、保存するのはチャージである。

8.2 ラグランジアンの変換性とチャージの保存

ある関数 $h(q(t); t)$ を用いて

$$q(t) \rightarrow q(t) + \delta q(t), \quad \delta q(t) = \varepsilon h(q(t); t), \quad \varepsilon : \text{無限小の定数}$$

と表される座標の変化に対してラグランジアン $L(q(t), \dot{q}(t); t)$ が不変であるとき、この座標の変化を対称変換と呼ぶ。対称変換に対して

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial L}{\partial q} \frac{d}{dt} \delta q \quad (\because \text{Euler-Lagrange 方程式}) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right) \end{aligned}$$

なので、チャージ

$$Q = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} h$$

は $q(t)$ の実際の時間変化に対して保存する。

速度だけに依存するラグランジアン $L(\dot{q})$ は一様な空間的並進

$$q(t) \rightarrow q(t) + \varepsilon, \quad \therefore \dot{q}(t) \rightarrow \dot{q}(t)$$

に対して不変であり、この場合 $h = 1$ なので運動量 $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ が保存するチャージとして得られる。これはラグランジアンの変換性に含まれない座標に共役な運動量が保存するという、ラグランジアン力学においてよく知られている結果を再現している。

k 次元 [空間] の世界に注目し (Minkowski 空間でもその部分空間でも良い)、これを記述する座標 ξ^α を導入する ($\alpha = 0, 1, \dots, k$)。作用を

$$S = \int d^{k+1}\xi \mathcal{L}(\phi^r, \partial_\alpha \phi^r)$$

で与えるようなラグランジアン密度 \mathcal{L} を考える*3。場の変分

$$\phi^r \rightarrow \phi^r + \delta \phi^r, \quad \delta \phi^r = \varepsilon^i h^r_i$$

*3 教科書では場の種類を表す添字を a として場を ϕ^a と書いている。しかしここでは世界を記述する座標 ξ^α の添字 α との混同を避けるため、場の種類を指定する添字には r を用いることにする。

を考えよう。例えば時空内の並進は時空次元と同数の無限小パラメーター ε^i によって指定される。これに対してラグランジアン密度 \mathcal{L} が不変であるとき、

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^r} \delta \phi^r + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \phi^r)} \delta (\partial_\alpha \phi^r) = \partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \phi^r)} \right) \delta \phi^r + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \phi^r)} \partial_\alpha (\delta \phi^r) \quad (\because \text{Euler-Lagrange 方程式})$$

$$= \partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \phi^r)} \delta \phi^r \right)$$

なので保存するカレント

$$j_i^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \phi^r)} h^r_i$$

が見出され、チャージ

$$Q_i = \int d^k \xi j_i^0$$

が保存する。

なお、対称変換はラグランジアン (密度) の対称性に限らない [系が対称性を持つには、ラグランジアン (密度) が対称 (不変) でなくとも、運動方程式が不変であれば良い]。

計算練習 8.1

式 (8.23):

$$0 = \partial_\alpha j_i^\alpha = \partial_0 j_i^0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_i, \quad \vec{\nabla} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \xi_k} \right), \quad \vec{j}_i \equiv (j_i^1, \dots, j_i^k)$$

より、カレント j_i^α が無限遠において十分に速く消失するとき

$$\frac{dQ_i}{d\xi^0} = \int d^k \xi \partial_0 j_i^0 = - \int d^k \xi \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_i = 0$$

となる。

8.3 世界面において保存するカレント

弦の作用は

$$S = \int d\sigma d\tau \mathcal{L}(\partial_\tau X^\mu, \partial_\sigma X^\mu)$$

という形をしているため

$$\begin{array}{lll} \text{場の変数 } \phi^r & \rightarrow & \text{弦の座標 } X^\mu \\ \text{世界を記述する座標 } \xi^\alpha & \rightarrow & (\tau, \sigma) \end{array}$$

と対応する。ラグランジアン密度は $\partial_\alpha X^\mu$ だけに依存するため、世界面上の各点が時空において同じベクトル量 ε^μ だけ推進するような変分

$$\delta X^\mu(\tau, \sigma) = \varepsilon^\mu$$

に対して不変であり、これに対応して保存するカレント

$$j^\alpha_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha X^\mu)} = \mathcal{P}^\alpha_\mu$$

が得られる。ここで

- $\mu = 0, 1, 2, 3$ は対称変換におけるパラメーターを、従ってチャージの種類を識別する添字
- $\alpha = \tau, \sigma$ はカレントの“成分”を識別する添字

であり、カレントは世界面上に存在する。保存するチャージは

$$p_\mu(\tau) = \int_0^{\sigma_1} \mathcal{P}^\tau_\mu(\tau, \sigma) d\sigma \quad (20)$$

であり、これは時空内の並進不変性から生じているので弦の運動量である。実際、 $\mathcal{P}^\tau_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu}$ は弦が運ぶ運動量の σ -密度と解釈される量である。

弦に対して

$$\partial_\alpha j^\alpha_\mu = \partial_\alpha \mathcal{P}^\alpha_\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dp_\mu}{d\tau} = 0$$

を確かめる。[と言うのも、前節までの議論でカレントが $\partial_\alpha j^\alpha_\mu = 0$ を満たすことは言えるけれど、以下で見るように弦に関する境界条件に対しては改めてチャージの保存 $\frac{dp_\mu}{d\tau} = 0$ を確かめる必要がある.]

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = \int_0^{\sigma_1} \frac{\partial \mathcal{P}^\tau_\mu}{\partial \tau} d\sigma = - \int_0^{\sigma_1} \frac{\partial \mathcal{P}^\sigma_\mu}{\partial \sigma} d\sigma = -\mathcal{P}^\sigma_\mu|_0^{\sigma_1}$$

において最右辺は

- 閉弦に対しては $\sigma = 0$ と $\sigma = \sigma_1$ は世界面上における同じ位置を表すので
- 自由な端点を持つ開弦では境界条件 $\mathcal{P}^\sigma_\mu(\tau, \sigma = 0, \sigma_1) = 0$ により

ゼロになり、 p_μ は保存する:

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = 0.$$

次節で見るように $\frac{dp_\mu}{dt} = 0$ も成立する。なお Dirichlet 境界条件を与えられた開弦の運動量は一般に保存しない (両端を壁に接続された非相対論的な開弦の運動量は、壁から力を受けることにより上下に変化すること (4.6 節) を思い出そう)。

8.3 について

■カレントの局所的な保存 (8.35): $\partial_\alpha \mathcal{P}^\alpha_\mu = 0$ について これは運動方程式

$$\frac{\partial \mathcal{P}^\tau_\mu}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}^\sigma_\mu}{\partial \sigma} = 0$$

に他ならない。

■ \mathcal{P}^α_μ の物理的な意味について 弦の座標に限らず一般に場 ϕ に対して、それが定義されている時空領域の座標成分を α で指定すれば、時空内の推進不変性から保存するカレント

$$j^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \phi)} \equiv \mathcal{P}^\alpha$$

が導かれる。対称性と保存則の関係から期待されるように、時間成分 $\alpha = 0$ は運動量密度となっている。ここから \mathcal{P}^α は時空における運動量の流束であり、空間成分 $\alpha = i$ (弦に対しては $\alpha = \sigma$) は空間における運動量の流束と解釈できる。

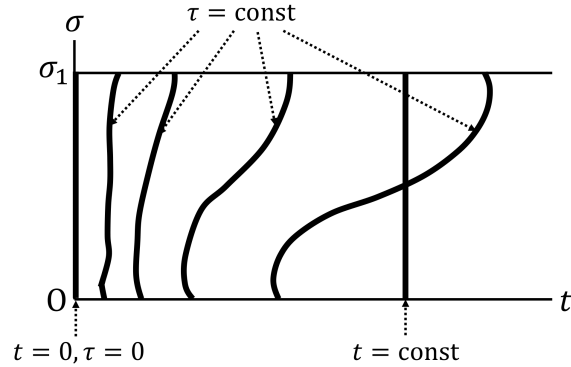


図 21 $\tau = 0$ の線が $t = 0$ の線に一致するようなパラメーター τ の選択 (ここでは開弦に対する図を描いた)

8.4 全運動量カレント

保存則 $\frac{dp_\mu}{d\tau} = 0$ は特に静的ゲージ $\tau = t$ を選ぶことによって, Lorentz 座標系の時間の経過の下での保存則 $\frac{dp_\mu}{dt} = 0$ となる. [これは τ の選択とは無関係に常に $\frac{dp_\mu}{dt} = 0$ が成立することの証明となっている.]

次に一般のパラメーター τ を考えよう. このとき τ が一定の線は必ずしも t が一定の線に一致しない. しかし τ が一定の線に沿う式 (20) の積分 $p_\mu(\tau)$ は, t が一定の線に沿う積分 $p_\mu(t)$ の値に一致しなければならない. と言うのも, 図 21 のように $\tau = 0$ の線が $t = 0$ の線に一致するようにパラメーター τ を選んだとすると [この措置は $p_\mu(\tau)$ の値 (20) を変えない] $\frac{dp_\mu}{d\tau} = 0, \frac{dp_\mu}{dt} = 0$ により

$$p_\mu(\tau) = p_\mu(\tau = 0) = p_\mu(t = 0) = p_\mu(t)$$

となる.

以上を踏まえると, τ が一定の線に限らず世界面上の任意の曲線を用いて運動量 p_μ を計算できると考えられる [t が一定の線は一般に τ が一定の線ではないから]. 実際, 運動量 p_μ は任意の曲線 γ を通る 2 次元カレント $(\mathcal{P}^\tau_\mu, \mathcal{P}^\sigma_\mu)$ の流束

$$p_\mu(\gamma) = \int_\gamma (\mathcal{P}^\tau_\mu d\sigma - \mathcal{P}^\sigma_\mu d\tau) \quad (\text{曲線}\gamma\text{の法線方向は}(d\sigma, -d\tau))$$

であると考え, τ が一定の線 ($d\tau = 0$) に対してこれは $p_\mu(\tau)$ の式 (20) になる. そして開弦を考え, 図 22 のように τ が一定の線 (弦) $\bar{\gamma}$, 世界面の境界をつなぐ任意の曲線 γ , 世界面の境界に沿う線 α, β , およびこれらに囲われた領域 \mathcal{R} をとると, 保存則 $\partial_\alpha \mathcal{P}^\alpha_\mu = 0$ により

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathcal{R}} (\partial_\alpha \mathcal{P}^\alpha_\mu) d\tau d\sigma = \oint_{\bar{\gamma} - \beta - \gamma + \alpha} (\mathcal{P}^\tau_\mu d\sigma - \mathcal{P}^\sigma_\mu d\tau) \quad (\text{発散定理}) \\ &= \left(\int_{\bar{\gamma}} - \int_\gamma \right) (\mathcal{P}^\tau_\mu d\sigma - \mathcal{P}^\sigma_\mu d\tau) = p_\mu(\tau) - p_\mu(\gamma), \\ \therefore p_\mu(\gamma) &= p_\mu(\tau) \equiv p_\mu \end{aligned}$$

となる (閉弦に対しても同様に議論できる).

運動量 p_μ がそれを計算する曲線 γ に依らないことは, 異なる時刻における弦の運動量が等しいという保存則を含んでいる.

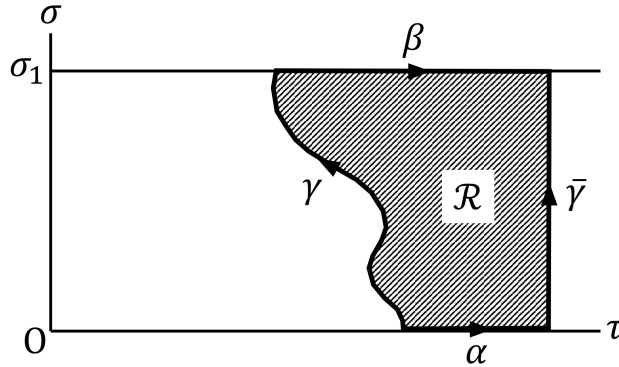


図 22 境界が任意曲線 γ と弦 $\bar{\gamma}$ を含む単連結領域 (教科書の図 8.1(p.161))

静的ゲージにおいて運動量密度は式 (6.94):

$$p^{\tau 0} = \frac{T_0}{c} \frac{ds}{d\sigma} \frac{1}{\sqrt{1-v_{\perp}^2/c^2}}, \quad \vec{p}^{\tau} = p^{\tau 0} = \frac{T_0}{c^2} \frac{ds}{d\sigma} \frac{\vec{v}_{\perp}}{\sqrt{1-v_{\perp}^2/c^2}}$$

で与えられるため [パラメーター σ のとり方は任意], 弦 γ の運動量 $p^{\mu} = (p^0, \vec{p})$ は

$$p^0 = \frac{1}{c} \int_{\gamma} \frac{T_0 ds}{\sqrt{1-v_{\perp}^2/c^2}}, \quad \vec{p} = \int_{\gamma} \frac{T_0 ds}{c^2} \frac{\vec{v}_{\perp}}{\sqrt{1-v_{\perp}^2/c^2}}$$

となる. これらはそれぞれエネルギー (を c で割ったもの) と運動量の表式として理に適っている.

計算練習 8.2

矩形領域からのベクトル (A^x, A^y) のわき出しは

$$(A^x|_{x_0+dx} - A^x|_{x_0}) dy + (A^y|_{y_0+dy} - A^y|_{y_0}) dx = \left(\frac{\partial A^x}{\partial x} + \frac{\partial A^y}{\partial y} \right)_0 dx dy$$

である (右辺の添字 0 は点 (x_0, y_0) での値をとることを意味する).

8.4 について

■第 1 段落について 前節までの議論を改めて振り返ると, 弦の座標 $X^{\mu}(\tau, \sigma)$ は物体の位置というよりもむしろ, 数学的には世界面座標 (τ, σ) を引数とする場として扱われる. このとき Lorentz 座標 μ は場の種類の指標にすぎず, (τ, σ) が場を定義する座標となる. そして場の各種類 μ に応じて保存するカレント $\mathcal{P}^{\alpha}_{\mu}$ が得られる ($\alpha = \tau, \sigma$ は世界面内の座標成分). これは世界面座標 (τ, σ) の関数となっており, それ故, 世界面の中にもみ存在するカレントと見なせる. これに対して保存する運動量 $p_{\mu} = \int \mathcal{P}^{\tau}_{\mu} d\sigma$ の添字 μ は, 再び弦を含む時空における成分を指定することにも注意する (8.5 節の $M_{\mu\nu}$ も同様).

■8.4 節の議論の再構成 8.4 節の議論の進め方はやや回りくどい印象を受ける. そこで次のような順序で説明をやり直してみよう (最終段落を除く). まず自由端を持つ開弦を想定すると, 図 23 のような世界面を横切る任意の曲線 γ は “面積素ベクトル” $(d\sigma, -d\tau)$ を持つので, 曲線 γ を通過する全運動量は

$$p(\gamma) = \int_{\gamma} (\mathcal{P}^{\tau}_{\mu} d\sigma - \mathcal{P}^{\sigma}_{\mu} d\tau)$$

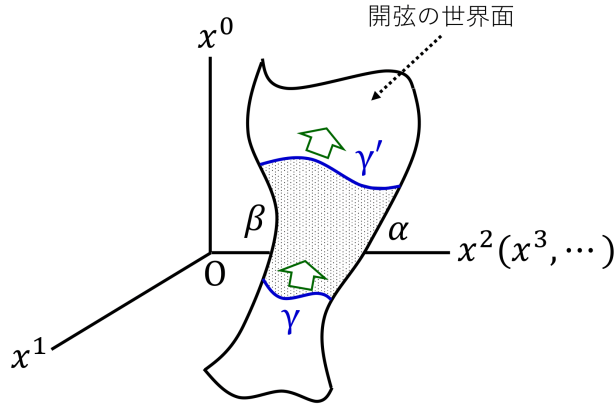


図 23 弦の世界面を流れる運動量流束 (カレント)

と表される．ところで保存則 $\partial_\alpha \mathcal{P}^\alpha_\mu = 0$ によれば，図 23 の 2 つの曲線 γ, γ' と境界 α, β に囲まれた世界面領域からのわき出しはゼロになる．しかるに境界 α, β では $d\sigma = 0$ および自由端点の条件 $\mathcal{P}^\sigma_\mu = 0$ によりカレントの通過量がゼロになるから，

$$p(\gamma) = p(\gamma')$$

でなければならない．直観的に言えば，曲線 γ から流入したのと同じだけのチャージ (運動量) が曲線 γ' から流出する．以上より保存則は $p_\mu(\gamma)$ の値が曲線 γ の選び方に依らないことを意味する．

特に曲線 γ として $\tau = (\text{一定})$ の線を考えて

$$p_\mu(\gamma) = \int \mathcal{P}^\tau_\mu d\sigma = p_\mu$$

となるので，これは狭義の保存則 $dp_\mu/d\tau = 0$ に帰着する．さらに $t = (\text{一定})$ の線もまた図 23 の曲線 γ のような形で表されるので， p_μ を $t = (\text{一定})$ の線 γ に沿う積分 $p_\mu(\gamma)$ とすると，これは $dp_\mu/dt = 0$ を含んでいる．なお閉弦に対しても同様に議論できる．

8.5 Lorentz 対称性とカレント

相対論的な弦のラグランジアン密度 (6.46):

$$\mathcal{L} = -\frac{T_0}{c} \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2} \quad (21)$$

は Lorentz 不変量である (そして我々は弦の量子化を行う際，理論の Lorentz が失われないか注意する必要がある)．無限小の Lorentz 変換

$$X^\mu \rightarrow X^\mu + \delta X^\mu, \quad \delta X^\mu = \varepsilon^{\mu\nu} X_\nu, \quad \varepsilon^{\mu\nu} = -\varepsilon^{\nu\mu} \quad (8.52)$$

に対するラグランジアン密度の不変性から，保存するカレント

$$\mathcal{M}^\alpha_{\mu\nu} = X_\mu \mathcal{P}^\alpha_\nu - X_\nu \mathcal{P}^\alpha_\mu (= -\mathcal{M}^\alpha_{\nu\mu}) \quad (8.60)$$

が見出される ($\partial_\alpha M^\alpha_{\mu\nu} = 0$). [以上, 式の導出などは下記.] 運動量チャージの場合の説明 (8.4 節) と同様に, 開弦と閉弦のいずれに対してもチャージ

$$M_{\mu\nu} = \int \mathcal{M}^\tau_{\mu\nu}(\tau, \sigma) d\sigma \quad (22)$$

は任意の曲線 γ に対して

$$M_{\mu\nu} = \int_\gamma (\mathcal{M}^\tau_{\mu\nu} d\sigma - \mathcal{M}^\sigma_{\mu\nu} d\tau)$$

と計算される. ただし 8.4 節の議論を繰り返す際, 開弦に対しては世界面の境界 $\sigma = 0, \sigma_1$ において $\mathcal{P}^\sigma_\mu = 0$, したがって $\mathcal{M}^\sigma_{\mu\nu} = 0$ であることに注意する.

τ が一定の線を用いたチャージ $M_{\mu\nu}$ の計算式 (22) により

- 空間回転に関するチャージ

$$M_{ij} = \int (X_i \mathcal{P}^\tau_j - X_j \mathcal{P}^\tau_i) d\sigma$$

は弦の角運動量 $L_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} M_{jk}$ を与える.

- 等速推進に関するチャージ M^{0i} は

弦の保存するエネルギー E と合わせて, 弦の重心 (エネルギー中心)

$$X_{\text{cm}}^i(t) \equiv \frac{1}{E} \int d\sigma X^i c \mathcal{P}^{\tau 0}$$

の運動を記述する:

$$X_{\text{cm}}^i(t) = -\frac{cM^{0i}}{E} + t \frac{c^2 p^i}{E}.$$

8.5 節, 式の導出など

■ Lorentz 変換 (8.52) の無限小パラメータの反対称性について Lorentz 変換 $\delta X^\mu = \varepsilon^{\mu\nu} X_\nu$ は $\eta_{\mu\nu} X^\mu X^\nu$ を不変に留めなければならないので,

$$0 = 2\eta_{\mu\nu} (\delta X^\mu) X^\nu = 2\eta_{\mu\nu} (\varepsilon^{\mu\rho} X_\rho) X^\nu = 2\varepsilon^{\mu\rho} X_\rho X_\mu.$$

これは無限小パラメータ $\varepsilon^{\mu\nu}$ が添字に関して反対称でなければならないことを意味する (計算練習 8.3, 8.4).

教科書の説明を補足しつつ, この点を詳しく述べる. $\varepsilon^{\mu\nu}$ の反対称部分は最右辺に寄与を持たないので, $\varepsilon^{\mu\nu}$ の対称部分 $\varepsilon^{(S)\mu\nu}$ に対して

$$0 = \varepsilon^{(S)\mu\rho} X_\mu X_\rho = 2 \sum_{\mu>\rho} \varepsilon^{(S)\mu\rho} X_\mu X_\rho + \varepsilon^{(S)\mu\mu} X_\mu X_\mu$$

が課される (最右辺では繰り返された添字 μ について和をとらない). これにより対称部分 $\varepsilon^{(S)\mu\nu}$ はゼロになるから, $\varepsilon^{\mu\nu}$ は添字に関して反対称でなければならない.

■ 無限小 Lorentz 変換 (8.52) に対するラグランジアン密度 (21) の不変性 世界面パラメータを $(\xi_1, \xi_2) = (\tau, \sigma)$ と書くと, ラグランジアン密度 (21) に現れる全ての項は

$$\eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta}$$

という形を持つ。その無限小 Lorentz 変換 (8.52): $\delta X^\mu = \varepsilon^{\mu\nu} X_\nu$ に伴う変化量は次のように計算される。

$$\begin{aligned}
 \delta \left(\eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta} \right) &= \eta_{\mu\nu} \left(\frac{\partial \delta X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta} + \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \delta X^\nu}{\partial \xi^\beta} \right) \\
 &= \eta_{\mu\nu} \left(\varepsilon^{\mu\rho} \frac{\partial X_\rho}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta} + \varepsilon^{\nu\rho} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X_\rho}{\partial \xi^\beta} \right) \\
 &= \varepsilon_{\nu\rho} \frac{\partial X^\rho}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta} + \varepsilon_{\mu\rho} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\rho}{\partial \xi^\beta} \\
 &= (\varepsilon_{\nu\rho} + \varepsilon_{\rho\nu}) \frac{\partial X^\rho}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta} \\
 &= 0. \quad (\varepsilon_{\nu\rho} \text{の反対称性 (計算練習 8.5) による})
 \end{aligned}$$

よってラグランジアン密度 (21) 全体もまた変化しない。

■カレント (8.60) の導出 無限小 Lorentz 変換 (8.52) に関するラグランジアン密度の不変性から導かれるカレントは

$$\varepsilon^{\mu\nu} j_{\mu\nu}^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha X^\mu)} \delta X^\mu = \mathcal{P}_\mu^\alpha \varepsilon^{\mu\nu} X_\nu \quad (8.58)$$

となる [本稿次節で補足]。 $\varepsilon^{\mu\nu}$ の反対称性を利用して最右辺を書き換え、

$$\varepsilon^{\mu\nu} j_{\mu\nu}^\alpha = \left(-\frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu} \right) (X_\mu \mathcal{P}_\nu^\alpha - X_\nu \mathcal{P}_\mu^\alpha)$$

とできる。ここから直接にカレント $j_{\mu\nu}^\alpha$ を読み取ることができる。全体の規格化は我々が選択できるので [保存するカレントの定数倍もカレントである]、カレントを式 (8.60):

$$\mathcal{M}^\alpha_{\mu\nu} = X_\mu \mathcal{P}_\nu^\alpha - X_\nu \mathcal{P}_\mu^\alpha (= -\mathcal{M}^\alpha_{\nu\mu})$$

のように定義できる。

計算練習

■計算練習 8.3, 8.4 任意の自然数 n に対して $n \times n$ 行列 $A = (A^{ab})$ と $v_a (a = 1, \dots, n)$ を考える。

$$\begin{aligned}
 0 &= A^{ab} v_a v_b = \sum_{a>b} (A^{ab} + A^{ba}) v_a v_b + \sum_a A^{aa} v_a^2 \\
 \Rightarrow \quad A^{aa} &= 0, \quad A^{ab} = -A^{ba}
 \end{aligned}$$

なので行列 A は反対称でなければならない。

■計算練習 8.5

$$\varepsilon_{\mu\nu} = \eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta} \varepsilon^{\alpha\beta} = -\eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta} \varepsilon^{\beta\alpha} = -\varepsilon_{\nu\mu}.$$

この反対称性は式 (8.57) で用いる。

■計算練習 8.6 $\gamma = 1 + O(\beta^2)$, $\beta\gamma = \beta + O(\beta^3)$ なので、等速推進 (2.36):

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

において, 小さな β に対し

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\beta & 0 & 0 \\ -\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv (\delta^\mu_\nu) + (\varepsilon^\mu_\nu)$$

であり, $\varepsilon^0_1 = \varepsilon^1_0 = -\beta$, その他の $\varepsilon^\mu_\nu = 0$ となる. 添字を上げると $\varepsilon^{10} = -\varepsilon^{01} = \beta$, その他の $\varepsilon^{\mu\nu} = 0$.

なお, ここで考えている等速推進とは異なり, 8.3 節における時空中の推進 (8.31): $\delta X^\mu(\tau, \sigma) = \varepsilon^\mu$ を受動的な変換と見ると, これは座標系の位置関係が時間変化するものではないことに注意する.

8.5 について

■カレントの式 (8.58) 式 (8.22):

$$\varepsilon^i j_i{}^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \phi^a)} \delta \phi^a$$

において

$$\phi^a \rightarrow X^\mu, \quad \delta \phi^a \rightarrow \delta X^\mu = \varepsilon^{\mu\nu} X_\nu, \quad i \rightarrow \mu, \nu$$

として得る.

■チャージ (8.65) が角運動量 $L_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} M_{jk}$ を与えること $L_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} M_{jk}$ は

$$L_1 = \frac{1}{2} (M_{23} - M_{32}) = M_{23} = \int (X^2 \mathcal{P}^\tau_3 - X^3 \mathcal{P}^\tau_2) d\sigma, \quad \text{etc.}$$

を与える. 弦の素片 $d\sigma$ の持つ運動量は $(\mathcal{P}^\tau_1, \mathcal{P}^\tau_2, \mathcal{P}^\tau_3) d\sigma$ だから, これは確かに弦の角運動量成分を成す.

■対称性と保存則, まとめ 無限小の Lorentz 変換

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^{\mu\nu} x_\nu + \varepsilon^\mu$$

に関する対称性と保存則の関係は以下のようにまとめられる.

- 時空内の推進 (並進) 操作 (ε^μ) に関する対称性
 - 空間並進 \rightarrow 運動量の保存
 - 時間並進 \rightarrow エネルギーの保存
- 回転操作 ($\varepsilon^{\mu\nu}$) に関する対称性
 - 空間内の回転 \rightarrow 角運動量の保存
 - 時空内の回転, すなわち等速推進 (Lorentz ブースト)
 - \rightarrow 重心 (エネルギー中心) の等速度運動 (エネルギー・運動量保存則の下で)
 - * 粒子系に対する同様の議論が文献 [2, pp.45-47] に見られる.

8.6 勾配パラメーター α'

エネルギー E を持ち, (x, y) 面内を回転する直線状の開弦 (7.63):

$$(X^1(\tau, \sigma), X^2(\tau, \sigma)) = \frac{\sigma_1}{\pi} \cos \frac{\pi\sigma}{\sigma_1} \left(\cos \frac{\pi ct}{\sigma_1}, \sin \frac{\pi ct}{\sigma_1} \right), \quad \sigma_1 = \frac{E}{T_0} \quad (8.72)$$

に対して, 式 (7.31): $\mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{T_0}{c^2} \frac{\partial X^\mu}{\partial t}$ を用いて角運動量の大きさ $J = M_{12}$ を計算すると

$$J = \frac{1}{2\pi T_0 c} E^2 \quad (8.75)$$

となる [導出は下記]. すなわち $J \sim E^2$ であり, これは弦の古典論の結果であるため比例定数は \hbar を含まない. これを

$$\frac{J}{\hbar} = \alpha' E^2$$

と書いて勾配パラメーター α' を定義すると

$$\alpha' = \frac{1}{2\pi T_0 \hbar c}$$

と同定され, α' は弦の張力 T_0 に関係付けられる. よって弦の作用の式において唯一, 単位を持つパラメーターとして, T_0 の代わりに α' を用いることができる.

弦理論では \hbar, c, α' から特徴的な長さ (弦の長さと呼ばれる)

$$l_s = \hbar c \sqrt{\alpha'}$$

を構築できる.

8.6 節, 式の導出など

■回転弦の角運動量 (8.75) の導出 回転弦の座標 (8.72) に対して

$$\vec{P}^\tau = \frac{T_0}{c^2} \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} = \frac{T_0}{c} \cos \frac{\pi\sigma}{\sigma_1} \left(-\sin \frac{\pi ct}{\sigma_1}, \cos \frac{\pi ct}{\sigma_1} \right)$$

なので, 角運動量は

$$M_{12} = \int_0^{\sigma_1} (X_1 \mathcal{P}_2^\tau - X_2 \mathcal{P}_1^\tau) d\sigma = \frac{\sigma_1 T_0}{\pi c} \int_0^{\sigma_1} \cos^2 \frac{\pi\sigma}{\sigma_1} d\sigma = \frac{\sigma_1^2 T_0}{2\pi c}$$

と計算される. M_{12} が保存するチャージであることから期待されるように, 時間依存性は消失した. 最右辺に $\sigma_1 = E/T_0$ を代入すると, $J = |M_{12}|$ の式 (8.75) を得る.

計算練習 8.7

長さ L , 質量線密度 $\rho = M/L$ の棒が, その中心を通り棒に垂直な軸の周りに角速度 ω で回転しているとき, 棒の角運動量は

$$J = \left(\int_{-L/2}^{L/2} \rho x^2 dx \right) \omega = \frac{1}{12} ML^2 \omega$$

である. 一方, 棒の持つエネルギーは

$$E = \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} (\rho dx) (x\omega)^2 = \frac{1}{24} ML^2 \omega^2$$

と計算される。これは長さ L まで引き伸ばされて質量エネルギーを得るような、相対論的な弦に対する関係 (p.168, 1.7)

$$E = \int \frac{T_0 ds}{\sqrt{1 - v_\perp^2/c^2}} \sim T_0 L \sim L,$$

$$M \sim \int \mu_0 ds \sim \frac{T_0 L}{c^2} \sim E,$$

式 (7.57) : $\omega \sim \frac{1}{E}$

とは事情が異なっている。さて、2 式から ω を消去すると

$$J = \sqrt{\frac{ML^2 E}{6}}$$

を得る。よって $J \sim \sqrt{E}$ 。

計算練習 8.8

$$[\alpha'] = \frac{1}{E^2} : (8.70), \quad [\hbar c] = [E]T \times \frac{L}{T} = [E]L$$

$$\Rightarrow [\hbar c \sqrt{\alpha'}] = L.$$

8.6 について

勾配パラメーターを導入するには、名前の由来を除いて必要最小限、次のように述べれば十分である。すなわち弦理論において唯一、単位を持つパラメーターとして、弦の張力 T_0 の代わりに $\alpha' = 1/2\pi T_0 \hbar c$ あるいは“弦の長さ” $l_s = \hbar c \sqrt{\alpha'}$ を用いることができる。そして α' は慣習的に——あるいは歴史的事情により、と言っても良いかもしれないが——勾配パラメーターと呼ばれている、と。

その歴史的事情を問い質すと、8.6 節で説明されているような背景がある。それには理論的な興味もあり、実際、第 23 章では「Regge 軌跡は強粒子励起の角運動量をエネルギーの自乗の関数としてプロットした場合の近似的な直線である」(p.168, 1.9–10) ことについて再論される。「回転する古典的な開弦における角運動量と質量の自乗の線形関係 $J = \alpha' M^2$ は、中間子励起が形成する Regge の説明を、弦理論から与え得る可能性を示唆している」(p.529, 1.1–2)。

問題 (第 8 章)

問題 8.5 相対論的な点粒子に関する Lorentz チャージ

この問題は 11.6 節で言及される。

(a)

$x^\mu \rightarrow x^\mu + \varepsilon^\mu$ はラグランジアン $L = -mc\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}$ を不変に保つから対称変換である。このとき

$$0 = \delta L = \frac{\partial L}{\partial x^\mu} \delta x^\mu + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \delta \dot{x}^\mu = \left(\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right) \delta x^\mu + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \delta \dot{x}^\mu = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \delta x^\mu \right)$$

より保存するチャージ $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \varepsilon^\mu$ が見出される。この結果は式 (8.11) と比較される。 $\{\varepsilon^\mu\}$ は独立にとれるから、運動量 $p_\mu = -\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}$ が保存する。

ここで定義した $p_\mu = -\partial L/\partial \dot{x}^\mu$ が通常の正準運動量とどのように関係するかを調べる。一時的に表記を次のように改める。 x^0 を力学変数として扱う代わりに、時間の役割を果たす粒子の軌道に沿ったパラメーター τ を導入し、 τ による微分をプライムで表す。他方 t による微分はドットで表す。また作用の積分変数を t, τ としたときのラグランジアンをそれぞれ L, \tilde{L} と書くと、

$$\int \tilde{L} d\tau = \int L dt \quad \rightarrow \quad \tilde{L} = L \frac{dt}{d\tau} = Lt'.$$

(時間 τ とラグランジアン \tilde{L} に対しても Lagrange 方程式が成り立つから、上記におけるチャージの導出の有効性は失われない。)

$\tilde{p}_\mu \equiv -\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}'^\mu}$ と 4 元運動量 p^μ の関係を調べるには次のようにすれば良い [5, p.170]。まず空間成分 $\mu = i = 1, 2, 3$ について、

$$x'^i = \frac{dx^i}{d\tau} = \frac{dx^i}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \dot{x}^i t'$$

に注意すると

$$\tilde{p}_i = -\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}'^i} = -\sum_j \frac{\partial(Lt')}{\partial \dot{x}^j} \frac{\partial \dot{x}^j}{\partial \dot{x}'^i} = -\sum_j \frac{\partial(Lt')}{\partial \dot{x}^j} \frac{\partial}{\partial \dot{x}'^i} \left(\frac{x'^j}{t'} \right) = -\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}$$

となる。最右辺は通常の正準運動量に負号を付けたもの $-p^i = p_i$ になっていることが見て取れる。次に時間成分 $\mu = 0$ について、同様に

$$c\tilde{p}_0 = -\frac{\partial \tilde{L}}{\partial t'} = -\frac{\partial}{\partial t'}(Lt') = -L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \frac{\partial \dot{x}^i}{\partial t'} t' = -L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{x'^i}{t'} \right) t' = -L + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \frac{x'^i}{t'} = -L + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \dot{x}^i$$

となる。最右辺は粒子のエネルギー \mathcal{E} なので、 $\tilde{p}_0 = \mathcal{E}/c$ である。以上をまとめると $\tilde{p}_\mu = (\mathcal{E}/c, -\mathbf{p})$ なので、これは運動量の 4 元共変ベクトルに一致する。

$$\tilde{p}_\mu = p_\mu.$$

(b)

式 (8.52), 式 (8.54) より無限小 Lorentz 変換は

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + \delta x^\mu, \quad \delta x^\mu = \varepsilon^{\mu\nu} x_\nu, \quad \varepsilon^{\mu\nu} = -\varepsilon^{\nu\mu}$$

と書ける。このとき

$$\delta(\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu) = 2\dot{x}_\mu \delta \dot{x}^\mu = 2\varepsilon^{\mu\nu} \dot{x}_\mu \dot{x}_\nu$$

は、添字 μ, ν について $\varepsilon^{\mu\nu}$ が反対称であり、 $\dot{x}_\mu \dot{x}_\nu$ が対称だからゼロとなる。よって作用 $S = -mc \int d\tau \sqrt{-\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}$ は無限小 Lorentz 変換に対して不変となる。

(c)

Lorentz 対称性に付随するチャージ

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \delta x^\mu = \varepsilon^{\mu\nu} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} x_\nu = -\varepsilon^{\mu\nu} p_\mu x_\nu = -\varepsilon_{\mu\nu} p^\mu x^\nu$$

は、 $\varepsilon_{\mu\nu}$ と $\varepsilon_{\nu\mu}$ を独立にとれないことに注意すると

$$M^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu$$

の保存を意味する。これは角運動量 $L_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} M_{jk}$ の保存を含んでいる。

問題 8.9 保存するチャージの構築の一般化

この問題は 11.5 節で言及される。

ラグランジアンが時間の全微分量 $\delta L = \frac{d}{d\tau}(\varepsilon\Lambda)$ だけ変更されるとき，作用が停留値をとる条件に他ならない運動方程式は不変である (対称性)。

チャージ $\varepsilon Q = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q - \varepsilon\Lambda$ は

$$\frac{d}{d\tau}(\varepsilon Q) = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q - \varepsilon\Lambda \right) = \frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q} - \frac{d}{d\tau}(\varepsilon\Lambda) = \delta L - \delta L = 0$$

より保存される。

一定の無限小の時間推進 $\delta q = \varepsilon \dot{q}$ に対して

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q} = \varepsilon \left(\frac{\partial L}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\ddot{q} \right) = \frac{d}{d\tau}(\varepsilon L)$$

なのでこれは $\Lambda = L$ とするような対称変換であり，保存するチャージ

$$Q = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q} - L$$

はハミルトニアンである。

第9章 相対論的な光錐弦

9.1 τ の選択の方法

- 静的ゲージ $X^0(\tau, \sigma) = c\tau$
 → 弦の運動量 (7.47): $\vec{X}(t, \sigma) = \frac{1}{2}\{\vec{F}(ct + \sigma) + \vec{F}(ct - \sigma)\}$ は $\vec{F}(u)$ に制約条件 (7.48):

$$\left| \frac{d\vec{F}(u)}{du} \right|^2 = 1 \quad \text{and} \quad \vec{F}(u + 2\sigma_1) = \vec{F}(u) + 2\sigma_1 \frac{\vec{v}_0}{c}$$

が課せられるだけで、完全に明白な形ではない。

- 光錐ゲージ
 → 弦の運動方程式を完全に明白な形で解くことができる。

光錐ゲージを導入するにあたって、静的ゲージの条件式を

$$n_\mu X^\mu(\tau, \sigma) = \lambda\tau$$

と一般化する。

- ベクトル n^μ に垂直な超平面と弦の世界面の交線が、共通の τ の値を持つ点 $X^\mu(\tau, \sigma)$ から成り、弦を成す。
- n^μ を時間的ベクトルに選べば、弦上の2点の隔たり ΔX^μ が空間的なベクトルとなることが保証される。

さらにベクトル n^μ を $n \cdot p$ が一定となるように選び (これは弦の運動量 p^μ のある成分が保存しない場合にも可能である)*4, ゲージ条件を

$$n \cdot X(\tau, \sigma) = \tilde{\lambda}(n \cdot p)\tau$$

と書き換える*5. 開弦に対して $n \cdot p$ が保存する条件は、式 (8.38):

$$0 = \frac{d}{d\tau}(n \cdot p) = n^\mu \frac{dp_\mu}{d\tau} = n^\mu \int_0^{\sigma_1} \frac{\partial \mathcal{P}^\tau}{\partial \tau} d\sigma = -n^\mu \int_0^{\sigma_1} \frac{\partial \mathcal{P}^\sigma}{\partial \tau} d\sigma = -n^\mu \mathcal{P}^\sigma_\mu \Big|_0^{\sigma_1}$$

より端点 $\sigma = 0, \sigma_1$ で $n \cdot \mathcal{P}^\sigma = 0$ となることである。

- これまで τ が時間、 σ が長さの単位を持つものとして扱ってきたが、ここからは τ も σ も無単位と見なす。
 → $\tilde{\lambda}$ は $\frac{c}{T_0} = 2\pi\alpha' \hbar c^2$ の単位を持つ。
- 自然単位系を採用 ($\hbar = 1, c = 1$).
 → $[\tilde{\lambda}] = [\alpha']$.
 そこで開弦に対して $\tilde{\lambda} = 2\alpha'$ と選び

$$n \cdot X(\tau, \sigma) = 2\alpha'(n \cdot p)\tau \quad (\text{開弦})$$

*4 これは n^μ が時間的なベクトルであることと両立すると考えられる。

*5 右辺の $\tilde{\lambda}(n \cdot p)$ は $\tilde{\lambda} \times (n \cdot p)$ の意味であり、 $n \cdot p$ は $\tilde{\lambda}$ の指数ではない。

とする.

9.1 について

■ゲージ条件 (9.2) の意味について 式 (9.3): $n_\mu x^\mu = \lambda\tau$ は右辺の τ の値に応じて, 異なる超平面を表す. そして各 τ の値で指定される超平面と弦の世界面の交線に, その τ の値が割り当てられる.

■ n^μ が時間的 \Rightarrow 弦は空間的 (p.174)

n^μ が時間的

$\rightarrow n^\mu \propto (1, 0, \dots, 0)$ となる座標系をとれる.

この座標系でも条件 $n \cdot \Delta X = 0$ が成り立つから ΔX^μ は時間成分を持たない.

\rightarrow 適当な座標系で ΔX^μ の時間成分を消去できる.

$\rightarrow \Delta X^\mu$ は空間的.

■ゲージ条件 (9.2) の Lorentz 共変性 「任意の Lorentz 変換の下で不変に保たれるような座標の線形結合の形は存在しない」 (p.175, 1.7,8) とあるけれど, n_μ を共変ベクトルとすれば $n_\mu X^\mu$ はスカラーとなる. よって式 (9.2): $n_\mu X^\mu(\tau, \sigma) = \lambda\tau$ の条件は, 右辺の $\lambda\tau$ もまたスカラーであると見なせば Lorentz 変換に対して共変的となる*6. 「ゲージ条件は異なる Lorentz 座標系において異なる形を取る——このゲージは Lorentz 共変ではない」 (p.175, 1.8,9) というのは単に $n_\mu X^\mu = \lambda\tau$ における成分 n_μ が座標系によって異なることを述べているものと考えられる.

■「 $n \cdot p$ を保存するように」 (p.175, 1.19) について 開弦については本文で述べられている通りである. 閉弦では運動量が保存するので (8.3 節), この条件は自動的に満たされている.

■ α' の自然単位系における単位 (9.9) について α' が長さの 2 乗の次元を持つことを記憶に留めておくことは, 今後の検算に大いに役立つ.

計算練習 9.1

$$\begin{aligned} \frac{\hbar c}{l} &= \frac{200\text{MeV} \times 10^{-15}\text{m}}{10^{-18} \times 10^{-2}\text{m}} = 2 \times 10^{-7}\text{MeV} \\ &= 20\text{TeV}. \quad (1\text{MeV} = 10^6\text{eV}, \quad 1\text{TeV} = 10^{12}\text{eV}) \end{aligned}$$

9.2 σ のパラメーター付け

次の条件を満たすようなパラメーター σ を選ぶことができる.

- 弦全体 (τ が一定の曲線) にわたり

$$n \cdot \mathcal{P}^\tau = (\text{一定}).$$

*6 両辺が同種のテンソルとなるから.

– 静的ゲージに対して $n_\mu = (1, 0, \dots, 0)$ なので, 7.3 節の σ に対するパラメーター付けの条件

$$\text{エネルギー密度 } \mathcal{P}^{\tau 0} = (\text{一定})$$

が再現される.

- パラメーターの範囲を開弦に対して $0 \leq \sigma \leq \pi$, 閉弦に対して $0 \leq \sigma \leq 2\pi$ とする.

このとき運動量密度 $n \cdot \mathcal{P}^\tau$ は全運動量 $n \cdot p$ を σ の全長 π または 2π で割ったものとなる:

$$n \cdot \mathcal{P}^\tau = \begin{cases} n \cdot p / \pi & (\text{開弦}) \\ n \cdot p / 2\pi & (\text{閉弦}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow n \cdot p = \frac{2\pi}{\beta} n \cdot \mathcal{P}^\tau, \quad \beta = \begin{cases} 2 & (\text{開弦}) \\ 1 & (\text{閉弦}) \end{cases} .$$

これに併せて τ に対するパラメーター付けの条件を

$$n \cdot X(\tau, \sigma) = \beta \alpha' (n \cdot p) \tau \quad (9.27a)$$

とすると便利である (開弦 $\beta = 2$ に対する条件は 9.1 節で与えたものである).

この条件 $n \cdot \mathcal{P}^\tau = \frac{\beta}{2\pi} n \cdot p$ の下で

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} (n \cdot \mathcal{P}^\sigma) = - \frac{\partial}{\partial \tau} (n \cdot \mathcal{P}^\tau) = 0, \quad (\text{運動方程式 } \partial_\sigma \mathcal{P}^{\sigma\mu} + \partial_\tau \mathcal{P}^{\tau\mu} = 0)$$

$$\therefore n \cdot \mathcal{P}^\sigma = (\text{一定}) \quad (\text{弦に沿って})$$

となる.

開弦に対しては $n \cdot p$ が保存されるための条件として端点で $n \cdot \mathcal{P}^\sigma = 0$ が課せられるから (9.1 節), 弦 (の世界面) 全体で $n \cdot \mathcal{P}^\sigma = 0$ となる.

閉弦に対しては, 世界面に $\sigma = 0$ の線を導入する方法の任意性がなお残されている. そこで閉弦でも $n \cdot \mathcal{P}^\sigma = 0$ が成り立つように $\sigma = 0$ の線を定めることができる [説明は下記].

9.2 節, 式の導出

■ 閉弦でも $n \cdot \mathcal{P}^\sigma = 0$ が成り立つように $\sigma = 0$ の線を導入できることの確認 閉弦の世界面に $\sigma = 0$ の線を, その上で $n \cdot \mathcal{P}^\sigma = 0$ が成り立つように導入できることを示せば良い. そうすれば, 開弦・閉弦のいずれに対しても $n \cdot \mathcal{P}^\sigma = (\text{一定})$ であることから, 閉弦の世界面全体で $n \cdot \mathcal{P}^\sigma = 0$ となることが保証される.

そこで世界面のある点において $n \cdot \mathcal{P}^\sigma = 0$ となる条件を調べよう. \mathcal{P}^σ の式 (6.50) より

$$n \cdot \mathcal{P}^\sigma = - \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{(\dot{X} \cdot X') \partial_\tau (n \cdot X) - (\dot{X})^2 \partial_\sigma (n \cdot X)}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}}$$

であり, さらに分子の第 2 項においてパラメーター付けの条件 (9.27a) より $\partial_\sigma (n \cdot X) = 0$ なので

$$n \cdot \mathcal{P}^\sigma = - \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{(\dot{X} \cdot X') \partial_\tau (n \cdot X)}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}}$$

となる. 再び式 (9.27a) を考慮すると $\partial_\tau (n \cdot X)$ は定数なので, 考えている点において $\dot{X} \cdot X' = 0$ であれば良い. 結局示したいことは, $\sigma = 0$ の線をその上で $\dot{X} \cdot X' = 0$ が成り立つように導入できることに帰着する.

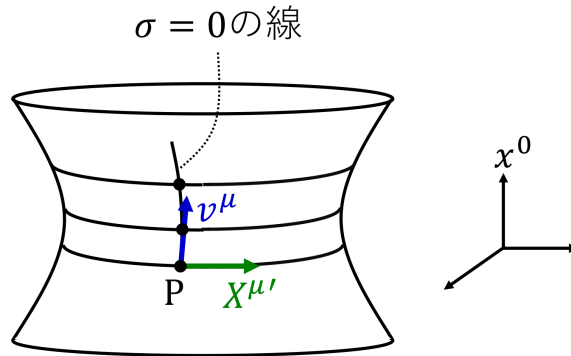


図 24 閉弦の世界面における $\sigma = 0$ の線を定める方法

そのような線 $\sigma = 0$ を得る手順を以下に述べる。まず閉弦の世界面における τ が一定の線 (弦) の 1 つに着目し、その上に $\sigma = 0$ の点 P を任意にとる。 $X^{\mu'}$ は弦に正接する (接する) 空間的ベクトルである。次に (直観的にも理解できるように)、点 P において弦の正接 $X^{\mu'}$ に直交する世界面内の時間的ベクトル v^{μ} が存在することを説明する (図 24 参照)。世界面は点 P において (世界面に) 正接する時間的なベクトル t^{μ} を持つ。もし $t_{\mu}X^{\mu'} = 0$ であれば t^{μ} は求めるベクトル v^{μ} そのものである。仮に $t_{\mu}X^{\mu'} \neq 0$ であっても、線形結合

$$v^{\mu} = t^{\mu} + bX^{\mu'}$$

は世界面の点 P における正接であり、 $v_{\mu}X^{\mu'} = 0$ となるように定数 b を定めることができる。

$$t \cdot X' + bX' \cdot X' = 0 \quad \rightarrow \quad v^{\mu} = t^{\mu} - \frac{t \cdot X'}{X' \cdot X'} X^{\mu'}$$

この v^{μ} は時間的なので (計算練習 9.2), 求めるベクトルとなっている。

注目している τ が一定の弦に隣接する弦における $\sigma = 0$ の点を、 $X^{\mu}(P) + \epsilon v^{\mu}$ で与える (ϵ は無限小の実数)。これを逐次繰り返すと、閉弦の世界面に $\sigma = 0$ の曲線が描かれる (図 24 参照)。このとき $\sigma = 0$ の曲線に対する正接 \dot{X}^{μ} は v^{μ} に比例するので、曲線上で $\dot{X} \cdot X' = 0$ となることが保証される。これが証明したいことであった。

9.2 について

「隣接する弦における $\sigma = 0$ の点は $X^{\mu}(P) + \epsilon v^{\mu}$ と与えられる」 (p.179, 1.4) について、これは 7.3 節の直交条件 $\dot{\vec{X}} \cdot \vec{X}' = 0$ と違って、 $\dot{X} \cdot X' = 0$ を意味する。また 7.3 節ではパラメーター σ に対する条件として $\dot{\vec{X}} \cdot \vec{X}' = 0$ が弦面の各点に課せられていたのに対し、ここでは $\dot{X} \cdot X' = 0$ の条件は $\sigma = 0$ の曲線を定義するために世界面上の $\sigma = 0$ の点でのみ課せられている。この措置はパラメーター σ の条件

$$n \cdot \mathcal{P}^{\tau} = (\text{一定}) \quad (\text{弦に沿って}),$$

$$\begin{cases} 0 \leq \sigma \leq \pi & (\text{開弦}) \\ 0 \leq \sigma \leq 2\pi & (\text{閉弦}) \end{cases}$$

と両立すると考えられる。これを用いて式 (9.23) の $n \cdot \mathcal{P}^{\sigma}$ がゼロになることが示され、結果的に弦の世界面の各点で $\dot{X} \cdot X' = 0$: (9.29) が成り立つことになる (9.3 節)。

計算練習 9.2

$$v^2 = t^2 + 2bt \cdot X' + b^2 X'^2 = t^2 - \frac{(t \cdot X')^2}{X'^2} \quad \left(\because b = -\frac{t \cdot X'}{X'^2} \right)$$

において X'^{μ} は空間的なので $X'^2 > 0$ であり, t^{μ} は時間的なので $t^2 < 0$ である. よって $v^2 < 0$ となるから v^{μ} は時間的である.

9.3 パラメーター付けの制約条件と波動方程式

パラメーター付けの定義式 (9.27a): $n \cdot X(\tau, \sigma) = \beta \alpha' (n \cdot p) \tau$ (および閉弦では世界面全体で $n \cdot \mathcal{P}^{\sigma} = 0$ が成り立つように $\sigma = 0$ の線を導入できること) により, [世界面の各点で]

$$\dot{X} \cdot X' = 0 \quad (23)$$

が成り立つ [説明は下記]. これを用いるとパラメーター付けの定義式

$$n \cdot X(\tau, \sigma) = \beta \alpha' (n \cdot p) \tau, \quad n \cdot p = \frac{2\pi}{\beta} n \cdot \mathcal{P}^{\tau} \quad (9.27)$$

から

$$\dot{X}^2 + X'^2 = 0 \quad (24)$$

が得られる [導出は下記]. パラメーター付けから生じる制約条件 (23), (24) は

$$(\dot{X} \pm X')^2 = 0 \quad (9.34)$$

とまとめられる. この制約条件の下で $\mathcal{P}^{\tau\mu}$ と $\mathcal{P}^{\sigma\mu}$ の式は

$$\mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^{\mu}, \quad \mathcal{P}^{\sigma\mu} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} X'^{\mu} \quad (25)$$

と簡略化され [導出は下記], 運動方程式 $\partial_{\tau} \mathcal{P}^{\tau\mu} + \partial_{\sigma} \mathcal{P}^{\sigma\mu} = 0$ は波動方程式

$$\ddot{X} - X'' = 0$$

を与える.

9.3 節, 式の導出

■式 (23): $\dot{X} \cdot X' = 0$ の理由 9.2 節では閉弦の世界面全体で $n \cdot \mathcal{P}^{\sigma} = 0$ が成り立つように $\sigma = 0$ の線を導入できることを証明した. その際, パラメーター付けの定義式 (9.27a): $n \cdot X(\tau, \sigma) = \beta \alpha' (n \cdot p) \tau$ の下で

$$n \cdot \mathcal{P}^{\sigma} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{(\dot{X} \cdot X') \partial_{\tau}(n \cdot X)}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}}$$

と表されることを見た (この表式は閉弦に特有の事情を仮定せずに導かれており, 開弦に対しても正しい). そして開弦では端点で $n \cdot \mathcal{P}^{\sigma} = 0$ が成り立ち, 閉弦では $\sigma = 0$ の線を, その上で $\dot{X} \cdot X' = 0$ が成り立つように導入できることから, 開弦と閉弦のいずれに関しても世界面全体で $n \cdot \mathcal{P}^{\sigma} = 0$ となることが保証された. するとこのとき逆に, 弦の世界面全体で $n \cdot \mathcal{P}^{\sigma} = 0$ であることから, 式 (23): $\dot{X} \cdot X' = 0$ が満たされていることになる.

■制約条件 (24) の導出 \mathcal{P}^τ の式 (6.49):

$$\mathcal{P}^{\tau\mu} = -\frac{T_0}{c} \frac{(\dot{X} \cdot X')X^{\mu'} - (X')^2 \dot{X}^\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}}$$

に式 (23): $\dot{X} \cdot X' = 0$ を適用すると

$$\mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{X'^2 \dot{X}^\mu}{\sqrt{-\dot{X} X'^2}} \quad (9.30)$$

となる. すると式 (9.27) の第 2 式は

$$n \cdot p = \frac{1}{\beta\alpha'} \frac{X'^2 (n \cdot \dot{X})}{\sqrt{-\dot{X} X'^2}}$$

となる. ここに式 (9.27) の第 1 式から得られる $n \cdot \dot{X} = \beta\alpha' (n \cdot p)$ を代入すると,

$$1 = \frac{X'^2}{\sqrt{-\dot{X} X'^2}}, \quad \therefore \dot{X}^2 + X'^2 = 0 : (24)$$

が導かれる.

■ $\mathcal{P}^{\tau\mu}$ と $\mathcal{P}^{\sigma\mu}$ の式 (25) の導出 $\mathcal{P}^{\tau\mu}$ の式 (9.30) は制約条件 (24): $\dot{X}^2 + X'^2 = 0$ により分母が

$$\sqrt{-\dot{X}^2 X'^2} = \sqrt{X'^2 X'^2} = X'^2 \quad (\because X'^2 > 0)$$

と簡略化されるので, 式 (25):

$$\mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^\mu$$

を得る.

また \mathcal{P}^σ の式 (6.50):

$$\mathcal{P}^{\sigma\mu} = -\frac{T_0}{c} \frac{(\dot{X} \cdot X')\dot{X}^\mu - (\dot{X})^2 X'^\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}}$$

は, 式 (23): $\dot{X} \cdot X' = 0$ を利用した上で \mathcal{P}^τ と同様に分母を書き換えると

$$\mathcal{P}^{\sigma\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{\dot{X}^2 X'^\mu}{\sqrt{-\dot{X} X'^2}} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{\dot{X}^2 X'^\mu}{X'^2} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} X'^\mu : (25)$$

となる. ただし最後の等号でも式 (24): $\dot{X}^2 + X'^2 = 0$ を用いた.

9.3 について

弦の質量線密度 μ_0 が式 (8.76): $T_0 = 1/2\pi\alpha'$ であることを踏まえると, 光錐ゲージにおける運動量密度の表式 (9.36): $\mathcal{P}^{\tau\mu} = \dot{X}^\mu/2\pi\alpha'$ は大まかに (質量密度) \times (速度) となっている.

9.4 波動方程式とモード展開

自由な端点を持つ開弦に対する境界条件

$$0 = \mathcal{P}^{\sigma\mu} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} X^{\mu\prime}$$

$$\Leftrightarrow \text{Neumann 境界条件 } X^{\mu\prime} = 0$$

の下での波動方程式 $\ddot{X} - X'' = 0$ の解は

$$X^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2} \{f^\mu(\tau + \sigma) + f^\mu(\tau - \sigma)\} \quad (9.43)$$

の形をとる [導出は下記]. ただし $f^{\mu\prime}$ は周期 2π の周期関数となることに注意すると [説明は下記]

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + f_1^\mu \tau - i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^{\mu*} e^{in\tau} - a_n^\mu e^{-in\tau}) \frac{\cos n\sigma}{\sqrt{n}} \quad (26)$$

の形に Fourier 展開される (弦座標の実数性も考慮した) [導出は下記]. これは点粒子の運動を表す項 $x_0^\mu + f_1^\mu \tau$ と, 振動モードに対応する項から成る. ここで展開係数 a_n^μ が無単位となるように因子 $\sqrt{2\alpha'}$ をくくり出してある. また係数 f_1^μ は弦の運動量 p^μ に比例する:

$$p^\mu = \int_0^\pi \mathcal{P}^{\tau\mu} d\sigma = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^\pi \dot{X}^\mu d\sigma = \frac{1}{2\alpha'} f_1^\mu, \quad \therefore f_1^\mu = 2\alpha' p^\mu.$$

さらに

$$\begin{cases} \alpha_0^\mu = \sqrt{2\alpha'} p^\mu \\ \alpha_n^\mu = a_n^\mu \sqrt{n}, & \alpha_{-n}^\mu = a_n^{\mu*} \sqrt{n} \quad (n \geq 1) \end{cases} \quad (27)$$

$$\Rightarrow \alpha_{-n}^\mu = (\alpha_n^\mu)^*$$

を導入すると, これは

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\mu \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} \cos n\sigma$$

と簡略化される. このとき

$$\begin{aligned} \dot{X}^\mu &= \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \alpha_n^\mu \cos n\sigma e^{-in\tau}, \\ X^{\mu\prime} &= -i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \alpha_n^\mu \sin n\sigma e^{-in\tau}, \\ \dot{X}^\mu \pm X^{\mu\prime} &= \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \alpha_n^\mu e^{-in(\tau \pm \sigma)} \end{aligned} \quad (9.59)$$

である. 我々はこの解 $X^\mu(\tau, \sigma)$ が制約条件 $(\dot{X} \pm X')^2 = 0$ を満たすように係数 α_n^μ を決めなければならない.

9.4 節, 式の導出など

■弦座標の式 (9.43) の導出 波動方程式の一般解

$$X^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2}(f^\mu(\tau + \sigma) + g^\mu(\tau - \sigma))$$

に対して $\sigma = 0$ における Neumann 境界条件を適用すると

$$0 = \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}(\tau, 0) = \frac{1}{2}(f^{\mu'}(\tau) - g^{\mu'}(\tau)) \quad \text{for all } \tau$$

となるので, f^μ と g^μ には定数 c^μ の違いだけが許容される: $g^\mu = f^\mu + c^\mu$. よって

$$X^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2}(f^\mu(\tau + \sigma) + f^\mu(\tau - \sigma) + c^\mu)$$

であり, c^μ を任意関数 f^μ に吸収させる, すなわち $f^\mu + \frac{1}{2}c^\mu \rightarrow f^\mu$ と再定義すると式 (9.43) を得る.

■ $f^{\mu'}$ が周期 2π の周期関数となる理由 弦座標の式 (9.43):

$$X^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2}(f^\mu(\tau + \sigma) + f^\mu(\tau - \sigma))$$

に対して $\sigma = \pi$ における Neumann 境界条件を適用すると

$$0 = \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}(\tau, \pi) = \frac{1}{2}(f^{\mu'}(\tau + \pi) - f^{\mu'}(\tau - \pi)) \quad \text{for all } \tau$$

となることによる. 2π は自然な周期なので, 我々が開弦のパラメーター付けの範囲を $0 \leq \sigma \leq \pi$ と決めたのは適切であったことが判る.

■弦座標のモード展開 (26) の導出 周期 2π の周期関数 $f^{\mu'}$ の一般的な Fourier 級数展開

$$f^{\mu'}(u) = f_1^\mu + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^\mu \cos nu + b_n^\mu \sin nu)$$

を積分すると,

$$f^\mu(u) = f_0^\mu + f_1^\mu u + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^\mu \cos nu + B_n^\mu \sin nu)$$

という形になる. 弦座標の式 (9.43) にこれを代入して整理すると

$$X^\mu(\tau, \sigma) = f_0^\mu + f_1^\mu \tau + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^\mu \cos n\tau + B_n^\mu \sin n\tau) \cos n\sigma \quad (9.47)$$

を得る [本稿次節で補足]. f_0^μ, f_1^μ および各 Fourier 係数 A_n^μ, B_n^μ が実数であれば, 弦座標 X^μ の実数性が保証される. 量子論への移行を容易にするために, 次の関係を通じて, 係数 A_n^μ, B_n^μ の代わりとなる定数 a_n^μ を導入する.

$$\begin{aligned} A_n^\mu \cos n\tau + B_n^\mu \sin n\tau &= -\frac{i}{2} \{ (B_n^\mu + iA_n^\mu) e^{in\tau} - (B_n^\mu - iA_n^\mu) e^{-in\tau} \} \\ &\equiv -i \frac{\sqrt{2\alpha'}}{\sqrt{n}} (a_n^{\mu*} e^{in\tau} - a_n^\mu e^{-in\tau}). \end{aligned}$$

ここで $*$ は複素共役を表す. これを上式 (9.47) に代入して弦座標のモード展開 (26) を得る.

9.4 について

■ $X^\mu(\tau, \sigma)$ の Fourier 展開 (9.47) の導出

$$\begin{aligned} X^\mu(\tau, \sigma) &= f_0^\mu + \frac{1}{2}\{(\tau + \sigma) + (\tau - \sigma)\}f_1^\mu \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} [A_n^\mu \{\cos(n(\tau + \sigma)) + \cos(n(\tau - \sigma))\} + B_n^\mu \{\sin(n(\tau + \sigma)) + \sin(n(\tau - \sigma))\}] \\ &= f_0^\mu + f_1^\mu \tau + \sum_{n=1}^{\infty} \{A_n^\mu \cos(n\tau) + B_n^\mu \sin(n\tau)\} \times \cos(n\sigma) : (9.47). \end{aligned}$$

■ 弦座標のモード展開 (9.51) における τ の係数の解釈 弦の質量線密度 μ_0 は式 (8.76): $T_0 = 1/2\pi\alpha'$ であり, 開弦に対して σ の全範囲は π なので, τ の 1 次項の係数 $2\alpha'p^\mu = p^\mu/\pi T_0$ は大まかには運動量 p^μ に対する速度と見なせることが分かる.

計算練習 9.3

$X^\mu(\tau, \sigma)$ の式 (9.51) が実数であることは, その導き方 (9.48) から明らかである. 実際

$$(a_n^{\mu*} e^{in\tau} - a_n^\mu e^{-in\tau})^* = -(a_n^{\mu*} e^{in\tau} - a_n^\mu e^{-in\tau})$$

なので $a_n^{\mu*} e^{in\tau} - a_n^\mu e^{-in\tau}$ は純虚数であり, これに $-i\sqrt{2\alpha'}$ をかけると実数になる.

9.5 運動方程式の光錐解

パラメーター付けの定義式 (9.27):

$$n \cdot X(\tau, \sigma) = \beta\alpha' (n \cdot p)\tau, \quad n \cdot p = \frac{2\pi}{\beta} n \cdot \mathcal{P}^\tau$$

は $n^\mu = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots, 0\right)$ と選ぶと

$$X^+(\tau, \sigma) = \beta\alpha' p^+ \tau, \quad p^+ = \frac{2\pi}{\beta} \mathcal{P}^{\tau+} \quad (28)$$

となる (光錐ゲージ). このとき制約条件 (9.34): $(\dot{X} \pm X')^2 = 0$ は

$$\dot{X}^- \pm X^{-'} = \frac{1}{\beta\alpha'} \frac{1}{2p^+} (\dot{X}^I \pm X^{I'})^2, \quad (29)$$

$$X^I \equiv (X^2, X^3, \dots, X^d) : \text{横方向座標}$$

となる ($p^+ \neq 0$, したがって $p^+ > 0$ を仮定した (一般に $p^+ \geq 0$ である, 2.5 節)) [導出は下記]. ただし繰り返された横方向添字 I について和をとる (以下同じ).

すると弦の時間発展は

$$X^I(\tau, \sigma), \quad p^+, \quad x_0^-(X^- \text{の積分定数})$$

によって決定される. 実際, $X^\mu(\tau, \sigma)$ のうち $X^I(\tau, \sigma)$ が与えられているとき, $X^\pm(\tau, \sigma)$ を求めれば完全な解が得られる. そして自由端点を持つ開弦を考えると

- $X^+(\tau, \sigma)$ は与えられた p^+ を用いて式 (28):

$$X^+(\tau, \sigma) = 2\alpha' p^+ \tau \quad (\text{開弦に対して } \beta = 2)$$

と定まる.

- $X^- = (X^0 - X^1)/\sqrt{2}$ は X^μ と同じ波動方程式と境界条件を満たすため

$$X^-(\tau, \sigma) = x_0^- + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^- \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^- e^{-in\tau} \cos n\sigma \quad (9.72)$$

と展開される.

今 X^I が, したがってその展開係数 α_n^I が与えられており,

式 (29) よりこれを用いて X^- の展開係数 α_n^- は

$$\sqrt{2\alpha'} \alpha_n^- = \frac{1}{p^+} L_n^\perp, \quad L_n^\perp \equiv \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbf{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I : \text{横方向の Virasoro モード} \quad (9.77)$$

と表される [導出は下記]. よって積分定数 x_0^- が与えられれば X^- が定まる.

弦の質量 M は弦の運動量 p^μ から

$$M^2 = -p^2 = 2p^+ p^- - p^I p^I$$

によって求められる. α_n^- が横方向の Virasoro モードで与えられることを用いると

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} n \alpha_n^{I*} \alpha_n^I \quad (9.83)$$

が得られる [導出は下記]. $M^2 \geq 0$ となっているので, 古典的な弦の質量 M は実数であることが保証される. 弦を量子化すると

- M^2 は量子化される.
 - 自然界において, 連続した質量の値をとる粒子状態は観測されない.
- 無質量状態は, Maxwell 理論や重力とは全く異なったものになる.
- M^2 の式に付加定数が現れる \rightarrow ゲージ場と重量を記述可能.

「振動子」という呼称 p.187 訳註にあるように, 展開係数 a_n^μ, α_n^μ を教科書では振動子と呼んでいる.

9.5 節, 式の導出など

■ X^- の導関数を X^I の導関数で与える式 (29) の導出 任意のベクトル a^μ に対して相対論的スカラー積は

$$a^2 = -2a^+ a^- + a^I a^I$$

と成分計算される (I について和をとることを忘れないように, $(a^I)^2$ とせずに $a^I a^I$ と書いている). ここで $a = \dot{X} \pm X'$ とおくと, 制約条件 (9.34): $(\dot{X} \pm X')^2 = 0$ は

$$-2(\dot{X}^+ \pm X'^+)(\dot{X}^- \pm X'^-) + (\dot{X}^I \pm X'^I)^2 = 0$$

と書ける. ここに光錐ゲージ条件 (28) から得られる $X'^+ = 0$, $\dot{X}^+ = \beta\alpha' p^+$ を代入すると, 式 (29):

$$\dot{X}^- \pm X'^- = \frac{1}{\beta\alpha'} \frac{1}{2p^+} (\dot{X}^I \pm X'^I)^2$$

が導かれる.

■ α_n^- と横方向 Virasoro モードの関係 (9.77) の導出 全ての弦座標 $X^\mu = (X^0, X^1, X^I)$ と同様, 光錐成分 X^- もまた式 (9.72) のようにモード展開される. よって弦座標の導関数の線形結合に対するモード展開の式 (9.59) に $\mu = -, I$ を代入した式

$$\dot{X}^- \pm X^{-'} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \alpha_n^- e^{-in(\tau \pm \sigma)}, \quad \dot{X}^I \pm X^{I'} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \alpha_n^I e^{-in(\tau \pm \sigma)}$$

が成り立つ. これらを式 (29):

$$\dot{X}^- \pm X^{-'} = \frac{1}{\beta\alpha'} \frac{1}{2p^+} (\dot{X}^I \pm X^{I'})^2$$

に代入すると

$$\begin{aligned} \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \alpha_n^- e^{-in(\tau \pm \sigma)} &= \frac{1}{2p^+} \sum_{p, q \in \mathbf{Z}} \alpha_p^I \alpha_q^I e^{-i(p+q)(\tau \pm \sigma)} \\ &= \frac{1}{2p^+} \sum_{n, p \in \mathbf{Z}} \alpha_p^I \alpha_{n-p}^I e^{-in(\tau \pm \sigma)} \\ &= \frac{1}{2p^+} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \left(\sum_{p \in \mathbf{Z}} \alpha_p^I \alpha_{n-p}^I \right) e^{-in(\tau \pm \sigma)} \end{aligned}$$

となるので, 式 (9.77):

$$\sqrt{2\alpha'} \alpha_n^- = \frac{1}{2p^+} \sum_{p \in \mathbf{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I$$

を得る.

■質量の自乗の公式 (9.83) の導出 振動子 α の式 (27): $\alpha_0^\mu = \sqrt{2\alpha'} p^\mu$ により p^- は α_0^- で表され, 式 (9.77) より α_0^- は横方向 Virasoro モード L_0^\perp で表される:

$$2p^+ p^- = \frac{1}{\alpha'} L_0^\perp = \frac{1}{\alpha'} \left(\frac{1}{2} \alpha_0^I \alpha_0^I + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^I \alpha_n^I \right) = p^I p^I + \frac{1}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} n \alpha_n^{I*} \alpha_n^I.$$

これを弦の運動量 p^μ から弦の質量 M を計算する式

$$M^2 = -p^2 = 2p^+ p^- - p^I p^I$$

に代入すると, 質量の自乗の公式 (9.83):

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} n \alpha_n^{I*} \alpha_n^I$$

を得る.

9.5 について

■相対論的スカラー積 (9.64) 相対論的スカラー積 (2.59):

$$a \cdot b = -a^- b^+ - a^+ b^- + a^2 b^2 + a^3 b^3$$

を空間が d 次元の場合に一般化し $a = b$ とおくと

$$a^2 = -2a^+ a^- + a^I a^I$$

となる (I について和をとることを忘れないように, $(a^I)^2$ とせず $a^I a^I$ と書いている). ここで $a = \dot{X} \pm X'$ とおいたものが式 (9.64) の左辺である.

■「 p^+ がゼロになる……質量のない粒子が正確に x^1 の負の向きに運動する場合に限られている」(p.185, l.16 ~18) について

$$p^+ \equiv \frac{p^0 + p^1}{\sqrt{2}} = 0, \quad \therefore p^1 = -p^0 = -\sqrt{m^2 + \vec{p}^2}$$

となるとき, $p^1 \leq 0$ であり, また $|p_1| = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}$ が必要である. ところで $\sqrt{m^2 + \vec{p}^2} \geq |\vec{p}| \geq |p^1|$ であり, 等号が成り立つのは $m = 0, p^I = 0$ のときである.

■ X^- の導関数を X^I の導関数で与える式 (29) について 式 (29):

$$\dot{X}^- \pm X^{-'} = \frac{1}{\beta\alpha'} \frac{1}{2p^+} (\dot{X}^I \pm X^{I'})^2$$

について教科書では次のように述べられている (p.185).

光錐座標と光錐ゲージを両方とも選ぶことが, X^- の導関数を解くために決定的に重要な役割を演じていることに注意してもらいたい. 光錐座標が有用となる理由は, $(+, -)$ 部分における非対角的計量により, X^- の導関数を, 平方根を取ることなく解ける点にある! 横方向座標の導関数から $\dot{X}^+ \pm X^{+'}$ を求めるために必要になった計算は, \dot{X}^+ による除算だけである. ここで \dot{X}^+ が定数になる“光錐ゲージ”が便利なものになっている.

これに関して教科書 p.185 の訳註を引用する.

静的ゲージの場合は $\dot{X}^1 \pm X^{1'} = \pm\sqrt{1 - (\dot{X}^I \pm X^{I'})^2}$ となる.

■光錐ゲージ条件 (9.70): $X^+(\tau, \sigma) = 2\alpha' p^+ \tau$ について これは弦座標 X^μ (ただし $\mu = 0, 1, \dots, d$) のモード展開 (9.51) における τ の項と一致しており, モード展開の式 (9.51) と矛盾しない. これは X^- について式 (9.72) の箇所の説明されていると同様に, X^0 と X^1 の線形結合である光錐座標 X^\pm も X^μ と同じ境界条件と波動方程式を満たすので, 式 (9.51) と同様にモード展開されなければならないことから期待されることである.

■「 $M^2 = 0$ となり, ……弦は長さのない点になってしまう」(p.188, l.1,12) について これは弦が長さを持つとき, 弦の張力に逆らってその長さまで引き伸ばす仕事に相当するエネルギーを弦は蓄えるために, 弦が質量を持つということと整合している.

計算練習 9.4

X^- の Fourier 展開 (9.72) における展開係数 α_n^- が式 (9.77) で与えられるため, 式 (9.80) を得る.

計算練習 9.5

すべての α_n^I をゼロにすると, 式 (9.52), 式 (9.53) で定義される α_n^I のうち $n \neq 0$ のものがゼロとなる. このとき横方向の Virasoro モード (9.77) で与えられる α_n^- もまた $n \neq 0$ のものがゼロとなる. よって X^- の

式 (9.72) は $X^I(\tau, \sigma) = x_0^I + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^I\tau$ と類似の式

$$X^-(\tau, \sigma) = x_0^- + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^-\tau$$

になり, σ 依存性が消失する.

問題 (第 9 章)

問題 9.2 X^- の解の無矛盾性の確認

9.5 節 p.185 で言及されている問題 9.2 を解く.

(a)

式 (9.65): $\dot{X}^- \pm X^{-'} = \frac{1}{\beta\alpha'} \frac{1}{2p^+} (\dot{X}^I \pm X^{I'})^2$ より

$$\dot{X}^I = \frac{1}{\beta\alpha'} \frac{1}{2p^+} \{(\dot{X}^I)^2 + (X^{I'})^2\}, \quad X^{-'} = \frac{1}{\beta\alpha'} \frac{1}{2p^+} \dot{X}^I \cdot X^{I'}$$

を得る. よって X^I が波動方程式を満たすならば

$$\begin{aligned} & \partial_\sigma(\partial_\tau X^-) - \partial_\tau(\partial_\sigma X^-) \\ &= \frac{1}{\beta\alpha'} \frac{1}{2p^+} [\partial_\sigma\{(\dot{X}^I)^2 + (X^{I'})^2\} - 2\partial_\tau(\dot{X}^I \cdot X^{I'})] \\ &= \frac{1}{\beta\alpha'} \frac{1}{p^+} \{\dot{X}^I \cdot (\partial_\sigma \partial_\tau X^I) + X^{I'} \cdot X^{I''} - \ddot{X}^I \cdot X^{I'} - \dot{X}^I \cdot (\partial_\tau \partial_\sigma X^I)\} \\ &= \frac{1}{\beta\alpha'} \frac{1}{p^+} X^{I'} \cdot (X^{I''} - \ddot{X}^I) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる. これはベクトル場 $(\partial_\tau X^-, \partial_\sigma X^-)$ が渦なしであることを意味するから, 式 (9.66) によりその線積分として得られる X^- の値は選んだ積分路に依存しない.

(b)

各座標 X^μ は波動方程式 (9.39) を満たすので, $X^- = (X^0 - X^1)/\sqrt{2}$ もまた波動方程式を満たすと考えられる.

小問 (a) より

$$\begin{aligned} & \ddot{X}^- - X^{-''} \\ &= \frac{1}{\beta\alpha'} \frac{1}{p^+} \{\dot{X}^I \cdot \ddot{X}^I + X^{I'} \cdot (\partial_\tau \partial_\sigma X^I) - (\partial_\sigma \partial_\tau X^I) \cdot X^{I'} - \{\dot{X}^I \cdot X^{I''}\}\} \\ &= \frac{1}{\beta\alpha'} \frac{1}{p^+} X^{I'} \cdot (\ddot{X}^I - X^{I''}) \end{aligned}$$

となるので, 横方向座標 X^I が波動方程式を満たすならば, X^- もまた波動方程式を満たす.

(c)

$$\text{Dirichlet 境界条件 (6.55): } \dot{X}^I = 0, \quad \text{Neumann 境界条件 (6.41): } X^{I'} = 0$$

のいずれに対しても端点で

$$X^{-'} = \frac{1}{\beta\alpha'} \frac{1}{p^+} \dot{X}^I \cdot X^{I'} = 0$$

となるため X^- は Neumann 境界条件を満たす。

問題 9.5 光錐ゲージにおける閉弦

9.5 節 p.186 で言及されている問題 9.5 を解く。

(a)

$$\text{式 (9.65): } \dot{X}^- \pm X^{-'} = \frac{1}{\beta\alpha'} \frac{1}{2p^+} (\dot{X}^I \pm X^{I'})^2 \text{ より}$$

$$X^{-'} = \frac{1}{2p^+} \{-4a^2 \cos^2(\tau - \sigma) - 4b^2 \sin^2(\tau - \sigma) + 4\bar{a}^2 \cos^2(\tau + \sigma) + 4\bar{b}^2 \sin^2(\tau + \sigma)\} + (\text{クロス・ターム})$$

を得る。よって制約条件 (9.67):

$$0 = \int_0^{2\pi} d\sigma \frac{\partial X^-}{\partial \sigma} = \frac{2\pi}{p^+} (-a^2 - b^2 + \bar{a}^2 + \bar{b}^2)$$

は $a^2 + b^2 - \bar{a}^2 - \bar{b}^2 = 0$ を与える。

(b)

$a = b = \bar{a} = \bar{b} = r$ は小問 (a) で得た制約条件を満たしている。このとき

$$\begin{aligned} & \dot{X}^{(2)} \pm X^{(2)'} \\ &= 2r\sqrt{2\alpha'} \{\cos(\tau \pm \sigma) - \sin(\tau \pm \sigma)\}, \\ \therefore \dot{X}^- &= \frac{8r^2}{p^+} \{1 - \cos(\tau + \sigma) \sin(\tau + \sigma) - \cos(\tau - \sigma) \sin(\tau - \sigma)\}, \\ X^{-'} &= \frac{8r^2}{p^+} \{\cos(\tau + \sigma) - \sin(\tau + \sigma)\} \{\cos(\tau - \sigma) - \sin(\tau - \sigma)\} \\ &= \frac{8r^2}{p^+} [\{\cos(\tau + \sigma) \cos(\tau - \sigma) + \sin(\tau + \sigma) \sin(\tau - \sigma)\} - \{\sin(\tau + \sigma) \cos(\tau - \sigma) + \cos(\tau + \sigma) \sin(\tau - \sigma)\}] \\ &= \frac{8r^2}{p^+} \{\cos(2\sigma) - \sin(2\tau)\} \end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned} X^-(\tau, \sigma) &= X^-(0, 0) + \int_0^\tau \dot{X}^-(0, \tau) d\tau + \int_0^\sigma X^{-'}(\tau, \sigma) d\sigma \\ &= \frac{8r^2}{p^+} \left(\frac{1}{2} \cos(2\tau) + \frac{1}{2} \sin(2\sigma) + \tau - \sigma \sin(2\tau) \right) + \text{const.} \end{aligned}$$

また

$$p^\mu = \int_0^{2\pi} \mathcal{P}^{\tau\mu} d\sigma = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^{2\pi} \dot{X}^\mu d\sigma$$

を用いて運動量を計算すると

$$p^- = \frac{1}{\alpha'} \frac{8r^2}{p^+}, \quad p^I = 0$$

となるので、弦の質量 M は

$$M^2 = -p^2 = 2p^+p^- - p^I p^I = \frac{16r^2}{\alpha'}, \quad \therefore M = \frac{4r}{\sqrt{\alpha'}}$$

と求まる。

光錐ゲージまとめ

第9章におけるパラメーターの制約条件とその帰結は図25のように整理される。

$$\beta = \begin{cases} 2 & \text{(開弦)} \\ 1 & \text{(閉弦)} \end{cases} \text{ に対して}$$

- τ のパラメーター付けの条件

$$\underbrace{n \cdot X(\tau, \sigma)}_{\text{時間的ベクトル}} = \beta \alpha' \underbrace{(n \cdot p)}_{\text{開弦では端点で } n \cdot p^\sigma = 0 \text{ であれば一定}} \tau \quad \textcircled{1}$$

開弦では端点で $n \cdot p^\sigma = 0$ であれば一定
閉弦では運動量が保存するから (8.3節) 一定

$$(n^\mu = (1, 0, \dots, 0) \text{ で静的ゲージ } X^0 \sim \tau)$$

- σ のパラメーター付けの条件

弦全体 (τ が一定の線) にわたり

$$n \cdot \mathcal{P}^\tau = \frac{n \cdot p}{2\pi/\beta} \quad \text{(一定)} \quad \textcircled{2}$$

$(n^\mu = (1, 0, \dots, 0) \text{ でエネルギー密度 } \mathcal{P}^{\tau 0} = \text{(一定)})$

$$\leftarrow \text{運動方程式 } \partial_\tau \mathcal{P}^{\tau\mu} + \partial_\sigma \mathcal{P}^{\sigma\mu} = 0$$

$$n \cdot \mathcal{P}^\sigma = \text{(一定)} = 0$$

- 開弦では端点で $n \cdot \mathcal{P}^\sigma = 0$ を要求 (上記)
- 閉弦ではある線 $\sigma = 0$ を, その上で $n \cdot \mathcal{P}^\sigma \propto \dot{X} \cdot X' = 0$ となるように導入できる

制約条件 世界面上の各点で

$$\left[\begin{array}{l} (n \cdot \mathcal{P}^\sigma \propto) \dot{X} \cdot X' = 0 \quad \text{(静的ゲージ } X^0 \sim \tau \text{ で } \frac{\partial \bar{X}}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \bar{X}}{\partial \sigma} = 0) \\ \text{また, } \textcircled{1} \& \textcircled{2} \Rightarrow \dot{X}^2 + X'^2 = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow (\dot{X} \pm X')^2 = 0$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{l} \mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^\mu, \quad \mathcal{P}^{\sigma\mu} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} X'^\mu \\ \text{(静的ゲージでも } \mathcal{P}^{\tau\mu} \sim \dot{X}^\mu, \mathcal{P}^{\sigma\mu} \sim X'^\mu) \\ \text{運動方程式 } \ddot{X} - X'' = 0 \quad \text{(波動方程式)} \\ \text{(静的ゲージで } \frac{\partial^2 \bar{X}}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \bar{X}}{\partial \sigma^2} = 0) \end{array} \right.$$

光錐ゲージでは $n^\mu = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots, 0)$ と選択

$$\textcircled{1} : X^+(\tau, \sigma) = \beta \alpha' p^+ \tau, \quad \textcircled{2} : p^+ = \frac{2\pi}{\beta} \mathcal{P}^{\tau+}$$

$$\text{制約条件 } \dot{X}^- \pm X'^- = \frac{1}{\beta \alpha'} \frac{1}{2p^+} (\dot{X}^l \pm X'^l)^2$$

($X^- \leftarrow$ 横方向座標 X^l)

$$\sqrt{2\alpha'} \alpha_n^- = \frac{1}{p^+} L_n^-, \quad L_n^- \equiv \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-p}^l \alpha_p^l : \text{横方向のVirasoroモード}$$

図 25 光錐ゲージまとめ

第 10 章 各種の光錐場とボゾン

10.1 序論

光錐ゲージは

- τ が光錐時間 X^+ に関係づけられ
- σ が p^+ の密度を一定にするように選ばれている

パラメーター付けであり、これを採用すると弦の運動方程式は波動方程式に簡略化される (9.5 節).

- スカラー場
 - ゲージ不変性を持たない
 - 基本的なスカラー粒子は発見されていない
 - 最も単純な場の理論
 - 弦理論においてスカラー粒子が現れる (例: タキオン, ディラトン)
- 電磁場
 - ゲージ不変性を持つ
 - 電磁場の量子論に関係づけられる粒子は光子
- 重力場
 - ゲージ不変性を持つ

10.2 スカラー場の作用

スカラー場 $\phi(x)$ …… 与えられた時空点における値が Lorentz 座標系に依らない.

スカラー場のラグランジアン密度を

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= T - V, \\ T &= \frac{1}{2}(\partial_0\phi)^2 : \text{運動エネルギー密度}, \\ V &= \frac{1}{2}m^2\phi^2 : \text{平衡値}\phi = 0 \text{を持つポテンシャルエネルギー密度}\end{aligned}$$

と考えると (m は質量の次元を持つ), これは Lorentz スカラーではない. そこで

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(\partial_\mu\phi)(\partial_\nu\phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2$$

とすると, これは Lorentz スカラーである. このとき

$$\begin{aligned}\text{場に共役な運動量} \quad \Pi &\equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)} = \partial_0\phi, \\ \text{ハミルトニアン密度} \quad \mathcal{H} &\equiv \Pi\partial_0\phi - \mathcal{L} = \frac{1}{2}\Pi^2 + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2\end{aligned}$$

となる. 変分原理から場の方程式として Klein-Gordon 方程式

$$(\partial^2 - m^2)\phi = 0$$

が得られる。作用が場の 2 次の項から成るため、このように運動方程式は場に関して線形となる。その場合、場は自由な場と呼ばれる。

計算練習 10.1

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= (\partial_0\phi)^2 - \left\{ \frac{1}{2}(\partial_0\phi)^2 - \frac{1}{2}(\partial_i\phi)(\partial_i\phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2}\Pi^2 + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2.\end{aligned}$$

10.3 スカラー場の古典的な平面波解

Klein-Gordon 方程式は $E_p \equiv \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ に対して

$$\phi(t, \vec{x}) = ae^{-iE_p t + i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a^* e^{iE_p t - i\vec{p}\cdot\vec{x}}$$

の形の平面波解を持つ。右辺の 2 項が複素共役なので、 ϕ が実場であることが保証される。

スカラー場 $\phi(x)$ を

$$\phi(x) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{ip\cdot x} \phi(p) \quad (30)$$

と全ての時空座標について Fourier 展開すると、 $\phi(x)$ が実場であるための条件

$$(\phi(p))^* = \phi(-p) \quad (31)$$

が課せられる [導出は下記]。また、これが Klein-Gordon 方程式を満たす条件

$$(p^2 + m^2)\phi(p) = 0 \quad (\text{全ての } p \text{ に対して})$$

より

- $p^2 + m^2 \neq 0$ となる p に対して $\phi(p) = 0$.
- $p^2 + m^2 = 0$ となる p に対して $\phi(p)$ は任意。
 - 超曲面 $p^2 + m^2 = 0$ は質量殻と呼ばれ、点 $(\pm E_p, \vec{p})$ から成る。
 - 質量殻上の点 p^μ に対して複素数 $\phi(p)$ の値を、したがって 2 つの実数値を指定すると、点 $(-p^\mu)$ における場の値 $\phi(-p) = (\phi(p))^*$ も決定される。
 - 平均すると質量殻上の各点にひとつの実数値があてがわれる。
 - ↔ 「質量殻上の各点あたりにひとつの自由度がある」。

横方向成分をまとめて

$$\vec{x}_T = (x^2, x^3, \dots, x^d), \quad \vec{p}_T = (p^2, p^3, \dots, p^d)$$

と書き、

$$\phi(x^+, x^-, \vec{x}_T) = \int \frac{dp^+}{2\pi} \frac{d^{D-2} p_T}{(2\pi)^{D-2}} e^{-ix^- p^+ + i\vec{x}_T \cdot \vec{p}_T} \phi(x^+, p^+, \vec{p}_T) \quad (10.28)$$

によって“空間”座標に関する場の Fourier 変換 $\phi(x^+, p^+, \vec{p}_T)$ を定義すると、Klein-Gordon 方程式よりこれは

$$\left(i \frac{\partial}{\partial x^+} - \frac{1}{2p^+} (p^I p^I + m^2) \right) \phi(x^+, p^+, \vec{p}_T) = 0 \quad (32)$$

を満たす [導出は下記]. 最後に粒子に対する光錐ゲージ条件 (11.7): $x^+ = p^+ \tau / m^2$ や開弦に対する光錐ゲージ条件 (9.62): $X^+ = 2\alpha' p^+ \tau$ を念頭に, 時間変数 τ への変数変換を行うと,

$$\left(i \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{1}{2m^2} (p^I p^I + m^2) \right) \phi(\tau, p^+, \vec{p}_T) = 0, \quad (\text{粒子に対して}) \quad (33)$$

$$\left(i \frac{\partial}{\partial \tau} - \alpha' (p^I p^I + m^2) \right) \phi(\tau, p^+, \vec{p}_T) = 0 \quad (\text{開弦に対して}) \quad (34)$$

を得る. これらは光錐時間 x^+ またはこれと関係する無単位の時間変数 τ に関して 1 階の微分方程式になっている.

10.3 節, 式の導出など

■実場の条件 (31) の導出 場 $\phi(x)$ の Fourier 展開 (30) に対して実数条件 $(\phi(x))^* = \phi(x)$ を適用すると

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{-ip \cdot x} (\phi(p))^* = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{ip \cdot x} \phi(p) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{-ip \cdot x} \phi(-p)$$

となる. ただし第 2 の等号では変数変換 $p \rightarrow -p$ を行った. すると

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{-ip \cdot x} (\phi(-p) - (\phi(p))^*) = 0$$

が任意の x に対して成り立たなければならないから, 式 (31): $(\phi(p))^* = \phi(-p)$ を得る.

■運動量空間におけるスカラー場の運動方程式 (32) の導出 実空間のスカラー場 $\phi(x) = \phi(x^+, x^-, \vec{x}_T)$ に対する Klein-Gordon 方程式は, 光錐座標を用いて

$$0 = (\partial^2 - m^2)\phi(x) = \left(-2 \frac{\partial}{\partial x^+} \frac{\partial}{\partial x^-} + \frac{\partial}{\partial x^I} \frac{\partial}{\partial x^I} - m^2 \right) \phi(x^+, x^-, \vec{x}_T)$$

と表される. これを式 (10.28) によって定義される, “空間” 座標に関する場の Fourier 変換 $\phi(x^+, p^+, \vec{p}_T)$ に対する式に翻訳すると

$$\begin{aligned} & \left(-2 \frac{\partial}{\partial x^+} (-ip^+) - p^I p^I - m^2 \right) \phi(x^+, p^+, \vec{p}_T) = 0, \\ \therefore & \left(i \frac{\partial}{\partial x^+} - \frac{1}{2p^+} (p^I p^I + m^2) \right) \phi(x^+, p^+, \vec{p}_T) = 0 : (32) \end{aligned}$$

となる.

計算練習 10.2

$$0 = p^2 + m^2 = -2p^+ p^- + p^I p^I + m^2, \quad \therefore p^- = \frac{1}{2p^+} (p^I p^I + m^2).$$

10.3 について

■Fourier 展開 (10.28) 式 (10.28) における p^+ は積分変数だから他の記号に置き換えても構わない. しかし

$$p \cdot x = -p^- x^+ - p^+ x^- + p^I x^I = p_+ x^+ + p_- x^- + p_I p^I$$

に注意すると $e^{-ix^+ p^+}$ が $e^{ip \cdot x}$ から現れるから, x^- の係数を $-p^+$ と書くのは理に合っている.

10.4 スカラー場の量子化と粒子状態

古典場の平面波解を，時間依存性 $e^{\mp iE_p t}$ を一般化して

$$\phi_p(t, \vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a(t)e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a^*(t)e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}})$$

と書く．ただし空間を各辺の長さが L_1, L_2, \dots, L_d の箱と想定しており， $V = L_1 L_2 \dots L_d$ はその体積である．箱に周期境界条件を課し，その下で許される \vec{p} のみを考える．さて，この ϕ_p について

$$\begin{aligned} \text{作用} \quad S &= \int dt \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} (\partial_0 \phi_p)^2 - \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi_p)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi_p^2 \right\}, \\ \text{エネルギー} \quad H &= \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} \pi_p^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi_p)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi_p^2 \right\} \end{aligned}$$

を評価すると

$$\begin{aligned} S &= \int dt \left\{ \frac{1}{2E_p} \dot{a}^*(t) \dot{a}(t) - \frac{1}{2} E_p a^*(t) a(t) \right\}, \\ H &= \frac{1}{2E_p} \dot{a}^*(t) \dot{a}(t) + \frac{1}{2} E_p a^*(t) a(t) \end{aligned}$$

となる．この作用に従う $a(t)$ の時間発展は

$$\ddot{a}(t) = -E_p^2 a(t), \quad \therefore a(t) = a_p e^{-iE_p t} + a_{-p}^* e^{iE_p t}$$

となることが確かめられ，このとき

$$H = E_p (a_p^* a_p + a_{-p}^* a_{-p})$$

となる．これは時間に依らない (エネルギー保存)．

実数座標 q_i とそれに共役な運動量 p_i を

$$a(t) = q_1(t) + i q_2(t), \quad p_i(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\dot{q}_i(t)}{E_p}$$

によって導入すると，量子論における自然な交換関係

$$[q_1(t), p_1(t)] = [q_2(t), p_2(t)] = i$$

は， a_p^*, a_p をそれぞれ生成・消滅演算子 a_p^\dagger, a_p と見なして

$$[a_p, a_k^\dagger] = \delta_{p,k}, \quad [a_p, a_k] = 0, \quad [a_p^\dagger, a_k^\dagger] = 0$$

とすると満たされる．これにより場とハミルトニアンは演算子

$$\begin{aligned} \phi_p(t, \vec{x}) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a_p e^{-iE_p t + i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a_p^\dagger e^{iE_p t - i\vec{p}\cdot\vec{x}}) + \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a_{-p} e^{-iE_p t - i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a_{-p}^\dagger e^{iE_p t + i\vec{p}\cdot\vec{x}}) \\ &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a_p e^{-iE_p t + i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a_p^\dagger e^{iE_p t - i\vec{p}\cdot\vec{x}}), \\ H &= E_p (a_p^\dagger a_p + a_{-p}^\dagger a_{-p}) \rightarrow \sum_{\vec{p}} E_p a_p^\dagger a_p. \end{aligned}$$

になる。さらにここでは運動量の表式を天下一りに与えておく：

$$\vec{P} = \sum_{\vec{p}} \vec{p} a_p^\dagger a_p.$$

状態を指定するのに \vec{p} の代わりに p^+ と \vec{p}_T を用いる (いずれも d 個の量)：

$$a_p \rightarrow a_{p^+, \vec{p}_T}, \quad a_p^\dagger \rightarrow a_{p^+, \vec{p}_T}^\dagger.$$

任意の消滅演算子を作用させると消失するような真空状態を $|\Omega\rangle$ で表すと、スカラー場の 1 粒子状態は

$$a_{p^+, \vec{p}_T}^\dagger |\Omega\rangle \quad (35)$$

と書かれる。このとき光錐エネルギーは式 (10.32)：

$$p^- = \frac{1}{2p^+} (p^I p^I + m^2)$$

のように定まることに注意して、光錐座標における記述を

$$\begin{aligned} \hat{p}^+ &= \sum_{p^+, \vec{p}_T} p^+ a_{p^+, \vec{p}_T}^\dagger a_{p^+, \vec{p}_T}, \\ \hat{p}^I &= \sum_{p^+, \vec{p}_T} p^I a_{p^+, \vec{p}_T}^\dagger a_{p^+, \vec{p}_T}, \\ \hat{p}^- &= \sum_{p^+, \vec{p}_T} \frac{1}{2p^+} (p^I p^I + m^2) a_{p^+, \vec{p}_T}^\dagger a_{p^+, \vec{p}_T} \end{aligned}$$

とする。

計算練習 10.3, 10.4

式 (10.33) の ϕ_p に対して

$$\partial_0 \phi_p = \frac{1}{\sqrt{2E_p V}} (\dot{a} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + \dot{a}^* e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}), \quad \vec{\nabla} \phi_p = \frac{i\vec{p}}{\sqrt{2E_p V}} (a e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} - a^* e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}})$$

である。

■計算練習 10.3 式 (10.33) の ϕ_p に対して

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} (\partial_0 \phi_p)^2 - \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi_p)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi_p^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{2E_p V} [\{\dot{a}^2 - (i\vec{p})^2 a^2 - m^2 a^2\} e^{2i\vec{p}\cdot\vec{x}} + \{\dot{a}^{*2} - (-i\vec{p})^2 a^{*2} - m^2 a^{*2}\} e^{-2i\vec{p}\cdot\vec{x}} \\ &\quad + \{2\dot{a}^* \dot{a} - 2(i\vec{p}) \cdot (-i\vec{p}) - 2m^2 a^* a\}], \\ \therefore S &= \int dt \frac{1}{2E_p} \{\dot{a}^* \dot{a} - (\vec{p}^2 + m^2) a^* a\} = \int dt \left(\frac{1}{2E_p} \dot{a}^* \dot{a} - \frac{1}{2} E_p a^* a \right) : (10.37) \end{aligned}$$

となる。

■計算練習 10.4 式 (10.33) の ϕ_p に対して

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \frac{1}{2}\pi_p^2 + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\phi_p)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi_p^2 \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{2E_pV}[\{\dot{a}^2 + (i\vec{p})^2a^2 + m^2a^2\}e^{2i\vec{p}\cdot\vec{x}} + \{\dot{a}^{*2} + (-i\vec{p})^2a^{*2} + m^2a^{*2}\}e^{-2i\vec{p}\cdot\vec{x}} \\ &\quad + \{2\dot{a}^* \dot{a} + 2(i\vec{p}) \cdot (-i\vec{p}) + 2m^2a^*a\}], \\ \therefore H &= \frac{1}{2E_p}\{\dot{a}^* \dot{a} + (\vec{p}^2 + m^2)a^*a\} = \frac{1}{2E_p}\dot{a}^* \dot{a} + \frac{1}{2}E_p a^*a : (10.38)\end{aligned}$$

となる。

計算練習 10.5

$$\begin{aligned}[q_2(t), p_2(t)] &= -\frac{1}{4E_p}\{-[a(t), \dot{a}^\dagger(t)] - [a^\dagger(t), \dot{a}(t)]\} = i, \\ [q_1(t), p_2(t)] &= \frac{1}{4iE_p}\{-[a(t), \dot{a}^\dagger(t)] + [a^\dagger(t), \dot{a}(t)]\} = 0, \\ [q_2(t), p_1(t)] &= \frac{1}{4iE_p}\{[a(t), \dot{a}^\dagger(t)] - [a^\dagger(t), \dot{a}(t)]\} = 0.\end{aligned}$$

計算練習 10.6, 10.7

$$P^i(a_{p_1}^\dagger \cdots a_{p_k}^\dagger |\Omega\rangle) = \sum_{\vec{q}} q^i a_q^\dagger a_q (a_{p_1}^\dagger \cdots a_{p_k}^\dagger |\Omega\rangle)$$

の右辺において, $n = 1, \dots, k$ に対して

$$a_q a_{p_n}^\dagger = a_{p_n}^\dagger a_q + [a_q, a_{p_n}^\dagger] = a_{p_n}^\dagger a_q + \delta_{qp_n}$$

を繰り返し用いて a_q を $|\Omega\rangle$ の左隣に移動すると

$$\begin{aligned}(\text{上式}) &= \sum_{\vec{q}} q^i a_q^\dagger (a_{p_1}^\dagger \cdots a_{p_k}^\dagger) a_q |\Omega\rangle + \sum_{n=1}^k \sum_{\vec{q}} q^i \delta_{qp_n} a_q^\dagger (a_{p_1}^\dagger \cdots \widehat{a_{p_n}} \cdots a_{p_k}^\dagger) |\Omega\rangle \\ &= \left(\sum_{n=1}^k p_n^i \right) (a_{p_1}^\dagger \cdots a_{p_k}^\dagger |\Omega\rangle)\end{aligned}$$

を得る ($\widehat{a_{p_n}}$ は a_{p_n} を除外することを意味する). よって k 個の粒子を含む状態 $a_{p_1}^\dagger \cdots a_{p_k}^\dagger |\Omega\rangle$ における \vec{P} の固有値は $\sum_{n=1}^k \vec{p}_n$ である.

H の固有値が $\sum_{n=1}^k E_{p_n}$ となること

$$H(a_{p_1}^\dagger \cdots a_{p_k}^\dagger |\Omega\rangle) = \left(\sum_{n=1}^k E_{p_n} \right) (a_{p_1}^\dagger \cdots a_{p_k}^\dagger |\Omega\rangle)$$

および N の固有値は粒子数 k となること

$$N(a_{p_1}^\dagger \cdots a_{p_k}^\dagger |\Omega\rangle) = k(a_{p_1}^\dagger \cdots a_{p_k}^\dagger |\Omega\rangle)$$

も同様に示される。

10.4 について

■添字を $p \rightarrow \vec{p}$ と改めること $E_p \equiv \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$: (10.17) は、したがって式 (10.33) で定義される ϕ_p や式 (10.44) で導入される a_p, a_p^* は \vec{p} のみによって指定されるから、それぞれ

$$E_{\vec{p}}, \quad \phi_{\vec{p}}, \quad a_{\vec{p}}, \quad a_{\vec{p}}^*$$

と書いて良い。このことから

- 「式 (10.57) の 2 行目は、1 行目に対して $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$ という置き換えを施すことによって得られ」 (p.200 下から 4,3 行) ること
- 「各振動子を \vec{p} によって識別」 (p.202, 1.15,16) していること

が分かる。

■ H の式 (10.45) について $\dot{a}(t) = -iE_p(a_p e^{-iE_p t} - a_{-p}^* e^{iE_p t})$ より

$$\begin{aligned} \dot{a}^*(t)\dot{a}(t) &= E_p^2 \{ (a_p^* a_p + a_{-p}^* a_{-p}) - (a_p a_{-p} e^{-2iE_p t} + a_{-p}^* a_p^* e^{2iE_p t}) \}, \\ a^*(t)a(t) &= (a_p^* a_p + a_{-p}^* a_{-p}) + (a_p a_{-p} e^{-2iE_p t} + a_{-p}^* a_p^* e^{2iE_p t}) \end{aligned}$$

となる。これを H の式 (10.38) に代入すれば良い。

■運動量 (10.46) について 問題 8.1 (pp.171–172) におけるエネルギー・運動量テンソル

$$T^{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi^a)} \partial^\beta \phi^a - g^{\alpha\beta} \mathcal{L}$$

に対する保存則 $\partial_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$ の導出は文献 [6, pp.39–42] に与えられている。チャージ

$$P^\alpha = \int d^d x T^{0\alpha} = \int d^d x (\pi^a \partial^\alpha \phi^a - g^{0\alpha} \mathcal{L})$$

は $\alpha = 0$ とするとハミルトニアンを与え、 α を空間成分にとるとスカラー場に対して運動量 (10.46) を与える。

■「エネルギーは保存する」 (p.199, 1.16) について ハミルトニアン (10.45) における $a_{\pm p}^*, a_{\pm p}$ が生成・消滅演算子に置き換えられると、これらは状態に作用して系のエネルギーを変化させ得るけれど、ハミルトニアンは時間に依らないため、その固有値である各状態でのエネルギーは保存している。

■交換関係 (10.50) について 6 つの交換子

$$[a, a^\dagger], \quad [a, \dot{a}], \quad [a, \dot{a}^\dagger], \quad [a^\dagger, \dot{a}], \quad [a^\dagger, \dot{a}^\dagger], \quad [\dot{a}, \dot{a}^\dagger]$$

の値を調べれば十分である。例えば

$$[a(t), \dot{a}^\dagger(t)] = iE_p ([a_p, a_p^\dagger] - [a_{-p}^\dagger, a_{-p}]) = 2iE_p$$

である。

■ q_i と p_j の交換関係 (10.51) の意味 式 (10.39), 式 (10.41) によって導入した座標 q_i と運動量 p_i に対する交換関係 (10.51):

$$[q_1(t), p_1(t)] = i, \quad \text{etc.}$$

は, 振動子の演算子に対する交換関係 (10.59) を通して正準交換関係

$$[\phi(t, \vec{x}), \Pi(t, \vec{x}')] = i\delta^d(\vec{x} - \vec{x}')$$

と等価であることが示される (問題 10.2(p.209) 参照).

■ 座標と運動量の式 (10.53), (10.54) について 実変数 $q_i(t), p_i(t)$ は Hermite 演算子になると考えて

$$\begin{aligned} a = q_1 + iq_2 &\Rightarrow a^\dagger = q_1 - iq_2, \\ \frac{1}{E_p} \dot{a} = p_1 + ip_2 &\Rightarrow \frac{1}{E_p} \dot{a}^\dagger = p_1 - ip_2 \end{aligned}$$

とする. あるいは a, a^* を演算子 a, a^\dagger に置き換える前に式 (10.39) と式 (10.41) を $q_i(t), p_i(t)$ について解いておけば良い.

■ 負エネルギーについて 「量子場の演算子は正エネルギー成分と負エネルギー成分を両方とも含んでいるが, 粒子を表す状態は正のエネルギーを持つ」 (p.201 下から 6,5 行) に注目.

10.5 Maxwell 場と光子状態

(自由な) 電磁場の方程式とゲージ変換

$$\begin{aligned} 0 = \partial_\nu F^{\mu\nu} &= -\{\partial^2 A^\mu - \partial^\mu(\partial \cdot A)\}, \\ A_\mu &\rightarrow A_\mu + \delta A_\mu, \quad A_\mu = \partial_\mu \varepsilon \end{aligned}$$

は, 電磁ポテンシャル A^μ とゲージパラメーター ε を

$$\begin{aligned} A^\mu(x) &= \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{ip \cdot x} A^\mu(p), \quad A^\mu(-p) = (A^\mu(p))^*, \\ \varepsilon(x) &= \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{ip \cdot x} \varepsilon(p), \quad \varepsilon(-p) = \varepsilon^*(p) \end{aligned}$$

と Fourier 展開すると, それぞれ

$$p^2 A^\mu - p^\mu(p \cdot A) = 0, \quad \delta A_\mu(p) = ip_\mu \varepsilon(p)$$

となる.

ここで光錐ゲージの条件

$$A^+(p) = 0$$

を課す. ゲージパラメーターを $\varepsilon(p) = iA^+(p)/p^+$ と選んでゲージ変換を行えば, この条件を満たす電磁ポテンシャルをとることができる:

$$A^+(p) \rightarrow A^+(p) + ip^+ \varepsilon(p) = 0.$$

光錐ゲージにおいて $p^+ \neq 0$ を仮定すると, 運動方程式

$$p^2 A^\mu - p^\mu(p \cdot A) = 0$$

は $\mu = +$ に対して

$$0 = p \cdot A = -p^+ A^- + p^I p^I, \quad \therefore A^- = \frac{1}{p^+} p^I A^I$$

となる。この $p \cdot A = 0$ を運動方程式にもどすと

$$p^2 A^\mu = 0$$

を得る。よって $p^2 \neq 0$ のとき $A^\mu(p) = 0$ であり、 $p^2 = 0$ のとき $D - 2$ 個の成分 A^I によって A^- が決まる。Maxwell 場は質量殻 $p^2 = 0$ 上の各点あたりに $(D - 2)$ 個の自由度を持つ。 $(D = 4)$ 次元時空における自由度は 2 であり、これは決まった波数で特徴付けられる電磁平面波が相互に独立な 2 種類の偏光状態を持つことに対応する。)

最後に光子状態について簡単に論じる。Maxwell 場 $A^I(p)$ は質量のないスカラー場の運動方程式 $p^2 A^I = 0$ に従う。ここでは生成・消滅演算子となる場 $A^I(p)$ の展開係数 $a_{p^+, \vec{p}_T}^{I\dagger}, a_{p^+, \vec{p}_T}^I$ が横方向の添字 I を持つため、スカラー場の 1 粒子状態 (35) の代わりに 1 光子状態

$$a_{p^+, \vec{p}_T}^{I\dagger} |\Omega\rangle$$

が得られる。ここで添字 I は偏光状態を表す指標となる。運動量 p^+, \vec{p}_T を持つ一般の 1 光子状態は

$$\sum_{I=2}^{D-1} \xi_I a_{p^+, \vec{p}_T}^{I\dagger} |\Omega\rangle \quad (36)$$

という形をとる。ここに横方向ベクトル ξ_I は偏光ベクトルと呼ばれる。

10.5 について

■ 運動方程式 (10.72) について $\partial_\mu e^{ip \cdot x} = ip_\mu e^{ip \cdot x}$ より

$$\begin{aligned} \partial^2 \{e^{ip \cdot x} A^\mu(p)\} &= \partial_\nu \partial^\nu \{e^{ip \cdot x} A^\mu(p)\} = (ip_\nu)(ip^\nu) \{e^{ip \cdot x} A^\mu(p)\} = -p^2 A^\mu(p) e^{ip \cdot x}, \\ \partial^\mu \partial \cdot \{e^{ip \cdot x} A(p)\} &= \partial^\mu \partial_\nu \{e^{ip \cdot x} A^\nu(p)\} = (ip^\mu)(ip_\nu) \{e^{ip \cdot x} A^\nu(p)\} = -p^\mu (p \cdot A) e^{ip \cdot x} \end{aligned}$$

となる。

■ 「前にも強調したように、光錐形式…… $p^+ \neq 0$ を仮定する」(p.204, l.1,2) について p.185 参照。

■ 「この場合は $p^+ \varepsilon(p) = 0$ となる」(p.204, l.13) について

$$p^+ \varepsilon(p) = \varepsilon(p^-, p^I) \times p^+ \delta(p^+)$$

は $p^+ = 0$ のときゼロであり、 $p^+ \neq 0$ に対しても $\delta(p^+) = 0$ となるからゼロである。よって A^+ の変換 (10.77) は $A'^+ = A^+ (= 0)$ となる。

■ 「 X^+ ……ゼロモード規準位置と振動はゼロになる」(p.204, l.15,16) について 光錐ゲージの式 (9.62) および X^+ の式 (9.70) 参照。

■ 「式 (10.83) は質量のないスカラー場の運動方程式の形を取る」(p.204 下から 2 行目) について 式 (10.24): $(p^2 + m^2)\phi(p) = 0$ 参照。

■ 「 $p^2 \neq 0$ において自由度がないことは、……」 (p.205, 1.5) で始まる段落 ここでは $p^2 \neq 0$ のとき場 A_μ はゼロ場とゲージ等価である，すなわちゲージ変換によって $A_\mu = 0$ とでき，それ故，自由度を持たないことが示されている．

10.6 重力場と重力子状態

注意 3.6 節の箇所で述べたように，線形化された Einstein 方程式 (3.82) には付加的な項が現れると考えられる．しかしここではひとまず式 (3.82) が正しいと仮定して，教科書の通りにまとめる．次いで続く「10.6 について」にて，Einstein 方程式を訂正しても主要な結論に影響はないことを確かめる．

$$\text{線形化された Einstein 方程式 (8.32): } \partial^2 h^{\mu\nu} - \partial_\alpha (\partial^\mu h^{\nu\alpha} + \partial^\nu h^{\mu\alpha}) + \partial^\mu \partial^\nu h = 0,$$

$$\text{ゲージ変換 (3.84): } \delta h^{\mu\nu} = \delta_0 h^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu \varepsilon^\nu + \partial^\nu \varepsilon^\mu$$

は， $h^{\mu\nu}(x)$ と $\varepsilon^\mu(x)$ の Fourier 変換 $h^{\mu\nu}(p), \varepsilon^\mu(p)$ に対する式

$$\begin{aligned} S^{\mu\nu}(p) &\equiv p^2 h^{\mu\nu} - p_\alpha (p^\mu h^{\nu\alpha} + p^\nu h^{\mu\alpha}) + p^\mu p^\nu h = 0, \\ \delta_0 h^{\mu\nu}(p) &= i p^\mu \varepsilon^\nu(p) + i p^\nu \varepsilon^\mu(p) \end{aligned}$$

になる．

ゲージパラメーター ε^μ を適当に選んでゲージ変換を行えば，光錐ゲージ条件

$$h^{+\mu} = 0, \quad \mu = +, -, I$$

を満たすような $h^{\mu\nu}$ をとれる．光錐ゲージにおいて $p^+ = 0$ が仮定される．このとき運動方程式は

$$0 = S^{++}(p) = (p^+)^2 h, \quad \therefore 0 = h = \eta_{\mu\nu} h^{\mu\nu} = h^{II}$$

となる．この $h = 0$ を $S^{+\nu}(p) = 0$ に代入すると

$$p_\alpha h^{\nu\alpha} = 0$$

が得られ，さらにこれを $S^{\mu\nu}(p) = 0$ にもどすと

$$p^2 h^{\mu\nu} = 0$$

を得る．よって $p^2 \neq 0$ のとき $h^{\mu\nu} = 0$ である． $p^2 = 0$ のとき，対角和がゼロになる条件 $h^{II} = 0$ と対称性 $h^{IJ} = h^{JI}$ の下で h^{IJ} は

$$n(D) = \frac{1}{2} D(D-3) \tag{10.108}$$

個の独立な成分を持つ [本稿次節で補足しつつ確認]．そして $p_\alpha h^{\nu\alpha} = 0$ によれば，横方向成分 h^{IJ} を決めると

$$h^{I-} = \frac{1}{p^+} p_J h^{IJ}$$

によって h^{I-} が決まり，

$$h^{--} = \frac{1}{p^+} p_I h^{-I}$$

によって h^{--} が決まる。以上で光錐ゲージ条件 $h^{+\mu} = 0$ において残された自由度を担う量 (h^{IJ}, h^{I-}, h^{--}) の全てが決まる。古典的な重力波は質量殻 $p^2 = 0$ 上の各点あたりに $n(D)$ 個の自由度を持つ。

独立な古典場 $h^{IJ}(p)$ はここでも質量のないスカラー場の方程式 $p^2 h^{IJ}(p) = 0$ に従い、その展開係数 $a_{p^+, \vec{p}_T}^{IJ\dagger}, a_{p^+, \vec{p}_T}^{IJ}$ は 2 つの横方向添字 I, J を持つ。1 粒子の基本状態は

$$a_{p^+, \vec{p}_T}^{IJ\dagger} |\Omega\rangle$$

という形をとり、運動量 (p^+, \vec{p}_T) を持つ 1 重力子状態は

$$\sum_{I, J=2}^{D-1} \xi_{IJ} a_{p^+, \vec{p}_T}^{IJ\dagger} |\Omega\rangle \quad (\xi_{II} = 0) \quad (37)$$

と表される。 ξ_{IJ} は重力子の偏極テンソルと呼ばれ、対角和が $\xi_{II} = 0$ の対称テンソルを形成し、 $n(D)$ 個の自由度を担う。

10.6 について

■Einstein 方程式 (3.82) の訂正に伴う変更 3.6 節の箇所で述べたように、線形化された Einstein 方程式 (3.82):

$$\partial^2 h^{\mu\nu} - \partial_\alpha (\partial^\mu h^{\nu\alpha} + \partial^\nu h^{\mu\alpha}) + \partial^\mu \partial^\nu h = 0$$

の左辺には付加的な項 $\eta^{\mu\nu} (\partial^\alpha \partial^\beta h_{\alpha\beta} - \partial^2 h)$ を補う必要があると考えられる。このとき場の Fourier 成分 $h^{\mu\nu}(p)$ についての対応する式 (10.89) は

$$\{p^2 h^{\mu\nu} - p_\alpha (p^\mu h^{\nu\alpha} + p^\nu h^{\mu\alpha}) + p^\mu p^\nu h\} + \eta^{\mu\nu} (p^\alpha p^\beta h_{\alpha\beta} - p^2 h) = 0$$

に修正される。しかしこのときにも光錐ゲージ条件 (10.98) の下で、やはり

$$h = 0 : (10.100), \quad h^{II} = 0 : (10.101)$$

が成立する。また式 (10.102) は

$$\{p^2 h^{\mu\nu} - p^\mu (p_\alpha h^{\nu\alpha}) - p^\nu (p_\alpha h^{\mu\alpha})\} + \eta^{\mu\nu} p^\alpha p^\beta h_{\alpha\beta} = 0 \quad (38)$$

に置き換わるけれど、ここで $\mu = +$ または $\nu = +$ と置いて得られる 2 式

$$p^+ p_\alpha h^{\nu\alpha} + \eta^{+\nu} p^\alpha p^\beta h_{\alpha\beta} = 0, \quad -p^+ p_\alpha h^{\mu\alpha} + \eta^{\mu+} p^\alpha p^\beta h_{\alpha\beta} = 0$$

を辺々引くと再び式 (10.103): $p_\alpha h^{\nu\alpha} = 0$ を得る。さらにこれを上式 (38) に戻せば、光錐ゲージの下での運動方程式として式 (10.104):

$$p^2 h^{\mu\nu} = 0$$

が導かれる。よって以降の教科書の議論はそのまま成り立つ。

■ $n(D)$ の式 (10.108) について 行列 (h^{IJ}) の上三角要素と対角要素の合計数は

$$1 + 2 + \cdots + (D-2) = \frac{1}{2}(D-1)(D-2)$$

である (行列 (h^{IJ}) の $k (= 1, 2, \dots, D-2)$ 行目に考えている要素は $D-k+1$ 個含まれる). 対角和がゼロとなる条件から, 独立な要素の個数が 1 だけ減少する. よって式 (10.108):

$$n(D) = \frac{1}{2}(D-2)(D-1) - 1 = \frac{1}{2}D(D-3)$$

を得る.

問題 (第 10 章)

問題 10.1 古典的なスカラー場の運動量

10.4 節 (p.199 下から 14,13 行目) で言及されている問題 10.1 を解く.

$$\begin{aligned} \vec{P} &= - \int d^d x (\partial_0 \phi) \vec{\nabla} \phi : (10.46) \\ &= - \frac{1}{2E_p} \frac{1}{V} \int d^d x (\dot{a} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + \dot{a}^* e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}) (i\vec{p}) (a e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} - a^* e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}) \\ &= - \frac{i\vec{p}}{2E_p} (\dot{a}^* a - a^* \dot{a}) \end{aligned}$$

において

$$\begin{aligned} \dot{a}^* a &= iE_p (a_p^* e^{iE_p t} - a_{-p} e^{-iE_p t}) (a_p e^{-iE_p t} + a_{-p}^* e^{iE_p t}) \\ &= iE_p (a_p^* a_p - a_{-p}^* a_{-p} + a_p^* a_{-p}^* e^{2iE_p t} - a_p a_{-p} e^{-2iE_p t}), \\ a^* \dot{a} &= -iE_p (a_p^* e^{iE_p t} + a_{-p} e^{-iE_p t}) (a_p e^{-iE_p t} - a_{-p}^* e^{iE_p t}) \\ &= -iE_p (a_p^* a_p - a_{-p}^* a_{-p} - a_p^* a_{-p}^* e^{2iE_p t} + a_p a_{-p} e^{-2iE_p t}) \end{aligned}$$

なので

$$\vec{P} = - \frac{i\vec{p}}{2E_p} \times 2iE_p (a_p^* a_p - a_{-p}^* a_{-p}) = \vec{p} (a_p^* a_p - a_{-p}^* a_{-p}) : (10.47)$$

を得る.

問題 10.2 量子スカラー場の交換子

10.4 節に関する問題 10.2 を解く.

(a)

$$\frac{1}{V} \int d^d x' f(\vec{x}') e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}'} = \sum_{\vec{k}} f(\vec{k}) \frac{1}{V} \int d^d x' e^{-i(\vec{p}-\vec{k})\cdot\vec{x}'} = \sum_{\vec{k}} f(\vec{k}) \delta_{\vec{p},\vec{k}} = f(\vec{p}) : (2).$$

これを式 (1): $f(\vec{x}) = \sum_{\vec{p}} f(\vec{p}) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}$ に代入して

$$f(\vec{x}) = \int d^d x' \left(\frac{1}{V} \sum_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} \right) f(\vec{x}'), \quad \therefore \delta^d(\vec{x}-\vec{x}') = \frac{1}{V} \sum_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}$$

を得る. あるいは式 (1), 式 (2) で $f(\vec{x}) = \delta^d(\vec{x})$ とおけば, 再び $\delta^d(\vec{x}) = \frac{1}{V} \sum_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}$ を得る.

(b)

スカラー場 ϕ の Fourier 展開 (10.58) より

$$\Pi(t, \vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}} \frac{iE_p}{\sqrt{2E_p}} (-a_p e^{-iE_p t + i\vec{p} \cdot \vec{x}} + a_p^\dagger e^{iE_p t - i\vec{p} \cdot \vec{x}})$$

なので

$$\begin{aligned} [\phi(t, \vec{x}), \Pi(t, \vec{x}')] &= \frac{i}{2V} \sum_{\vec{p}, \vec{k}} \sqrt{\frac{E_k}{E_p}} \left[a_p e^{-iE_p t + i\vec{p} \cdot \vec{x}} + a_p^\dagger e^{iE_p t - i\vec{p} \cdot \vec{x}}, -a_k e^{-iE_k t + i\vec{k} \cdot \vec{x}'} + a_k^\dagger e^{iE_k t - i\vec{k} \cdot \vec{x}'} \right] \\ &= i \frac{1}{V} \sum_{\vec{p}} \left\{ e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} + e^{-i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} \right\} \quad (\because \text{交換関係 (10.59)}) \\ &= i\delta^d(\vec{x} - \vec{x}'). \end{aligned}$$

問題 10.3 Lorentz テンソルの光錐成分

この問題は 11.5 節で言及される。

(a)

$$\begin{aligned} A^\mu &= B^\mu \\ \Rightarrow A^\pm &= \frac{A^0 \pm A^1}{\sqrt{2}} = \frac{B^0 \pm B^1}{\sqrt{2}} = B^\pm, \quad A^I = B^I. \end{aligned}$$

(b)

Lorentz 添字 $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ を持つテンソル $R^{\mu\nu} = A^\mu B^\nu$ に対して, $R^{\mu\nu} = A^\mu B^\nu$ が μ, ν を光錐成分 \pm, I にとっても成り立つことを要求すると

$$\begin{aligned} R^{\pm\pm} &= A^\pm B^\pm = \frac{A^0 \pm A^1}{\sqrt{2}} \frac{B^0 \pm B^1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \{ A^0 B^0 \pm A^0 B^1 \pm A^1 B^0 + (\pm 1)(\pm 1) A^1 B^1 \} \\ &= \frac{1}{2} \{ R^{00} \pm R^{01} \pm R^{10} + (\pm 1)(\pm 1) R^{11} \} \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} R^{++} &= \frac{1}{2} (R^{00} + R^{01} + R^{10} + R^{11}), \\ R^{+-} &= \frac{1}{2} (R^{00} - R^{01} + R^{10} - R^{11}), \\ R^{-+} &= \frac{1}{2} (R^{00} + R^{01} - R^{10} - R^{11}), \\ R^{--} &= \frac{1}{2} (R^{00} - R^{01} - R^{10} + R^{11}) \end{aligned}$$

を得る. 同様に

$$R^{\pm I} = \frac{1}{\sqrt{2}} (R^{0I} \pm R^{1I}), \quad R^{I\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (R^{I0} \pm R^{I1})$$

を得る。以上より Lorentz テンソルの等式関係 $R^{\mu\nu} = S^{\mu\nu}$ は光錐成分の等式関係

$$R^{++} = \frac{1}{2}(R^{00} + R^{01} + R^{10} + R^{11}) = \frac{1}{2}(S^{00} + S^{01} + S^{10} + S^{11}) = S^{++}, \quad \text{etc.}$$

を含意している。

なお、光錐座標への変換

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu, \quad x'^+ = \frac{x^0 + x^1}{\sqrt{2}}, \quad x'^- = \frac{x^0 - x^1}{\sqrt{2}}$$

に対して

$$(a'^\mu{}_\nu) \equiv \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であり (ただし例えば右下の 1 は $(D-2) \times (D-2)$ の単位行列を表す), 上で得た光錐成分の表式はテンソルの変換則

$$R'^{\mu\nu} = a'^\mu{}_\rho a'^\nu{}_\sigma R^{\rho\sigma}$$

に他ならない。

(c)

小問 (b) の関係は計量テンソルの正しい光錐成分

$$\begin{aligned} \eta^{\pm\pm} &= \frac{1}{2}(\eta^{00} + \eta^{11}) = \frac{1}{2}\{(-1) + 1\} = 0, \\ \eta^{\pm\mp} &= \frac{1}{2}(\eta^{00} - \eta^{11}) = \frac{1}{2}\{(-1) + (-1)\} = -1, \\ \eta^{\pm I} &= \eta^{I\pm} = 0 \end{aligned}$$

を与える。

(d)

$$\begin{aligned} F^{\pm\pm} &= 0, \\ F^{\pm\mp} &= \mp F^{01} = \mp E_x, \\ F^{\pm I} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(F^{0I} \pm F^{1I}) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}(E_y \pm B_z) & (I=2) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(E_z \pm (-B_y)) & (I=3) \end{cases}, \\ F^{I\pm} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(F^{I0} \pm F^{I1}) = -F^{\pm I}. \end{aligned}$$

以上のように, $F^{\mu\nu}$ は添字を光錐成分に選んだ場合にも反対称となる。

問題 10.6 Kalb-Ramond 場 $B_{\mu\nu}$ に対する場の方程式と粒子状態

13.3 節や 16.1 節で言及されている問題 10.6 を解く。

Kalb-Ramond 場 $B_{\mu\nu}(= -B_{\nu\mu})$ は質量を持たない反対称ゲージ場であり, Maxwell ゲージ場 (電磁場) A_μ の類似物にあたる。

$$\begin{aligned}
H_{\mu\nu\rho} &\equiv \frac{\partial_\mu B_{\nu\rho}}{\textcircled{1}} + \frac{\partial_\nu B_{\rho\mu}}{\textcircled{2}} + \frac{\partial_\rho B_{\mu\nu}}{\textcircled{3}} \\
\left\{ \begin{aligned}
H_{\nu\mu\rho} &\equiv \frac{\partial_\nu B_{\mu\rho}}{-\textcircled{2}} + \frac{\partial_\mu B_{\rho\nu}}{-\textcircled{1}} + \frac{\partial_\rho B_{\nu\mu}}{-\textcircled{3}} \\
H_{\mu\rho\nu} &\equiv \frac{\partial_\mu B_{\rho\nu}}{-\textcircled{1}} + \frac{\partial_\rho B_{\nu\mu}}{-\textcircled{3}} + \frac{\partial_\nu B_{\mu\rho}}{-\textcircled{2}} \\
H_{\rho\nu\mu} &\equiv \frac{\partial_\rho B_{\nu\mu}}{-\textcircled{3}} + \frac{\partial_\nu B_{\mu\rho}}{-\textcircled{2}} + \frac{\partial_\mu B_{\rho\nu}}{-\textcircled{1}}
\end{aligned} \right.
\end{aligned}$$

図 26 Kalb-Ramond 場の強度 $H_{\mu\nu\rho}$ の添字に関する完全反対称性

(a) 電磁場の強度 (電磁テンソル) $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ の対応物として場の強度

$$H_{\mu\nu\rho} = \partial_\mu B_{\nu\rho} + \partial_\nu B_{\rho\mu} + \partial_\rho B_{\mu\nu}$$

を定義すると, これは添字に関して完全反対称であることを確かめられる (図 26 参照).

また Kalb-Ramond 場 $B_{\mu\nu}$ のゲージ変換を

$$\delta B_{\mu\nu} = \partial_\mu \varepsilon_\nu - \partial_\nu \varepsilon_\mu$$

とすると*7, これに対して

$$\delta H_{\mu\nu\rho} = \partial_\mu (\cancel{\partial_\nu \varepsilon_\rho} - \cancel{\partial_\rho \varepsilon_\nu}) + \partial_\nu (\cancel{\partial_\rho \varepsilon_\mu} - \cancel{\partial_\mu \varepsilon_\rho}) + \partial_\rho (\cancel{\partial_\mu \varepsilon_\nu} - \cancel{\partial_\nu \varepsilon_\mu}) = 0$$

となり, $H_{\mu\nu\rho}$ はゲージ不変に保たれる.

(b) ゲージパラメーターを

$$\varepsilon_\mu \rightarrow \varepsilon'_\mu = \varepsilon_\mu + \partial_\mu \lambda$$

と置き換えても

$$\delta B_{\mu\nu} \rightarrow \delta B_{\mu\nu} + (\partial_\mu \partial_\nu - \partial_\nu \partial_\mu) \lambda = \delta B_{\mu\nu}$$

となって, 生成されるゲージ変換は変わらない (ゲージ変換自体の不変性).

(c) 運動量空間に移ると $\varepsilon'_\mu = \varepsilon_\mu + ip_\mu \lambda$ なので, 常套的に $p^+ \neq 0$ を仮定し $\lambda = i\varepsilon^+/p^+$ と選んでパラメーターを変更すれば, $\varepsilon^+(p) = 0$ と設定できる. したがって, Kalb-Ramond 場の実効的なゲージ対称性は, ゲージパラメーター $\varepsilon^I(p)$ と $\varepsilon^-(p)$ によって生成される.

(d) Kalb-Ramond 場に対する作用を

$$S \sim \int d^D x \left(-\frac{1}{6} H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho} \right)$$

*7 Kalb-Ramond 場 $B_{\mu\nu}$ は添字に関して反対称なので, ゲージ変換に伴う変化量 $\delta B_{\mu\nu}$ も同じく反対称性を持たなければならない. 右辺 $\partial_\mu \varepsilon_\nu - \partial_\nu \varepsilon_\mu$ は実際にこの性質を満たしている.

とし、最小作用原理を考える。

$$\begin{aligned}
\delta(H_{\mu\nu\rho}H^{\mu\nu\rho}) &= 2H^{\mu\nu\rho}\delta H_{\mu\nu\rho} \\
&= 2H^{\mu\nu\rho}(\partial_\mu\delta B_{\nu\rho} + \partial_\nu\delta B_{\rho\mu} + \partial_\rho\delta B_{\mu\nu}) \\
&= 6H^{\mu\nu\rho}\partial_\mu\delta B_{\nu\rho}, \\
\delta \int d^Dx \left(-\frac{1}{6}H_{\mu\nu\rho}H^{\mu\nu\rho} \right) &= - \int d^Dx H^{\mu\nu\rho}\partial_\mu\delta B_{\nu\rho} \\
&= \int d^Dx (\partial_\mu H^{\mu\nu\rho})\delta B_{\nu\rho} \\
&= \int d^Dx (\partial_\rho H^{\mu\nu\rho})\delta B_{\mu\nu}
\end{aligned}$$

であり (式 (16.8) と比較せよ), 最右辺において変分 $\delta B_{\mu\nu}$ は反対称なので, $\partial_\rho H^{\mu\nu\rho}$ の反対称部分をゼロと置かなければならない (問題 16.2 参照). ところが $\partial_\rho H^{\mu\nu\rho}$ は添字 μ, ν について反対称であり, 反対称部分は自分自身に一致するので, 場の方程式として

$$0 = \partial_\rho H^{\mu\nu\rho} = \partial_\rho(\partial^\mu B^{\nu\rho} + \partial^\nu B^{\rho\mu} + \partial^\rho B^{\mu\nu})$$

を得る. (式 (16.14) と比較せよ. また自由電磁場に対する方程式 $\partial_\nu F^{\mu\nu} = 0$ との類似性にも注目する.) 運動量空間に移ると

$$p_\rho p^\mu B^{\nu\rho} + p_\rho p^\nu B^{\rho\mu} + p^2 B^{\mu\nu} \quad (39)$$

となる.

(e) 光錐ゲージ条件は $B^{+\mu} (= -B^{\mu+}) = 0$ と考えるのが自然であり, $B^{\mu\nu}$ の反対称性より $B^{++} = 0$ であることに注意すると,

$$B^{+-} = 0, \quad B^{+I} = 0$$

を要求すれば充分である. 小問 (c) の結果を念頭に $\varepsilon^+(p) = 0$ とするとゲージ変換は

$$\delta B^{+-} = ip^+ \varepsilon^-, \quad \delta B^{+I} = ip^+ \varepsilon^I$$

となる. よって再び $p^+ \neq 0$ を仮定し, $\varepsilon^- = -B^{+-}/ip^+, \varepsilon^I = -B^{+I}/ip^+$ と選んでゲージ変換を行えば, 光錐ゲージ条件を満たすことができる.

上式 (39) において $\mu = +$ とおくと, 光錐ゲージの下で

$$p^+(p_\rho B^{\nu\rho}) = 0, \quad p_\rho B^{\nu\rho} = 0 \quad (40)$$

となる ($p^+ \neq 0$). これを式 (39) に戻すと

$$p^2 B^{\mu\nu} = 0$$

を得る. 光錐ゲージの下でゼロでない場の成分は $B^{-I} (= -B^{I-})$ と B^{IJ} に限られる ($B^{--} = 0$). ところが, さらに式 (40) において $\nu = I$ とおくと

$$p_- B^{I-} + p_J B^{IJ} = 0, \quad \therefore B^{I-} = \frac{p_J}{p^+} B^{IJ}$$

となるので ($p^+ \neq 0$), 真に独立な成分は B^{IJ} (ただし $I > J$) によって担われる.

(f) 以上より真空状態を $|\Omega\rangle$ とし、添字に関して反対称な量 ζ_{IJ} を導入すると、運動量 (p^+, p_T) を持つ Kalb-Ramond 場の 1 粒子状態は

$$\sum_{I,J} \zeta_{IJ} a_{p^+, p_T}^{IJ\dagger} |\Omega\rangle$$

の形に表される.

問題 10.7 質量を持つベクトル場

15.3 節 (p.338) で言及されている問題 10.7 を解く.

(a) ラグランジアン密度

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu - \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) + mA^\mu \partial_\mu \phi$$

の右辺第 1 項は無限小ゲージ変換 $\delta A_\mu = \partial_\mu \varepsilon$ に対して不変であることに注意すると

$$\delta \mathcal{L} = -m^2 (\partial_\mu \varepsilon) A^\mu - (\partial_\mu \delta \phi)(\partial^\mu \phi) + m\{(\partial^\mu \varepsilon)(\partial_\mu \phi) + A^\mu (\partial_\mu \delta \phi)\}$$

なので, $\delta \phi = m\varepsilon$ と変換すればラグランジアン密度はゲージ不変に保たれる ($\delta \mathcal{L} = 0$).

(b)

$$\begin{aligned} \partial_\nu \left\{ \frac{\partial}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} \left(-\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) \right\} &= \partial_\nu F^{\mu\nu} = \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) - \partial_\nu \partial^\nu A^\mu \\ \frac{\partial}{\partial A_\mu} \left(-\frac{1}{2} m^2 A_\alpha A^\alpha + mA^\alpha \partial_\alpha \phi \right) &= -m^2 A^\mu + m \partial_\mu \phi \end{aligned}$$

なので, Euler-Lagrange 方程式 $\partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu}$ はゲージ場 A_μ に対する方程式

$$\partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) - \partial_\nu \partial^\nu A^\mu + m^2 A^\mu - m \partial_\mu \phi = 0 \quad (41)$$

を与える. また実スカラー場 ϕ に対する方程式は

$$0 = \partial_\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\lambda \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -\partial_\lambda \partial^\lambda \phi + m \partial_\lambda A^\lambda \quad (42)$$

となる.

(c) 小問 (a) で見出された変換則 $\delta \phi = m\varepsilon$ により, ゲージ変換によって $\phi = 0$ と設定することができる. このとき式 (41) はいわゆる Proca 方程式

$$\partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) - \partial_\nu \partial^\nu A^\mu + m^2 A^\mu = 0 \quad (43)$$

に簡約され, 式 (42) はゲージ場 A^λ に対する付加条件

$$\partial_\lambda A^\lambda = 0 \quad (44)$$

に帰す. $m \neq 0$ であれば, 式 (43) の発散をとることで再び式 (44) が得られることから, 式 (43) と式 (43) の整合性が見て取れる. 最後に式 (44) を用いると, 式 (43) はさらに

$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu - m^2 A^\mu = 0$$

と簡約される [1, p.440].

(d) 運動量空間に移ると

$$(p^2 + m^2)A^\mu(p) = 0$$

なので, $p^2 \neq -m^2$ に対しては自明な解 $A^\mu(p) = 0$ しか得られない. $p^2 = -m^2$ を満たす各 p^μ に対しては, 一見すると $A^\mu(p)$ は Lorentz 添字 μ の個数 D だけの自由度を持つようであるが, 実際には条件 (44) のために自由度は $D - 1$ となる.

第 11 章 点粒子の光錐量子化

11.1 光錐粒子

相対論的な点粒子に対して，作用 S と運動方程式は

$$S = \int L d\tau, \quad L = -m\sqrt{-\dot{x}^2},$$

$$\therefore p_\mu \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{m\dot{x}_\mu}{\sqrt{-\dot{x}^2}}, \quad \frac{dp_\mu}{d\tau} = 0$$

である。ただし τ は無単位のパラメーターとし， τ による微分をドットで表す。運動量 p_μ は運動の定数であり， $p^2 + m^2 = 0$ を満たしている。

弦に対する光錐ゲージ条件 $X^+(\tau, \sigma) = \beta\alpha' p^+ \tau$ と類似の条件

$$x^+ = \frac{1}{m^2} p^+ \tau \quad (11.7)$$

を粒子に対して課すと，運動量の表式と運動方程式はそれぞれ

$$p_\mu = m^2 \dot{x}_\mu, \quad (45)$$

$$\ddot{x}_\mu = 0$$

と簡単になる [上式 (45) の導出は下記]。 (τ を無単位に選んだので，式 (45) の両辺の単位 (次元) はこれで合っている。) p^+ と p^I を指定すると，条件 $p^2 + m^2 = 0$ から

$$p^- = \frac{1}{2p^+} (p^I p^I + m^2)$$

と定まり，これを用い点粒子の運動は

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{1}{m^2} p^\mu (= \text{const.}) \quad \Rightarrow \quad x^-(\tau) = x_0^- + \frac{p^-}{m^2} \tau, \quad x^I(\tau) = x_0^I + \frac{p^I}{m^2} \tau$$

と表される (x^+ は光錐ゲージ条件 $x^+ = \frac{1}{m^2} p^+ \tau$ によって与えられる)。以上より独立な力学変数を

$$(x^I, x_0^-, p^I, p^+)$$

に選ぶことができる。 x_0^I の代わりに x^I を選んだのは，座標と運動量の対称な取扱いのためである。

11.1 節，式の導出など

■光錐ゲージにおける運動量の式 (45) の導出 運動量の表式 $p_\mu = m\dot{x}_\mu/\sqrt{-\dot{x}^2}$ の + 成分を粒子の光錐ゲージゲージ条件 $x^+ = p^+ \tau/m^2$ と組合せると

$$p^+ = \frac{m}{\sqrt{-\dot{x}^2}} \dot{x}^+ = \frac{1}{\sqrt{-\dot{x}^2}} \frac{p^+}{m}, \quad \therefore \dot{x}^2 = -\frac{1}{m^2} \quad (11.8)$$

を得る。これを運動量の表式 $p_\mu = m\dot{x}_\mu/\sqrt{-\dot{x}^2}$ に戻すと，式 (45):

$$p_\mu = m^2 \dot{x}_\mu$$

が得られる。

11.1 について

■点粒子の光錐ゲージ条件 (11.7) について 本稿では 10.3 節で明示的にまとめたように、これはスカラー場の Fourier 展開の式 (10.31) において導入した変数 τ の定義式

$$x^+ = \frac{1}{m^2} p^+ \tau$$

と同じ形をしている。

■式 (11.8) 第 2 の等号では光錐ゲージ条件 (11.7) により $\dot{x}^+ = p^+/m^2$ となることを用いる。

11.2 Heisenberg 描像と Schrödinger 描像

本稿では以下の点を特筆するに留める。

- Schrödinger 描像では、通常は演算子が時間に依存しないものと見なされるが、時間に“あらわに”依存するように特別に設定される物理量に対応する演算子は、時間依存性を持つことになる。
- 時間に依存する Schrödinger 演算子に対応する Heisenberg 演算子は、あらわな時間依存性を持つと言われる。

11.3 点粒子の量子化

Schrödinger 演算子の基本的な組を

$$(x^I, x_0^-, p^I, p^+)$$

を選び、これらを用いて Schrödinger 演算子

$$x^+(\tau) \equiv \frac{p^+}{m^2} \tau, \quad x^-(\tau) \equiv x_0^- + \frac{p^-}{m^2} \tau, \quad p^- \equiv \frac{1}{2p^+} (p^I p^I + m^2)$$

を定義する。 $x^+(\tau)$ と $x^-(\tau)$ は時間に依存する Schrödinger 演算子である。

独立な演算子 (x^I, x_0^-, p^I, p^+) について、通常の変換関係

$$[x^I, p^J] = i\eta^{IJ}$$

に加えて変換関係

$$[x_0^-, p^+] = i\eta^{-+} = -i$$

を仮定し、それ以外の組合せの変換子はすべてゼロと置く。 Heisenberg 演算子 $(x^I(\tau), x_0^-(\tau), p^I(\tau), p^+(\tau))$ もこれと同じ (同時刻) 変換関係を満たす。

Heisenberg 描像を採用し、ハミルトニアンを

$$H(\tau) = \frac{p^+(\tau)}{m^2} p^-(\tau) = \frac{1}{2m^2} (p^I(\tau) p^I(\tau) + m^2) \quad (11.34)$$

と仮定すると [本稿次節で教科書の説明を補足], Heisenberg 方程式より各演算子 $(x^I(\tau), x_0^-(\tau), p^I(\tau), p^+(\tau))$ は期待される時間発展

$$\begin{aligned}\frac{dp^+(\tau)}{d\tau} &= 0 & \rightarrow & p^+(\tau) = p^+, \\ \frac{dp^I(\tau)}{d\tau} &= 0 & \rightarrow & p^I(\tau) = p^I, \\ \frac{dx^I(\tau)}{d\tau} &= \frac{p^I}{m^2} & \rightarrow & x^I(\tau) = x_0^I + \frac{p^I}{m^2}\tau, \\ \frac{dx_0^-}{d\tau} &= 0 & \rightarrow & x_0^-(\tau) = x_0^-\end{aligned}\tag{46}$$

を行う [非自明な式 (46) の導出は下記]. 残りの演算子 $x^+(\tau), x^-(\tau), p^-(\tau)$ についても期待される結果が得られる:

$$\begin{aligned}\frac{dp^-(\tau)}{d\tau} &= 0 & \rightarrow & p^-(\tau) = p^-, \\ \frac{dx^-(\tau)}{d\tau} &= \frac{p^-}{m^2}, & \frac{dx^+(\tau)}{d\tau} &= \frac{p^+}{m^2}.\end{aligned}\tag{47}$$

[非自明な式 (47) の導出は下記.]

p^+, p^I の同時固有状態 $|p^+, \vec{p}_T\rangle$ を用いて系の状態を

$$|\Psi, \tau\rangle = \int dp^+ d^{D-2} p_T \psi(\tau, p^+, \vec{p}_T) |p^+, \vec{p}_T\rangle$$

と表す. ここに $\psi(\tau, p^+, \vec{p}_T) = \langle p^+, \vec{p}_T | \Psi, \tau \rangle$ は運動量空間の波動関数である. 状態 $|\Psi, \tau\rangle$ に関する Schrödinger 方程式

$$i \frac{\partial}{\partial \tau} |\psi, \tau\rangle = H |\psi, \tau\rangle, \quad H = \frac{1}{2m^2} (p^I p^I + m^2)$$

から運動量空間の波動関数 $\psi(\tau, p^+, \vec{p}_T)$ に関する Schrödinger 方程式

$$i \frac{\partial}{\partial \tau} \psi = \frac{1}{2m^2} (p^I p^I + m^2) \psi$$

が得られる.

11.3 節, 式の導出など

■演算子 $x^I(\tau)$ の時間発展 (46) の導出 Heisenberg 方程式は

$$i \frac{dx^I(\tau)}{d\tau} = \left[x^I(\tau), \frac{1}{2m^2} (p^J p^J + m^2) \right] = \frac{1}{2m^2} [x^I, p^J p^J]$$

となる. 最右辺において

$$[x^I, p^J p^J] = [x^I, p^J] p^J + p^J [x^I, p^J] = 2i\eta^{IJ} p^J = 2ip^I$$

とすると, 式 (46):

$$\frac{dx^I(\tau)}{d\tau} = \frac{p^I}{m^2}$$

を得る.

■演算子 $x^\pm(\tau)$ の時間発展 (47) の導出 $x^-(\tau)$ についての Heisenberg 方程式は

$$i \frac{dx^-(\tau)}{d\tau} = i \frac{\partial x^-}{\partial \tau} + \left[x^-(\tau), \frac{1}{2m^2} (p^I p^I + m^2) \right]$$

となる. ここで $x^-(\tau) = x_0^- + p^- \tau / m^2$ であり, x_0^- と p^- はいずれも p^I と可換なので, 右辺の交換子 $[x^-(\tau), H(\tau)]$ はゼロである. よって

$$\frac{dx^-(\tau)}{d\tau} = \frac{p^-}{m^2}$$

を得る. x^+ は光錐ゲージ条件 $x^+(\tau) = p^+ \tau / m^2$ で与えられていることに注意すると, 同様に $[x^+(\tau), H(\tau)]$ なので

$$\frac{dx^+(\tau)}{d\tau} = \frac{\partial x^+}{\partial \tau} = \frac{p^+}{m^2}$$

を得る.

計算練習 11.3

x_0^I に関する Heisenberg 方程式

$$\frac{dx_0^I}{d\tau} = \frac{\partial x_0^I}{\partial \tau} + \frac{1}{i} [x_0^I, H]$$

において, x_0^I の交換関係は (直接的には) 与えられていないことを踏まえると, $x_0^I = x^I - \frac{p^I}{m^2} \tau$ を代入してはじめて上式を評価できることになる. すると右辺第1項は $\frac{\partial x_0^I}{\partial \tau} = -\frac{p^I}{m^2}$ であり, 第2項は式 (11.36) で計算したように $\frac{1}{i} [x_0^I, H] = \frac{p^I}{m^2}$ なので, 予想される結果

$$\frac{dx_0^I}{d\tau} = 0$$

を得る.

11.3 について

■ p^- の式 (11.31) における $1/p^+$ について これは

$$p^+ \frac{1}{p^+} = \frac{1}{p^+} p^+ = 1 : \text{恒等演算子}$$

を満たす p^+ の逆演算子と考えられる.

■ 「この交換子もゼロになる」 (p.218, 1.17) について $[p^+, p^I] = 0$ より

$$[x^+, p^-] = \left[\frac{\tau}{m^2} p^+, \frac{1}{2p^+} (p^I p^I + m^2) \right] = 0.$$

■ ハミルトニアン (11.34) について

- 対応関係 (11.32): $\frac{\partial}{\partial x^\mp} \leftrightarrow p^-$ は $p_\mu = -i\partial_\mu$ から想起される.
- 式 (11.33) の $\partial/\partial\tau$ の対応物をハミルトニアン (11.34) に同定する根拠として,
 - Schrödinger 方程式 (11.22): $\frac{d}{d\tau} \leftrightarrow H$

– ハミルトニアンが“時間”推進を生成すること (これは Heisenberg 方程式に他ならない) が考えられる。

- 光錐エネルギー p^- (を $\frac{p^+}{m^2}p^-$ と無単位にしたもの) をハミルトニアンにとり、たとえば十分である。
- 無単位のパラメーター τ を用いた Schrödinger 方程式 (11.51):

$$i\frac{\partial}{\partial\tau}|\psi,\tau\rangle = H|\psi,\tau\rangle$$

が成り立つためには、ハミルトニアンも式 (11.34) のように無単位でなければならない。

11.4 量子力学的な点粒子とスカラー粒子

- 点粒子 (質量 m) の量子状態 $|p^+, \vec{p}_T\rangle$ を、スカラー場 (質量 m) の 1 粒子状態 $a_{p^+, \vec{p}_T}^\dagger |\Omega\rangle$ と同定する。
- スカラー場の理論は多粒子状態を扱える点で、点粒子の量子論より完全な理論であると言える。
- 波動関数 $\psi(\tau, p^+, \vec{p}_T)$ をスカラー場 $\phi(\tau, p^+, \vec{p}_T)$ に同定すれば

$$\text{Schrödinger 方程式} \quad \left(i\frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{1}{2m^2}(p^I p^I + m^2) \right) \psi(\tau, p^+, \vec{p}_T) = 0, \quad (11.3 \text{ 節})$$

$$\text{古典的な場の方程式} \quad \left(i\frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{1}{2m^2}(p^I p^I + m^2) \right) \phi(\tau, p^+, \vec{p}_T) = 0, \quad (10.3 \text{ 節})$$

は同じものと見なされるから、点粒子の量子力学に対応する場の量子論はスカラー場の量子論である。

- 第 1 量子化と第 2 量子化
 - “第 1 量子化”
点粒子の量子化 \rightarrow 1 粒子状態。
 - “第 2 量子化”
1 粒子状態の波動関数に対する Schrödinger 方程式を
スカラー場の古典的な場の方程式と再解釈し、場を量子化 \rightarrow 多粒子状態。
- 場の量子論は多粒子状態を含んでおり、
作用の式に 3 個以上の場を含む項を付け加えることによってその相互作用を記述できる。

11.4 について

第 3 段落について、点粒子の量子論における基礎方程式として Schrödinger 方程式を想定しなければ、対応する場の量子論としてスカラー場以外の場の理論もあり得ると考えられる。弦理論の文脈において、この問題は 12.7 節で再論される。

11.5 光錐運動量演算子

並進操作 $\delta x^\mu(\tau) = \varepsilon^\mu$ の下でのラグランジアン $L = -m\sqrt{-\dot{x}^2}$ の不変性から、粒子の運動量 p_μ の保存が結論される。そして光錐ゲージにおける量子化の条件

$$[x^I(\tau), p^J(\tau)] = i\eta^{IJ}, \quad [x_0^-(\tau), p^+(\tau)] = -i, \quad \text{etc.}$$

に反して Lorentz 共変な交換関係

$$[x^\mu(\tau), p^\nu(\tau)] = i\eta^{\mu\nu}, \quad [x^\mu(\tau), x^\nu(\tau)] = 0, \quad [p^\mu(\tau), p^\nu(\tau)] = 0$$

を課すと、運動量 $p^\mu(\tau)$ が推進操作を生成すること

$$\delta x^\mu(\tau) = [i\varepsilon_\rho p^\rho(\tau), x^\mu(\tau)] = \varepsilon^\mu$$

が導かれる。

一方、光錐ゲージにおける量子化の条件

$$[x^I(\tau), p^J(\tau)] = i\eta^{IJ}, \quad [x_0^-(\tau), p^+(\tau)] = -i, \quad \text{etc.}$$

を課した場合には、 $\delta x^\mu(\tau) = [i\varepsilon_\rho p^\rho(\tau), x^\mu(\tau)]$ は

$$\begin{aligned} \varepsilon^\mu = (\varepsilon^+, \varepsilon^-, \varepsilon^I) = (0, 0, \varepsilon^I) &\Rightarrow \delta x^\mu = (\delta x^+, \delta x^-, \delta x^I) = (0, 0, \varepsilon^I), \\ \varepsilon^\mu = (\varepsilon^+, \varepsilon^-, \varepsilon^I) = (0, \varepsilon^-, 0) &\Rightarrow \delta x^\mu = (\delta x^+, \delta x^-, \delta x^I) = (0, \varepsilon^-, 0) \end{aligned}$$

を与えるけれど [第2式については計算練習 11.4 を参照]、

$$\varepsilon^\mu = (\varepsilon^+, \varepsilon^-, \varepsilon^I) = (\varepsilon^+, 0, 0)$$

に対しては

$$\delta x^\mu = (\delta x^+, \delta x^-, \delta x^I) = \left(0, -\varepsilon^+ \frac{p^I}{p^+}, -\varepsilon^+ \frac{p^-}{p^+}\right) \quad (48)$$

となって [導出は下記]、 p^- は予想される推進を生成しない。

このことは次のように理解できる。推進 $x^+ \rightarrow x'^+ = x^+ + \varepsilon^+$ に対して光錐ゲージ条件 $x^+ = \frac{1}{m^2} p^+ \tau$ は

$$x'^+ = \frac{1}{m^2} p^+ \tau + \varepsilon^+$$

となるから、新しい座標 x'^+ が光錐ゲージ条件を満たすためにはパラメーターを

$$\tau \rightarrow \tau' = \tau + \lambda, \quad \lambda = -\frac{m^2}{p^+} \varepsilon^+$$

と付け替えなければならない。実際に p^- は推進 $\delta x^\mu = \varepsilon^\mu = (\varepsilon^+, 0, 0)$ とパラメータの付け替え

$$\tau \rightarrow \tau + \lambda, \quad x^\mu(\tau) \rightarrow x^\mu(\tau + \lambda) = x^\mu(\tau) + \lambda \partial_\tau x^\mu(\tau)$$

を生成しているとする

$$\delta x^\mu = \varepsilon^\mu + \lambda \partial_\tau x^\mu = \left(0, -\varepsilon^+ \frac{p^I}{p^+}, -\varepsilon^+ \frac{p^-}{p^+}\right)$$

が得られる。なおパラメーターの付け替え $\tau \rightarrow \tau + \lambda$ は運動量保存則に影響しない。

11.5 節、式の導出など

■ ε^+ の生成する変換 (48) の導出 無限小パラメーター

$$\varepsilon^\mu = (\varepsilon^+, \varepsilon^-, \varepsilon^I) = (\varepsilon^+, 0, 0)$$

に対して、運動量の生成する変換は

$$\delta x^\mu(\tau) = [i\varepsilon_\rho p^\rho(\tau), x^\mu(\tau)] = -i\varepsilon^+ [p^-, x^\mu(\tau)]$$

と表される。

まず $\mu = +$ 成分について, Schrödinger 演算子の定義 $x^+(\tau) = \frac{p^+}{m^2}\tau$ を用いると

$$\delta x^+(\tau) = -i\varepsilon^+ \left[p^-, \frac{p^+}{m^2}\tau \right] 0$$

となる.

次に $\mu = I$ 成分 $\delta x^I(\tau) = -i\varepsilon^+ [p^-, x^I(\tau)]$ を調べると,

$$[p^-, x^I] + \left[\frac{1}{2p^+} (p^J p^J + m^2), x^I \right] = \frac{1}{2p^+} [p^J p^J, x^I] = \frac{1}{2p^+} (-2ip^I)$$

より

$$\delta x^I(\tau) = -i\varepsilon^+ \frac{1}{2p^+} (-2ip^I) = -\varepsilon^+ \frac{p^I}{p^+}$$

を得る.

最後に $\mu = -$ とおくと

$$\delta x^-(\tau) = -i\varepsilon^+ \left[p^-, x_0^- + \frac{p^-}{m^2}\tau \right] = -i\varepsilon^+ [p^-, x_0^-].$$

ここで交換関係 $[p^-, x_0^-]$ を調べる必要がある. $p^- = \frac{1}{2p^+} (p^I p^I + m^2)$ における $1/p^+$ が x_0^- と交換しないことを踏まえ, 準備として交換子 $[x_0^-, 1/p^+]$ を計算する.

$$\left[x_0^-, \frac{1}{p^+} \right] = x_0^- \frac{1}{p^+} - \frac{1}{p^+} x_0^- = \frac{1}{p^+} p^+ x_0^- \frac{1}{p^+} - \frac{1}{p^+} x_0^- p^+ \frac{1}{p^+} = \frac{1}{p^+} [p^+, x_0^-] \frac{1}{p^+} = \frac{i}{(p^+)^2}.$$

これを用いると

$$[x_0^-, p^-] = i \frac{p^-}{p^+} \tag{11.69}$$

となるので (計算練習 11.5),

$$\delta x^-(\tau) = -\varepsilon^+ \frac{p^-}{p^+}$$

となる.

以上の結果をまとめて式 (48) のように書ける.

計算練習 11.4

$\delta x^\mu = -i\varepsilon^- [p^+, x^\mu]$ における交換子 $[p^+, x^\mu]$ について,

$$[p^+, x^I] = 0, \quad [p^+, x^+] = \left[p^+, \frac{p^+}{m^2}\tau \right] = 0, \quad [p^+, x^-] = \left[p^+, x_0^- + \frac{p^-}{m^2}\tau \right] = [p^+, x_0^-] = i.$$

計算練習 11.5

$$\begin{aligned} [x_0^-, p^-] &= \left[x_0^-, \frac{1}{2p^+} (p^I p^I + m^2) \right] = \frac{p^I p^I + m^2}{2} \left[x_0^-, \frac{1}{p^+} \right] = i \frac{p^I p^I + m^2}{2(p^+)^2} \quad (\because \text{式 (11.68)}) \\ &= i \frac{p^-}{p^+} : (11.69). \end{aligned}$$

11.5 について

■「式 (11.60) において」(p.223 下から 6 行目, および p.224, l.4) について Lorentz 共変な交換関係 (11.58), (11.59) を用いるか否かに関わらず, $\delta x^\mu(\tau) = [i\varepsilon_\rho p^\rho(\tau), x^\mu(\tau)]$.

一般にユニタリー演算子 U による演算子 O の変換

$$O \rightarrow O' = UOU^\dagger$$

が実数の連続パラメーター α で特徴づけられる連続的な変換である場合, 適当な Hermite 演算子 $T(=T^\dagger)$ を用いて $U = e^{i\alpha T}$ と表される. $\alpha = 0$ のときに U は恒等演算子となる. α が無限小パラメーター $\delta\alpha$ であるとき, その 1 次までとると

$$U \simeq 1 + i\delta\alpha T, \quad \delta O \equiv O' - O \simeq (1 + i\delta\alpha T)O(1 - i\delta\alpha T) - O \simeq i\delta\alpha[T, O]$$

となる. 連続変換が複数の連続パラメーター $\{\alpha_i\}$ で特徴づけられる場合への一般化は直接的である. 今の場合, $O \rightarrow x^\mu, \delta\alpha T \rightarrow \varepsilon_\rho p^\rho$ である.

■p.224 訳註の引用 光錐量子化における x と p の交換関係をまとめると, 次のようになる.

$$[x^\mu, p^\nu] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -i & i(p^-/p^+) & 0 \\ 0 & i(p^I/p^+) & i \end{pmatrix} \neq i\eta^{\mu\nu} \quad (\mu, \nu = +, -, I)$$

11.6 光錐 Lorentz 生成子

相対論的な点粒子について, Lorentz 変換 $\delta x^\mu = \varepsilon^{\mu\nu} x_\nu$ に関する対称性からチャージ

$$M^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu$$

の保存が結論される (問題 8.5). そして Lorentz 共変な交換関係

$$[x^\mu(\tau), p^\nu(\tau)] = i\eta^{\mu\nu}, \quad [x^\mu(\tau), x^\nu(\tau)] = 0, \quad [p^\mu(\tau), p^\nu(\tau)] = 0$$

を課すと, チャージ $M^{\mu\nu}$ は座標の Lorentz 変換を生成すること

$$\delta x^\rho = \left[-\frac{i}{2} \varepsilon_{\mu\nu} M^{\mu\nu}, x^\rho \right] = \varepsilon^{\rho\nu} x_\nu$$

が導かれる. [よって $M^{\mu\nu}$ を Lorentz 生成子と呼ぶことができる.]

Lorentz 共変な交換関係の下では

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = i\eta^{\mu\rho} M^{\nu\sigma} - i\eta^{\nu\rho} M^{\mu\sigma} + i\eta^{\mu\sigma} M^{\rho\nu} - i\eta^{\nu\sigma} M^{\rho\mu}$$

が導かれる (問題 11.5). これは添字を光錐成分に選んでも成立し,

$$[M^{+-}, M^{+I}] = iM^{+I}, \quad [M^{-I}, M^{-J}] = 0, \quad \text{etc.}$$

を与える. この交換関係を満たす類似の演算子 $M^{\mu\nu}$ を構築できない理論は Lorentz 不変なものではない.

次に光錐ゲージを採用した場合を考える.

1. チャージの定義

$$M^{+-} = x^+ p^- - x^- p^+ = \frac{p^+ \tau}{m^2} p^- - \left(x_0^- + \frac{p^-}{m^2} \tau \right) p^+ = -x_0^- p^+,$$

$$M^{-I} = x^- p^I - x^I p^- = \left(x_0^- + \frac{p^-}{m^2} \tau \right) p^I - \left(x_0^I + \frac{p^I \tau}{m^2} \right) p^- = x_0^- p^I - x_0^I p^-, \quad \text{etc.}$$

と考えると、これらは Hermite ではない。そこでチャージを Hermite 演算子

$$M^{+-} \equiv -\frac{1}{2}(x_0^- p^+ + p^+ x_0^-), \quad M^{-I} \equiv x_0^- p^I - \frac{1}{2}(x_0^I p^- + p^- x_0^I), \quad \text{etc.}$$

として定義する。

2. チャージの生成する変換

ここで定義した光錐ゲージにおけるチャージは

座標と運動量の Lorentz 変換を生成する、光錐ゲージ Lorentz 生成子となる。

ある場合には、これらの変換に世界線へのパラメーターの付け替えが伴う (問題 11.7)。

3. チャージの交換関係

ここで定義した光錐ゲージにおけるチャージは、

光錐座標における共変な演算子が満たすのと同じ交換関係

$$[M^{+-}, M^{+I}] = iM^{+I}, \quad [M^{-I}, M^{-J}] = 0, \quad \text{etc.}$$

を満たす (問題 11.6)。このため光錐ゲージにおける量子論の Lorentz 不変性が保証される。

11.6 について

■ $(M^{\mu\nu})^\dagger$ の式 (11.77) について

$$(M^{\mu\nu})^\dagger = (p^\nu)^\dagger (x^\mu)^\dagger - (p^\mu)^\dagger (x^\nu)^\dagger = p^\nu x^\mu - p^\mu x^\nu$$

であり、

$$p^\nu x^\mu = x^\mu p^\nu + [p^\nu, x^\mu] = x^\mu p^\nu - i\eta^{\mu\nu},$$

$$p^\mu x^\nu = x^\nu p^\mu + [p^\mu, x^\nu] = x^\nu p^\mu - i\eta^{\mu\nu}$$

を辺々引いて

$$p^\nu x^\mu - p^\mu x^\nu = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu$$

を得る。

■ 交換関係 (11.81) の光錐成分 問題 10.3 より交換子 $[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}]$ の式 (11.81) は添字を光錐成分にとっても成り立つ。このことを式 (11.83), 式 (11.84) の導出に用いる。

■ 交換関係 (11.83) について

$$[M^{+-}, M^{+I}] = i\eta^{++} M^{-I} - i\eta^{-+} M^{+I} + i\eta^{+I} M^{+-} - i\eta^{-I} M^{++}$$

における4つの η は

$$\eta^{++} = 0, \quad \eta^{+I} = 0, \quad \eta^{-+} = -1, \quad \eta^{-J} = 0$$

だから、「 η がゼロにならない唯一の添字の組合せは、第1の生成子から $-$ を選び、第2の生成子から $+$ を選ぶ場合に限られる」(p.227, 1.18,19). η^{-+} を持つ項は $-i\eta^{-+}M^{+I} = iM^{+I}$ なので

$$[M^{+-}, M^{+I}] = iM^{+I} : (11.83)$$

を得る.

■交換関係(11.84)について 交換子 $[M^{-I}, M^{-J}]$ の計算に現れる4つの η は

$$\eta^{--} = 0, \quad \eta^{-J} = 0, \quad \eta^{I-} = 0, \quad \eta^{IJ} = \delta^{IJ}$$

なので「ここでは η に添字 I と J を使わねばならない」(p.227, 1.24). η^{IJ} を持つ項は $-i\eta^{IJ}M^{--}$ であり、反対称性 $M^{--} = 0$ によりこれはゼロになる. ここで Lorentz テンソル $M^{\mu\nu}$ の反対称性は光錐成分にも受け継がれることを用いた(問題10.3参照).

■光錐ゲージにおける M^{-I} の Hermite 性 式(11.87)の M^{-I} は Hermite ではない. 実際, 式(11.69): $[x_0^I, p^-] = i\frac{p^-}{p^+}$ より

$$M^{-I} - (M^{-I})^\dagger = [x_0^-, p^I] - [x_0^I, p^-] = -i\frac{p^-}{p^+} \neq 0$$

である. 一方, 式(11.88):

$$M^{-I} \equiv x_0^- p^I - \frac{1}{2}(x_0^I p^- + p^- x_0^I)$$

はその Hermite 性が明白である.

■Lorentz 不変性の条件 交換関係(11.81)が「量子論の Lorentz 不変性を保証するために必要なものである」(p.229, 1.2,3) ことについて, 交換関係(11.81)が満たされれば, これは両辺が2階反変テンソルから成るので Lorentz 変換に対して共変的となる(十分条件).

計算練習 11.6

$$[M^{\mu\nu}, x^\rho] = [x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu, x^\rho] = x^\mu [p^\nu, x^\rho] - x^\nu [p^\mu, x^\rho] = x^\mu (-i\eta^{\nu\rho}) - x^\nu (-i\eta^{\mu\rho}) = i\eta^{\mu\rho} x^\nu - i\eta^{\nu\rho} x^\mu : (11.78).$$

計算練習 11.7

式(11.81)の右辺において μ と ν を入れ替えると

$$(\text{第1項}) \rightarrow -(\text{第2項}), \quad (\text{第2項}) \rightarrow -(\text{第1項}), \quad (\text{第3項}) \rightarrow -(\text{第4項}), \quad (\text{第4項}) \rightarrow -(\text{第3項})$$

となることに注意すれば良い.

計算練習 11.8

問題10.3の結果 $R^{+-} = \frac{1}{2}(R^{00} - R^{01} + R^{10} - R^{11})$ より $M^{+-} = M^{10}$ を得る.

問題 (第 11 章)

問題 11.4 点粒子のパラメーター付け替え対称性

11.5 節 p.225 で言及されている問題 11.4 を解く.

一般に $L = L(x, \dot{x})$ の形を持つラグランジアンに対して

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial x^\mu} \delta x^\mu + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \delta \dot{x}^\mu = \left(\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right) \delta x^\mu + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \delta \dot{x}^\mu = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \delta x^\mu \right)$$

となる. ここで $\delta x^\mu = \lambda \dot{x}^\mu$ を代入し, 点粒子のラグランジアン (11.3): $L = -m\sqrt{-\dot{x}^2}$ が \dot{x}^μ の 1 次の同次関数であることに注意して同次関数についての Euler の定理

$$\dot{x}^\mu \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = L$$

を用いると

$$\delta L = \frac{d}{d\tau} (\lambda L)$$

を得る. このとき問題 8.9 により保存するチャージは

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \delta x^\mu - \lambda L = \lambda \left(\dot{x}^\mu \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} - L \right) = 0$$

となる. 特に λ が τ に依らない場合のチャージは

$$\dot{x}^\mu \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} - L = 0$$

であり, ここでは μ が時間成分をとるため, これはハミルトニアン

$$H = \sum_{i=1}^3 \dot{x}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - L$$

ではない.

問題 11.5 Lorentz 生成子と Lorentz 代数

11.6 節 p.227, 1.2 で言及されている問題 11.5 を解く.

(a)

$$[M^{\mu\nu}, p^\rho] = [x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu, p^\rho] = [x^\mu, p^\rho] p^\nu - [x^\nu, p^\rho] p^\mu = i\eta^{\mu\rho} p^\nu - i\eta^{\nu\rho} p^\mu.$$

(b)

$[M^{\mu\nu}, x^\rho]$ の式 (11.78) と小問 (a) の結果を用いると

$$\begin{aligned} [M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] &= [M^{\mu\nu}, x^\rho p^\sigma - x^\sigma p^\rho] \\ &= x^\rho [M^{\mu\nu}, p^\sigma] + [M^{\mu\nu}, x^\rho] p^\sigma - x^\sigma [M^{\mu\nu}, p^\rho] - [M^{\mu\nu}, x^\sigma] p^\rho \\ &= x^\rho (i\eta^{\mu\sigma} p^\nu - i\eta^{\nu\sigma} p^\mu) + (i\eta^{\mu\rho} x^\nu - i\eta^{\nu\rho} x^\mu) p^\sigma - x^\sigma (i\eta^{\mu\rho} p^\nu - i\eta^{\nu\rho} p^\mu) - (i\eta^{\mu\sigma} x^\nu - i\eta^{\nu\sigma} x^\mu) p^\rho \\ &= i\eta^{\mu\rho} M^{\nu\sigma} - i\eta^{\nu\rho} M^{\mu\sigma} + i\eta^{\mu\sigma} M^{\rho\nu} - i\eta^{\nu\sigma} M^{\rho\mu} : (11.81) \end{aligned}$$

を得る.

(c)

式 (11.81) より

$$\begin{aligned}[M^{\pm I}, M^{JK}] &= -i\eta^{IJ}M^{\pm K} - i\eta^{IK}M^{J\pm} \\ &= -i\delta^{IJ}M^{\pm K} - i\delta^{IK}M^{J\pm}, \\ [M^{\pm I}, M^{\mp J}] &= i\eta^{\pm\mp}M^{IJ} - i\eta^{IJ}M^{\mp\pm} \\ &= -iM^{IJ} - i\delta^{IJ}M^{\mp\pm}, \\ [M^{+-}, M^{\pm I}] &= i\eta^{\pm\pm}M^{-I} - i\eta^{-\pm}M^{+I} \\ &= \pm iM^{\pm I}, \quad (\text{これは式 (11.83) を含んでいる}) \\ [M^{\pm I}, M^{\pm J}] &= -i\eta^{IJ}M^{\pm\pm} \\ &= 0 \quad (\text{これは式 (11.84) を含んでいる})\end{aligned}$$

を得る (複号同順).

Lorentz テンソル $M^{\mu\nu}$ の反対称性は光錐成分にも受け継がれることに注意すると (問題 10.3 参照), ゼロでない独立な光錐成分として $M^{\pm I}, M^{+-}, M^{IJ}$ をとれる. これらの間の自明でない交換関係には, 上で計算したものの他に

$$\begin{aligned}[M^{+-}, M^{-+}] &= i\eta^{+-}M^{-+} - i\eta^{-+}M^{+-} = 0, \\ [M^{+-}, M^{IJ}] &= 0, \\ [M^{IJ}, M^{KL}] &= i\delta^{IK}M^{JL} - i\delta^{JK}M^{IL} + i\delta^{IL}M^{KJ} - i\delta^{JL}M^{KI}, \\ [M^{+-}, M^{IJ}] &= 0\end{aligned}$$

がある.

問題 11.6 粒子に関する光錐ゲージ交換子

11.6 節 p.228, 1,2,3 で言及されている問題 11.6 を解く.

(a)

$$\begin{aligned}M^{-I} &\equiv x_0^- p^I - \frac{1}{2}(x_0^I p^- + p^- x_0^I) : (11.88) \\ &= (x_0^- p^I - x_0^I p^-) + \frac{1}{2}[x_0^I, p^-]\end{aligned}$$

において

$$[x_0^I, p^-] = \left[x^I - \frac{p^I}{m^2}\tau, \frac{1}{2p^+}(p^J p^J + m^2) \right] = \frac{1}{2p^+}[x^I, p^J p^J] = i\frac{p^I}{p^+}$$

なので

$$M^{-I} = (x_0^- p^I - x_0^I p^-) + \frac{i}{2}\frac{p^I}{p^+}$$

と書ける.

これを用いると

$$[M^{-I}, M^{-J}] = [x_0^- p^I - x_0^I p^-, x_0^- p^J - x_0^J p^-] + \frac{i}{2} \left[x_0^- p^I - x_0^I p^-, \frac{p^J}{p^+} \right] + \frac{i}{2} \left[\frac{p^I}{p^+}, x_0^- p^J - x_0^J p^- \right] - \frac{1}{4} \left[\frac{p^I}{p^+}, \frac{p^J}{p^+} \right]$$

となる。「後ろの項」 $-\frac{1}{4} \left[\frac{p^I}{p^+}, \frac{p^J}{p^+} \right]$ はゼロである。次に

$$\left[x_0^- p^I - x_0^I p^-, \frac{p^J}{p^+} \right] = \left[x_0^-, \frac{p^J}{p^+} \right] p^I - \left[x_0^I, \frac{p^J}{p^+} \right] p^-$$

において,

$$\left[x_0^-, \frac{p^J}{p^+} \right] p^I = \left[x_0^-, \frac{1}{p^+} \right] p^J p^I = i \frac{p^I p^J}{(p^+)^2} \quad (\because \text{式 (11.68)})$$

および

$$\begin{aligned} [x_0^I, p^J] &= \left[x^I - \frac{p^I}{m^2} \tau, p^J \right] = i \eta^{IJ}, & \left[x_0^I, \frac{1}{p^+} \right] &= \left[x^I - \frac{p^I}{m^2} \tau, \frac{1}{p^+} \right] = 0 \\ \therefore \left[x_0^I, \frac{p^J}{p^+} \right] p^- &= [x_0^I, p^J] \frac{p^-}{p^+} = i \eta^{IJ} \frac{p^-}{p^+} \end{aligned}$$

を用いると

$$\left[x_0^- p^I - x_0^I p^-, \frac{p^J}{p^+} \right] = i \frac{p^I p^J}{(p^+)^2} - i \eta^{IJ} \frac{p^-}{p^+}$$

となる。よって「混合項」は

$$\frac{i}{2} \left[x_0^- p^I - x_0^I p^-, \frac{p^J}{p^+} \right] + \frac{i}{2} \left[\frac{p^I}{p^+}, x_0^- p^J - x_0^J p^- \right] = 0$$

である。

(b)

「前の項」

$$[x_0^- p^I - x_0^I p^-, x_0^- p^J - x_0^J p^-] = [x_0^- p^I, x_0^- p^J] - [x_0^- p^I, x_0^J p^-] - [x_0^I p^-, x_0^- p^J] + [x_0^I p^-, x_0^J p^-]$$

を考える。再び

$$[x_0^-, p^I] = 0, \quad [x_0^-, p^-] = i \frac{p^-}{p^+} : (11.69), \quad [x_0^I, p^J] = i \eta^{IJ}, \quad [x_0^I, p^-] = i \frac{p^I}{p^+}$$

を思い出すと

$$\begin{aligned} [x_0^- p^I, x_0^- p^J] &= x_0^- [x_0^-, p^J] p^I + x_0^- [p^I, x_0^-] p^J = 0, \\ [x_0^- p^I, x_0^J p^-] &= x_0^J [x_0^-, p^-] p^I + x_0^- [p^I, x_0^J] p^- = i x_0^J \frac{p^-}{p^+} p^I - i \eta^{IJ} x_0^- p^-, \\ [x_0^I p^-, x_0^- p^J] &= x_0^- [x_0^I, p^J] p^- + x_0^I [p^-, x_0^-] p^J = i \eta^{IJ} x_0^- p^- - i x_0^I \frac{p^-}{p^+} p^J, \\ [x_0^I p^-, x_0^J p^-] &= x_0^J [x_0^I, p^-] p^- + x_0^I [p^-, x_0^J] p^- = i x_0^J \frac{p^I}{p^+} p^- - i x_0^I \frac{p^J}{p^+} p^- \end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned}
& [x_0^- p^I - x_0^I p^-, x_0^- p^J - x_0^J p^-] \\
&= 0 - \left(i x_0^J \frac{p^-}{p^+} p^I - i \eta^{IJ} x_0^- p^- \right) - \left(i \eta^{IJ} x_0^- p^- - i x_0^I \frac{p^-}{p^+} p^J \right) + \left(i x_0^J \frac{p^I}{p^+} p^- - i x_0^I \frac{p^J}{p^+} p^- \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

を得る。以上より $[M^{-I}, M^{-J}] = 0$ が示された。

問題 11.7 光錐ゲージの Lorentz 生成子によって生成される変換

11.6 節 p.228, 1.2,3 で言及されている問題 11.7 を解く。

(a)

$$M^{+-} = -\frac{1}{2}(x_0^- p^+ + p^+ x_0^-) : (11.86), \quad x^+ = \frac{p^+}{m^2} \tau, \quad x^- = x_0^- + \frac{p^-}{m^2} \tau$$

に対して

$$\begin{aligned}
[M^{+-}, x^+] &= -\frac{1}{2} \frac{\tau}{m^2} \{ [x_0^-, p^+] p^+ + p^+ [x_0^-, p^+] \} \\
&= i \frac{\tau}{m^2} p^+, \\
[M^{+-}, x^-] &= -\frac{1}{2} [x_0^- p^+ + p^+ x_0^-, x_0^-] - \frac{1}{2} \frac{\tau}{m^2} [x_0^- p^+ + p^+ x_0^-, p^-] \\
&= -\frac{1}{2} x_0^- [p^+, x_0^-] - \frac{1}{2} [p^+, x_0^-] x_0^- - \frac{1}{2} \frac{\tau}{m^2} [x_0^-, p^-] p^+ - \frac{1}{2} \frac{\tau}{m^2} p^+ [x_0^-, p^-] \\
&= -i x_0^- - i \frac{\tau}{m^2} p^-, \quad (\because \text{式 (11.69)} : [x_0^-, p^-] = i p^- / p^+) \\
[M^{+-}, x^I] &= 0.
\end{aligned}$$

光錐ゲージにおいても $M^{\mu\nu}$ は反対称に定義されるものとする。このとき反対称な変換のパラメーター $\varepsilon_{\mu\nu}$ を $\varepsilon_{+-} = -\varepsilon_{-+} \equiv \varepsilon$ とし、それ以外の $\varepsilon_{\mu\nu}$ をゼロと置くと、

$$-\frac{i}{2} \varepsilon_{\mu\nu} M^{\mu\nu} = -i \varepsilon M^{+-}$$

となる。これは予想される座標の Lorentz 変換を生成する：

$$\begin{aligned}
\delta x^\mu &= [-i \varepsilon M^{+-}, x^\mu] \\
&= \begin{cases} \varepsilon \left(\frac{\tau}{m^2} p^+ \right) = \varepsilon x^+ = \varepsilon^{+-} x_- & (\mu = +) \\ -\varepsilon \left(x_0^- + \frac{\tau}{m^2} p^- \right) = -\varepsilon x^- = \varepsilon^{-+} x_+ & (\mu = -) \\ 0 & (\mu = I) \end{cases}
\end{aligned}$$

最後の等号では

$$\varepsilon^{+-} = \eta^{+\mu} \eta^{-\nu} \varepsilon_{\mu\nu} = (-1)^2 \varepsilon_{-+} = -\varepsilon_{+-} = -\varepsilon, \quad \varepsilon^{-+} = \varepsilon$$

を用いた。

第 12 章 相対論的な量子開弦

12.1 光錐ハミルトニアンと交換子

第 12 章では

- 開弦の量子化を行う.
- 全空間を満たした D-ブレインの存在を仮定する (\leftrightarrow 自由端点の境界条件).

光錐ゲージにおいて

$$\mathcal{P}^{\sigma\mu} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} X^{\mu'}, \quad \mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^{\mu}, \quad \dot{X}^- = \frac{1}{2\alpha'} \frac{1}{2p^+} (\dot{X}^I \dot{X}^I + X^{I'} X^{I'}) \quad (49)$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}^{\tau-} = \frac{\pi}{2p^+} \left(\mathcal{P}^{\tau I} \mathcal{P}^{\tau I} + \frac{X^{I'} X^{I'}}{(2\pi\alpha')^2} \right) \quad (50)$$

と書けることに注意する [導出は下記].

点粒子に関する基本となる Schrödinger 演算子の組 (x^I, x_0^-, p^I, p^+) からの類推により, 弦に関する基本となる Schrödinger 演算子の組を

$$(X^I(\sigma), x_0^-, \mathcal{P}^{\tau I}(\sigma), p^+)$$

とし, これらの間に交換関係

$$[X^I(\sigma), \mathcal{P}^{\tau J}(\sigma')] = i\eta^{IJ} \delta(\sigma - \sigma'), \quad [x_0^-, p^+] = -i$$

を課す (その他の交換子はゼロ). 対応する Heisenberg 演算子 $(X^I(\tau, \sigma), x_0^-(\tau), \mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma), p^+(\tau))$ も同じ同時刻交換関係 [正準交換関係]

$$[X^I(\tau, \sigma), \mathcal{P}^{\tau J}(\tau, \sigma')] = i\eta^{IJ} \delta(\sigma - \sigma'), \quad [x_0^-(\tau), p^+(\tau)] = -i \quad (51)$$

を満たす.

点粒子のハミルトニアン (11.3 節) と同様, ハミルトニアンが $\delta\tau$ 方向の並進操作

$$\frac{\partial}{\partial\tau} = \frac{\partial X^+}{\partial\tau} \frac{\partial}{\partial X^+} = 2\alpha' p^+ \frac{\partial}{\partial X^+} \quad \leftrightarrow \quad 2\alpha' p^+ p^-$$

を生成しなければならないことから弦のハミルトニアンを

$$\begin{aligned} H &= 2\alpha' p^+ p^- = 2\alpha' p^+ \int_0^\pi d\sigma \mathcal{P}^{\tau-} \\ &= \pi\alpha' \int_0^\pi d\sigma \left(\mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma) \mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma) + \frac{X^{I'}(\tau, \sigma) X^{I'}(\tau, \sigma)}{(2\pi\alpha')^2} \right) \quad (\because \text{式 (50)}) \end{aligned} \quad (52)$$

と仮定する. 実際, 上で設定した交換関係を用いると, このハミルトニアンに対し Heisenberg 方程式は, 例えば $X^I(\tau, \sigma)$ の運動方程式

$$\dot{X}^I(\tau, \sigma) = 2\pi\alpha' \mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma) \quad (53)$$

を与えることが確かめられる [導出は下記]. これは古典的な運動方程式 (49) と整合しているから, 上のハミルトニアンは適正である. なお古典的な境界条件は量子論において, 変数を演算子に置き換えた式になる. 例

えば Neumann 境界条件は演算子 $\partial_\sigma X^I(\tau, \sigma)$ に対する条件式

$$\partial_\sigma X^I(\tau, \sigma) = 0, \quad \sigma = 0, \pi$$

になる。

最後に [次節で正準交換関係 (51) を弦座標のモード展開における振動子の交換関係に読み替えるための準備として,] $\dot{X}^I \pm X^{I'}$ を考える。ここで得た運動方程式 $\dot{X}^I(\tau, \sigma) = 2\pi\alpha' \mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma)$ および再び上で設定した交換関係を用いると,

$$\left[(\dot{X}^I \pm X^{I'}) (\tau, \sigma), (\dot{X}^J \pm X^{J'}) (\tau, \sigma') \right] = \pm 4\pi\alpha' i \eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma'), \quad (54)$$

$$\left[(\dot{X}^I \pm X^{I'}) (\tau, \sigma), (\dot{X}^J \mp X^{J'}) (\tau, \sigma') \right] = 0 \quad (55)$$

が示される (複号同順, $0 \leq \sigma, \sigma' \leq \pi$) [導出は下記].

12.1 節, 式の導出

■ \dot{X}^- の式 (49) の導出 式 (9.65):

$$\dot{X}^- \pm X^{-'} = \frac{1}{\beta\alpha'} \frac{1}{2p^+} (\dot{X}^I \pm X^{I'})^2$$

において開弦を想定して $\beta = 2$ とおき, 複号に応じた 2 式を辺々足すと式 (49):

$$\dot{X}^- = \frac{1}{2\alpha'} \frac{1}{2p^+} (\dot{X}^I \dot{X}^I + X^{I'} X^{I'})^2$$

を得る。

■ $\mathcal{P}^{\tau-}$ の式 (50) の導出 式 (49) より

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{\tau-} &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^- = \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{1}{2\alpha'} \frac{1}{2p^+} \left(\mathcal{P}^{\tau I} \mathcal{P}^{\tau I} + \frac{X^{I'} X^{I'}}{(2\pi\alpha')^2} \right) \\ &= \frac{\pi}{2p^+} \left(\mathcal{P}^{\tau I} \mathcal{P}^{\tau I} + \frac{X^{I'} X^{I'}}{(2\pi\alpha')^2} \right) : (50) \end{aligned}$$

となる。

■ $\mathcal{P}^{\tau-}$ の式 (53) の導出 Heisenberg 方程式 $i\dot{X}^I(\tau, \sigma) = [X^I(\tau, \sigma), H(\tau)]$ において, ハミルトニアン (52):

$$H = \pi\alpha' \int_0^\pi d\sigma' \left(\mathcal{P}^{\tau J}(\tau, \sigma') \mathcal{P}^{\tau J}(\tau, \sigma') + \frac{X^{J'}(\tau, \sigma') X^{J'}(\tau, \sigma')}{(2\pi\alpha')^2} \right)$$

の第 2 項は, 次式より $X^I(\tau, \sigma)$ と可換である。

$$[X^I(\tau, \sigma), X^{J'}(\tau, \sigma')] = \frac{\partial}{\partial \sigma'} [X^I(\tau, \sigma), X^J(\tau, \sigma')] = 0.$$

正準交換関係 (51) より式 (53):

$$\begin{aligned} i\dot{X}^I(\tau, \sigma) &= \left[X^I(\tau, \sigma), \pi\alpha' \int_0^\pi d\sigma' \mathcal{P}^{\tau J}(\tau, \sigma') \mathcal{P}^{\tau J}(\tau, \sigma') \right] = \pi\alpha' \cdot 2 \int_0^\pi d\sigma' \mathcal{P}^{\tau J}(\tau, \sigma') i\eta^{IJ} \delta(\sigma - \sigma') \\ &= 2\pi i\alpha' \mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma) \end{aligned}$$

を得る。

■交換関係 (54), (55) の導出

$$\begin{aligned} [X^I(\tau, \sigma), X^J(\tau, \sigma')] = 0 \text{ を } \sigma \text{ と } \sigma' \text{ について微分} &\rightarrow [X^{I'}(\tau, \sigma), X^{J'}(\tau, \sigma')] = 0, \\ [\mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma), \mathcal{P}^{\tau J}(\tau, \sigma')] &\rightarrow [\dot{X}^I(\tau, \sigma), \dot{X}^J(\tau, \sigma')] = 0 \quad (\because \text{式 (53)}) \end{aligned}$$

であり, これらに注意すると

$$\begin{aligned} [(\dot{X}^I \pm X^{I'})(\tau, \sigma), (\dot{X}^J \pm X^{J'})(\tau, \sigma')] &= \pm [\dot{X}^I(\tau, \sigma), X^{J'}(\tau, \sigma')] \pm [X^{I'}(\tau, \sigma), \dot{X}^J(\tau, \sigma')], \\ [(\dot{X}^I \pm X^{I'})(\tau, \sigma), (\dot{X}^J \mp X^{J'})(\tau, \sigma')] &= \mp [\dot{X}^I(\tau, \sigma), X^{J'}(\tau, \sigma')] \pm [X^{I'}(\tau, \sigma), \dot{X}^J(\tau, \sigma')] \end{aligned}$$

となる. 2 式の右辺の第 2 項は, 正準交換関係 (51) に式 (53) を適用した式

$$[X^I(\tau, \sigma), \dot{X}^J(\tau, \sigma')] = 2\pi\alpha' i\eta^{IJ} \delta(\sigma - \sigma')$$

を両辺 σ で微分して,

$$[X^{I'}(\tau, \sigma), \dot{X}^J(\tau, \sigma')] = 2\pi\alpha' i\eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma')$$

と評価できる. すると第 1 項については

$$[\dot{X}^I(\tau, \sigma), X^{J'}(\tau, \sigma')] = [X^{J'}(\tau, \sigma'), \dot{X}^I(\tau, \sigma)] = -(2\pi\alpha') i\eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma'} \delta(\sigma' - \sigma) = 2\pi\alpha' i\eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma')$$

となる. ただし最後の等号では差 $\Delta\sigma = \sigma' - \sigma$ の関数に対する微分の関係 $\frac{d}{d\sigma'} = -\frac{d}{d\sigma}$ および, $\delta(\Delta\sigma) = \delta(-\Delta\sigma)$ を用いた. 以上を上式に代入して, 式 (54), (55) を得る.

12.1 について

■ハミルトニアン (12.14) について 点粒子のハミルトニアン (11.34) と同様, これが無次元なのは時間座標 τ を無次元に選んだことによる.

12.2 振動子の交換関係

波動方程式と境界条件は演算子 $X^I(\tau, \sigma)$ に対しても成立するので (12.1 節, 問題 12.1),

$$X^I(\tau, \sigma) = x_0^I + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^I \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^I \cos n\sigma e^{-in\tau}$$

とモード展開できる. そして 12.1 節で得た交換関係 (54), (55) から, 振動モード α_n^I に対する交換関係

$$[\alpha_m^I, \alpha_n^J] = m\eta^{IJ} \delta_{m+n, 0} \quad (56)$$

を引き出せる [導出は下記]. さらにこれと交換関係

$$[X^I(\tau, \sigma), \dot{X}^J(\tau, \sigma')] = 2\pi\alpha' [X^I(\tau, \sigma), \mathcal{P}^{\tau J}(\tau, \sigma')] = 2\pi\alpha' i\eta^{IJ} \delta(\sigma - \sigma') \quad (57)$$

(第 2 の等号は式 (53) による) を用いると, $\alpha_0^I = \sqrt{2\alpha'} p^I$: (9.52) が交換関係

$$[x_0^I, p^J] = i\eta^{IJ} \quad (58)$$

を満たすことを確かめられる [導出は下記]. 振動子の交換関係 (56) より $p^I = \alpha_0^I / \sqrt{2\alpha'}$ は振動モード α_n^J とは交換する.

弦の古典論において振動子 a_n^μ は $n \geq 1$ に対して定義されており, これに対して古典変数 α_n^μ は式 (9.53):

$$\alpha_n^\mu = a_n^\mu \sqrt{n}, \quad \alpha_{-n}^\mu = a_n^{\mu*} \sqrt{n}$$

によって導入された (9.4 節). そこで演算子 $a_n^I, a_n^{I\dagger}$ を

$$\alpha_n^\mu = a_n^\mu \sqrt{n}, \quad \alpha_{-n}^\mu = a_n^{\mu\dagger} \sqrt{n}, \quad n \geq 1$$

で定義すると, α_n^I の交換関係 (56) は

$$[a_m^I, a_n^{J\dagger}] = \delta_{m,n} \eta^{IJ}, \quad [a_m^I, a_n^J] = 0, \quad [a_m^{I\dagger}, a_n^{J\dagger}] = 0 \quad (59)$$

となる [導出は下記]. よって a_n^I (したがって $\alpha_n^I, n \geq 1$) は消滅演算子, $a_n^{I\dagger}$ (したがって $\alpha_{-n}^I, n \geq 1$) は生成演算子である.

なお α_n^I と a_n^I の関係により, 弦座標の実数性の条件 $(\alpha_n^\mu)^* = \alpha_{-n}^\mu$ は “Hermiticity”

$$(\alpha_n^I)^\dagger = \alpha_{-n}^I \quad (n \geq 1)$$

に置き換わったことになる. [これは $n \geq 1$ に対して $\alpha_{-n}^I, \alpha_n^I$ をそれぞれ生成・消滅演算子に同定できるために必要なことである.] $\alpha_0^I = \sqrt{2\alpha'} p^I$ における p^I を Hermiticity 演算子とすると, これは $n = 0$ に対しても正しい. ここから $X^I(\tau, \sigma)$ が Hermiticity 演算子となることが保証される (計算練習 12.1). [この条件がもともと弦座標の実数性の条件であったことを考えれば, これは自然な結果である.]

12.2 節, 式の導出

■振動子の交換関係 (56) の導出 弦座標の導関数のモード展開は式 (9.59) の形

$$\begin{aligned} (\dot{X}^I + X^{I'}) (\tau, \sigma) &= \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \alpha_n^I e^{-in(\tau+\sigma)}, \quad \sigma \in [0, \pi] \\ (\dot{X}^I - X^{I'}) (\tau, \sigma) &= \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \alpha_n^I e^{-in(\tau-\sigma)}, \quad \sigma \in [0, \pi] \end{aligned}$$

をとる. これらは弦座標を定義する範囲 $\sigma \in [0, \pi]$ で成立する. 第 2 式は

$$(\dot{X}^I - X^{I'}) (\tau, -\sigma) = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \alpha_n^I e^{-in(\tau+\sigma)}, \quad \sigma \in [-\pi, 0]$$

と書き換えられる. ここで [σ の全範囲で定義された] 演算子

$$A^I(\tau, \sigma) = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \alpha_n^I e^{-in(\tau+\sigma)}$$

を導入する. A^I はその定義により周期性 $A^I(\tau, \sigma + 2\pi) = A^I(\tau, \sigma)$ を満たしており, 1 周期に相当する区間 $\sigma \in [-\pi, \pi]$ において弦座標と

$$A^I(\tau, \sigma) = \begin{cases} (\dot{X}^I + X^{I'}) (\tau, \sigma) & \sigma \in [0, \pi] \\ (\dot{X}^I - X^{I'}) (\tau, -\sigma) & \sigma \in [-\pi, 0] \end{cases}$$

のように関係付けられる.

振動子の交換関係 (56) を導くにあたり，交換子 $[A^I(\tau, \sigma), A^J(\tau, \sigma')]$ を計算することが目下の目標となる．これは σ, σ' の範囲に応じて，以下の 4 通りの交換子を与える．

$$\begin{aligned} &[(\dot{X}^I + X^{I'}) (\tau, \sigma), (\dot{X}^J + X^{J'}) (\tau, \sigma')], & \sigma, \sigma' \in [0, \pi] \\ &[(\dot{X}^I + X^{I'}) (\tau, \sigma), (\dot{X}^J - X^{J'}) (\tau, -\sigma')], & \sigma \in [0, \pi], \sigma' \in [-\pi, 0] \\ &[(\dot{X}^I - X^{I'}) (\tau, -\sigma), (\dot{X}^J + X^{J'}) (\tau, \sigma')], & \sigma \in [-\pi, 0], \sigma' \in [0, \pi] \\ &[(\dot{X}^I - X^{I'}) (\tau, -\sigma), (\dot{X}^J - X^{J'}) (\tau, -\sigma')], & \sigma, \sigma' \in [-\pi, 0] \end{aligned}$$

第 1 と第 4 の交換子は，交換関係 (54) よりそれぞれ

$$\begin{aligned} &[(\dot{X}^I + X^{I'}) (\tau, \sigma), (\dot{X}^J + X^{J'}) (\tau, \sigma')] = 4\pi\alpha' i\eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma'), \\ &[(\dot{X}^I - X^{I'}) (\tau, -\sigma), (\dot{X}^J - X^{J'}) (\tau, -\sigma')] = -4\pi\alpha' i\eta^{IJ} \frac{d}{d(-\sigma)} \delta(-\sigma + \sigma') \\ &= 4\pi\alpha' i\eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma') \end{aligned}$$

と計算される (これらは等しい)．第 2 と第 3 の交換子は，交換関係 (55) よりいずれもゼロになる．以上の結果は

$$[A^I(\tau, \sigma), A^J(\tau, \sigma')] = 4\pi\alpha' i\eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma')$$

とまとめられる*8．ここに $A^I(\tau, \sigma)$ の定義式を代入すると

$$\sum_{m', n' \in \mathbf{Z}} e^{im'(\tau+\sigma)} e^{in'(\tau+\sigma')} [\alpha_{m'}^I, \alpha_{n'}^J] = 2\pi i\eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma')$$

となる．この式は $\sigma, \sigma' \in [-\pi, \pi]$ において成立する．

ここから振動子の交換関係を取り出すために，両辺に次の積分を施す．

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma e^{im\sigma} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma' e^{in\sigma'}.$$

すると左辺においては $m' = m, n' = n$ の項が抽出されて

$$e^{-i(m+n)\tau} [\alpha_m^I, \alpha_n^J] \tag{12.42}$$

となる [本稿次節で補足]．一方，右辺の積分は

$$\begin{aligned} &i\eta^{IJ} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma e^{im\sigma} \frac{d}{d\sigma} \int_0^{2\pi} d\sigma' e^{in\sigma'} \delta(\sigma - \sigma') \\ &= i\eta^{IJ} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma e^{im\sigma} \frac{d}{d\sigma} e^{in\sigma} = -n\eta^{IJ} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma e^{i(m+n)\sigma} \\ &= -n\eta^{IJ} \delta_{m+n,0} = m\eta^{IJ} \delta_{m+n,0} \end{aligned}$$

となるので，これらを等置して振動子の交換関係 (56):

$$[\alpha_m^I, \alpha_n^J] = m\eta^{IJ} \delta_{m+n,0} e^{i(m+n)\tau} = m\eta^{IJ} \delta_{m+n,0}$$

を得る．

*8 第 2 と第 3 の σ, σ' の範囲からは $\sigma = \sigma' (=0)$ の場合を省いて良い (第 1 または第 4 の σ, σ' の範囲に含めれば良い)．このとき $\sigma \neq \sigma'$ に対しては $\delta(\sigma - \sigma') = 0$ なので，上式は第 2, 第 3 の交換関係を再現する．

■交換関係 (58) の導出 交換関係 (57):

$$[X^I(\tau, \sigma), \dot{X}^J(\tau, \sigma')] = 2\pi\alpha' i\eta^{IJ} \delta(\sigma - \sigma')$$

を両辺 $0 \leq \sigma \leq \pi$ にわたって積分すると、左辺では X^I のモード展開

$$X^I(\tau, \sigma) = x_0^I + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^I\tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^I \cos n\sigma e^{-in\tau}$$

における振動子の項は寄与を持たず、右辺ではデルタ関数が消えて

$$[x_0^I + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^I\tau, \dot{X}^J(\tau, \sigma')] = 2\alpha' i\eta^{IJ}$$

となる。ここで \dot{X}^J は α_n^J を含む項の和なので、振動子の交換関係 (56) により $[\alpha_0^I, \dot{X}^J] = 0$ である。

$$[x_0^I, \dot{X}^J(\tau, \sigma')] = 2\alpha' i\eta^{IJ}.$$

さらに \dot{X}^J のモード展開 [式 (9.57)] を利用すると、上式から

$$\sqrt{2\alpha'} i\eta^{IJ} = \sum_{n' \in \mathbf{Z}} [x_0^I, \alpha_{n'}^J] \cos n'\sigma' e^{-in'\tau} = [x_0^I, \alpha_0^J] + \sum_{n'=1}^{\infty} [\alpha_{n'}^J e^{-in'\tau} + \alpha_{-n'}^J e^{in'\tau}] \cos n'\sigma' \quad (60)$$

が得られる。これに積分 $\frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\sigma' \cos n\sigma'$ を施すと

$$0 = [x_0^I, \alpha_n^J e^{-in\tau} + \alpha_{-n}^J e^{in\tau}] = [x_0^I, \alpha_n^J] e^{-in\tau} + [x_0^I, \alpha_{-n}^J] e^{in\tau} \quad (12.51)$$

となる。これが任意の τ で成り立つためには、最右辺の各項がそれぞれ単独でゼロにならなければならないので [本稿次節で補足],

$$[x_0^I, \alpha_n^J] = 0 \quad \text{for } n \neq 0$$

を得る。これを上式 (60) に戻すと $[x_0^I, \alpha_0^J] = \sqrt{2\alpha'} i\eta^{IJ}$, すなわち交換関係 (58):

$$[x_0^I, p^J] = i\eta^{IJ}$$

が得られる ($\alpha_0^I = \sqrt{2\alpha'} p^I$).

■振動子 $a_n^I, a_n^{I\dagger}$ に対する交換関係 (59) の導出 振動子の交換関係 (56) は

$$[\alpha_m^I, \alpha_{-n}^J] = m\delta_{m,n}\eta^{IJ}$$

と書き直せる。 m と n が異符号の場合の関係は

$$[a_m^I, a_n^J] = 0, \quad [a_m^{I\dagger}, a_n^{J\dagger}] = 0 \quad (12.61)$$

を与える [本稿次節で補足]. m と n が同符号の場合の関係としては, $m, n > 0$ の場合だけを考えれば充分である. すると

$$[\sqrt{m}a_m^I, \sqrt{n}a_n^{J\dagger}] = m\delta_{m,n}\eta^{IJ}, \quad \therefore [a_m^I, a_n^{J\dagger}] = \frac{m}{\sqrt{mn}}\delta_{m,n}\eta^{IJ} = \delta_{m,n}\eta^{IJ}$$

となる.

12.2 について

■式 (12.42) について 積分は $A^I(\tau, \sigma), A^J(\tau, \sigma')$ の定義されている範囲 $-\pi \leq \sigma, \sigma' \leq \pi$ にわたって行うのが望ましい. この点に注意して式 (12.40) の左辺に式 (12.41) の積分を施すと

$$\begin{aligned} & \sum_{m', n'} e^{-i(m'+n')\tau} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma e^{i(m-m')\sigma} \right) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma' e^{i(n-n')\sigma'} \right) [\alpha_{m'}^I, \alpha_{n'}^J] \\ &= \sum_{m', n'} e^{-i(m'+n')\tau} \delta_{mm'} \delta_{nn'} [\alpha_{m'}^I, \alpha_{n'}^J] \\ &= e^{-i(m+n)\tau} [\alpha_m^I, \alpha_n^J] : (12.42) \end{aligned}$$

を得る.

■「 x_0^J との間だけに非自明な交換関係が予想される」(p.239, 下から 8 行目) について 点粒子の座標 x^I を弦のモード展開 (12.32) における $x_0^I + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^I\tau$ に対応させると, 点粒子の場合の交換関係 (11.27): $[x^I, p^J] = i\eta^{IJ}$ から交換関係 (12.54): $[x_0^I, p^J] = i\eta^{IJ}$ が予想される ($[\alpha_0^I, p^J] = \sqrt{2\alpha'}[p^I, p^J] = 0$).

■「各項がそれぞれ単独でゼロにならない(証明せよ!)」(p.240, 1.7.8) について 式 (12.51) において τ を $-\tau$ に置き換えた式 (これを式 (12.51)' と呼ぼう) が成り立つ. よって

$$\begin{aligned} (\text{式 (12.51)}) \times e^{-in\tau} - (\text{式 (12.51)'}) \times e^{in\tau} : [x_0^I, \alpha_n^J] &= 0 \quad (n \geq 1) \\ (\text{式 (12.51)}) \times e^{in\tau} - (\text{式 (12.51)'}) \times e^{-in\tau} : [x_0^I, \alpha_{-n}^J] &= 0 \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

であり, これらは式 (12.52):

$$[x_0^I, \alpha_n^J] = 0 \quad \text{for} \quad n \neq 0$$

にまとめられる.

■式 (12.61) について 式 (12.60): $[\alpha_m^I, \alpha_{-n}^J] = m\delta_{m,n}\eta^{IJ}$ は

$$m, -n \geq 1 \text{ のとき } [a_m^I, a_{-n}^J] = 0, \quad m, -n \leq -1 \text{ のとき } [a_{-m}^{I\dagger}, a_n^{J\dagger}] = 0$$

となり, これらは $m, n \geq 1$ として式 (12.61):

$$[a_m^I, a_n^J] = 0. \quad [a_m^{I\dagger}, a_n^{J\dagger}] = 0$$

に書き換えられる.

計算練習 12.1

モード展開 (12.32):

$$X^I(\tau, \sigma) = x_0^I + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^I\tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n^I e^{-in\tau} - \alpha_{-n}^I e^{in\tau}) \frac{\cos n\sigma}{n}$$

より $X^I(\tau, \sigma)$ の Hermite 性

$$\begin{aligned} (X^I(\tau, \sigma))^\dagger &= (x_0^I)^\dagger + \sqrt{2\alpha'}(\alpha_0^I)^\dagger \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n^{I\dagger} e^{-in\tau} - \alpha_{-n}^{I\dagger} e^{in\tau}) \frac{\cos n\sigma}{n} \\ &= x_0^I + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^I \tau - i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{-n}^I e^{in\tau} - \alpha_n^I e^{-in\tau}) \frac{\cos n\sigma}{n} \\ &\quad (\because \text{式 (12.55)} : (x_0^I)^\dagger = x_0^I, \text{ 式 (12.58)} : (\alpha_n^I)^\dagger = \alpha_{-n}^I) \\ &= X^I(\tau, \sigma) : (12.59) \end{aligned}$$

が確かめられる。

12.3 調和振動子群としての弦

前節で用いた交換関係 (51): $[X^I(\tau, \sigma), \mathcal{P}^{\tau J}(\tau, \sigma')] = i\eta^{IJ} \delta(\sigma - \sigma')$ はデルタ関数を含むために、直感的な把握が難しい。そこで前節で得た結果をより物理的な観点から導出する。

$$S = \int d\tau d\sigma \mathcal{L} = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau \int_0^\pi d\sigma (\dot{X}^I \dot{X}^I - X^{I'} X^{I'}) \quad (12.81)$$

という作用を考えると、これは

- 運動量密度 $\mathcal{P}^{\tau I}$ に等しい、 X^I と正準共役な運動量

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^I} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^I$$

- 正しい運動方程式 $\ddot{X}^I - X^{I''} = 0$
- 正しいハミルトニアン (12.15):

$$H = \int_0^\pi d\sigma (\mathcal{P}^{\tau I} \dot{X}^I - \mathcal{L}) = \int_0^\pi d\sigma \left(\pi\alpha' \mathcal{P}^{\tau I} \mathcal{P}^{\tau I} + \frac{1}{4\pi\alpha'} X^{I'} X^{I'} \right)$$

を与える [運動 (波動) 方程式の導出は下記]。 $X^I(\tau, \sigma)$ が Neumann 境界条件を満たすことに注意して

$$X^I(\tau, \sigma) = q^I(\tau) + 2\sqrt{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} q_n^I(\tau) \frac{\cos n\sigma}{\sqrt{n}}$$

と σ について展開し、この式によって古典変数 $q^I(\tau), q_n^I(\tau)$ を導入する。このとき作用は

$$S = \int d\tau L = \int d\tau \left[\frac{1}{4\alpha'} \dot{q}^I \dot{q}^I + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n} \dot{q}_n^I \dot{q}_n^I - \frac{n}{2} q_n^I q_n^I \right) \right] \quad (12.89)$$

となり (計算練習 12.2), ここから正準運動量 $p^I = \partial L / \partial \dot{q}^I, p_n^I = \partial L / \partial \dot{q}_n^I$ が定義される。交換関係

$$[q^I, p^J] = i\eta^{IJ}, \quad [q_m^I, p_n^J] = i\delta_{m,n} \eta^{IJ}$$

を課して理論の量子化を行う。このときラグランジアン L の q_n^I に関する項 $\frac{1}{2n} \dot{q}_n^I \dot{q}_n^I - \frac{n}{2} q_n^I q_n^I$ は q_n^I が調和振動子であることを意味していることに注意して調和振動子の量子論を繰り返すと、 $a_n^{I\dagger}, a_n^I$ を生成・消滅演算子として

$$q_n^I(\tau) = \frac{i}{\sqrt{2}} (a_n^I e^{-in\tau} - a_n^{I\dagger} e^{in\tau})$$

と書けることが分かる。 $q^I(\tau)$ の時間発展についても、Heisenberg 方程式から

$$q^I(\tau) = x_0^I + 2\alpha' p^I \tau \quad (61)$$

と定まるので [導出は下記]、再び演算子 $X^I(\tau, \sigma)$ のモード展開

$$X^I(\tau, \sigma) = x_0^I + 2\alpha' p^I \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^I e^{-in\tau} - a_n^{I\dagger} e^{in\tau}) \frac{\cos n\sigma}{\sqrt{n}}$$

を得る。以上より前節までの弦の量子化の手続きは、本節で行ったように振動子座標に同定される古典変数に対して、デルタ関数を含まない通常の正準交換関係を課す措置と等価である。

12.3 節、式の導出

■作用 (12.81) から波動方程式が導かれることの確認 弦座標に関して始点と終点を固定して変分をとると、

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\tau \int_0^\pi d\sigma \left(\partial_\tau(\delta X^I) \dot{X}^I - \partial_\sigma(\delta X^I) X^{I'} \right) \\ &= -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\tau \left[X^{I'} \delta X^I \Big|_0^\pi + \int_0^\pi d\sigma \delta X^I (\ddot{X}^I - X^{I''}) \right] \end{aligned}$$

となるので、Dirichlet 境界条件 ($\delta X^I = 0$) または Neumann 境界条件 ($X^{I'} = 0$) に対して、運動方程式として波動方程式 $\ddot{X}^I - X^{I''} = 0$ が得られる。

■ $q^I(\tau)$ の式 (61) の導出 作用 (12.89) に対してゼロモードの正準運動量と、その交換関係は

$$p^I = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^I} = \frac{1}{2\alpha'} \dot{q}^I, \quad [q^I, p^J] = i\eta^{IJ}$$

なので、ハミルトニアンは

$$H = p^I \dot{q}^I + p_n^I \dot{q}_n^I - L = \alpha' p^I p^I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} (p_n^I p_n^I + q_n^I q_n^I)$$

で与えられる。よって $q^I(\tau)$ に対する Heisenberg 方程式を書き下すと

$$\dot{q}^I(\tau) = \frac{1}{i} [q^I(\tau), H] = \frac{1}{i} \alpha' [q^I(\tau), p^J(\tau) p^J(\tau)] = 2\alpha' p^I(\tau)$$

となるので、この微分方程式の解を式 (61):

$$q^I(\tau) = x_0^I + 2\alpha' p^I \tau$$

のように書くことができる。

12.3 について

■ 「……交換関係 (12.10) はデルタ関数を含むために、おそらく直観的な把握が最も難しいであろう」 (12.3 節, 1.4.5) について デルタ関数を含む正準交換関係を納得することが、12.3 節の主要な目的と言える。この点についてはより簡単に、次のように理解することもできる [6, p.35]。弦の量子化は場の理論の定式化と良く馴染むことを踏まえ、場の理論を念頭に置いて説明する。空間を体積 ΔV の胞 (セル) に分割し、各格子点 (胞

の中心点)における場の値 ϕ_r を力学変数と見なす。このとき胞に含まれる共役な運動量は $\pi_r \Delta V$ だから、通常の正準交換関係は

$$[\phi_r(j, t), \pi_s(j', t) \Delta V] = i\hbar \delta_{rs} \delta_{jj'}, \quad [\phi_r(j, t), \phi_s(j', t)] = 0, \quad [\pi_r(j, t), \pi_s(j', t)] = 0$$

と書ける ($\pi_r \equiv \partial \mathcal{L} / \partial \dot{\phi}_r$ は ϕ_r に共役な場)。ただし j, j' は格子点を指定する番号である。(これは同時刻交換関係である。) 体積 $\Delta V \rightarrow 0$ の極限をとると、場の交換関係を

$$[\phi_r(\mathbf{x}, t), \pi_s(\mathbf{x}', t)] = i\hbar \delta_{rs} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad [\phi_r(\mathbf{x}, t), \phi_s(\mathbf{x}', t)] = 0, \quad [\pi_r(\mathbf{x}, t), \pi_s(\mathbf{x}', t)] = 0$$

と設定すれば良いことが分かる (\mathbf{x}, \mathbf{x}' は胞 j, j' の中の格子点)。これは各胞に共通の体積を $\Delta V \rightarrow 0$ とすると、

$$\frac{\delta_{jj'}}{\Delta V} \rightarrow \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

となるからである。実際このとき各格子点 j で定義された量 f_j が場の量 $f(\mathbf{x})$ に移行するものとする、恒等式

$$f_j = \sum_{j'} f_{j'} \delta_{jj'}$$

はデルタ関数を定義付ける正しい式

$$f(\mathbf{x}) = \int f(\mathbf{x}') \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d^3 x'$$

に移行する。

■相対論的な弦のエlegantな作用 (12.81) について これは非相対論的な弦の作用 (4.36) と類似している。作用 (4.36) のラグランジアン密度における全体の係数は、相対論的な弦に対する関係 $T_0 = \mu_0 c^2$ を援用すれば $\frac{1}{2} T_0 = \frac{1}{4\pi\alpha'}$ となって、作用 (12.81) のそれと完全に一致する。

■p.245 訳註の引用

第9章以降では自然単位系を採用し、かつ σ と τ を無単位パラメーターとしていることに注意を促しておく。 $[X^I] = L$, $[\alpha'] = L^2$, $[p^I] = L^{-1}$ であり、 α_n^I (α_0^I を含む), S , \mathcal{L} , $H(= -\partial/\partial\tau)$, L_n^\perp などはずべて無単位量である。

ラグランジアン密度 \mathcal{L} が無単位 (無次元) となるのは、自然単位系で作用 $S = \int d\tau d\sigma \mathcal{L}$ が無次元であり、パラメーター $d\tau d\sigma$ が無次元であることから理解できる。

計算練習 12.2

作用の式 (12.81):

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau \int_0^\pi d\sigma (\dot{X}^I \dot{X}^I - X'^I X'^I)$$

において三角関数の直交性に注意すると

$$\begin{aligned} \int_0^\pi d\sigma \dot{X}^I \dot{X}^I &= \dot{q}^I \dot{q}^I \int_0^\pi d\sigma + 4\alpha' \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} q_n^I q_n^I \int_0^\pi d\sigma \cos^2 n\sigma = \pi \dot{q}^I \dot{q}^I + 4\pi\alpha' \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2n} q_n^I q_n^I, \\ \int_0^\pi d\sigma X'^I X'^I &= 4\alpha' \sum_{n=1}^\infty n q_n^I q_n^I \int_0^\pi d\sigma \sin^2 n\sigma = 4\pi\alpha' \sum_{n=1}^\infty \frac{n}{2} q_n^I q_n^I \end{aligned}$$

となるので式 (12.89):

$$S = \int d\tau \left[\frac{1}{4\alpha'} \dot{q}^I \dot{q}^I + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n} \dot{q}_n^I \dot{q}_n^I - \frac{n}{2} q_n^I q_n^I \right) \right]$$

を得る.

12.4 横方向の Virasoro 演算子

$X^-(\tau, \sigma)$ のモード展開における展開係数 α_n^- は, 横方向の Virasoro モード

$$L_n^\perp \equiv \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbf{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I$$

を用いて $\sqrt{2\alpha'} \alpha_n^- = \frac{1}{p^+} L_n^\perp$ と与えられた (9.5 節). 量子論に移行すると L_n^\perp は Virasoro “演算子” となる. ここで $n=0$ に対しては α_{n-p}^I と α_p^I は非可換だから, その順序が問題となる.

Virasoro 演算子 L_0^\perp を正規順序, すなわち消滅演算子 α_p^I が生成演算子 α_{-p}^I の右側に配置されている順序で定義する ($p > 0$). [本稿では正規順序化された演算子を $N[\dots]$ と表すことにすると] L_0^\perp は

$$N[L_0^\perp] = \frac{1}{2} \alpha_0^I \alpha_0^I + \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I = \alpha' p^I p^I + \sum_{p=1}^{\infty} p a_p^{I\dagger} a_p^I$$

として再定義される. これは Hermite である. この措置は正規順序化定数

$$a = \frac{1}{2} (D-2) \sum_{p=1}^{\infty} p \quad (62)$$

のシフト

$$L_0^\perp = N[L_0^\perp] + a$$

をもたらす [導出は下記]. ところで p^- は以下のように L_0^\perp と関係付けられているから, p^- にも, したがって質量の自乗の演算子にも定数シフトが導入される:

$$\begin{aligned} 2\alpha' p^- &= \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^- : (9.52) \\ &= \frac{1}{p^+} L_0^\perp \\ &= \frac{1}{p^+} (N[L_0^\perp] + a), \end{aligned}$$

$$M^2 = -p^2 = 2p^+ p^- - p^I p^I = \frac{1}{\alpha'} \left(a + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{I\dagger} a_n^I \right).$$

付加定数 $a = \frac{1}{2} (D-2) \sum_{p=1}^{\infty} p$ は無限大であるように見えるけれど, 数学公式

$$\sum_{p=1}^{\infty} p = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots = -\frac{1}{12}$$

(問題 12.4) により, これは有限値

$$a = -\frac{1}{24} (D-2)$$

をとる.

$L_n^\perp = \sqrt{2\alpha'} p^+ \alpha_n^-$ は $(\alpha_n^J)^\dagger = \alpha_{-n}^J$ と類似の関係

$$(L_n^\perp)^\dagger = L_{-n}^\perp \quad (63)$$

を満たすことが $n \neq 0$ に対して確かめられる [確認は下記]. $n = 0$ に対して, これは $N[L_0^\perp]$ の Hermite 性として満たされている.

α_n^I の基本的交換関係 (56):

$$[\alpha_m^I, \alpha_n^J] = m\eta^{IJ} \delta_{m+n,0}$$

および式 (12.52): $[x_0^I, \alpha_n^J] = 0 (n \neq 0)$, 式 (12.53): $[x_0^I, \alpha_0^J] = \sqrt{2\alpha'} i\eta^{IJ}$ を用いると

$$[L_m^\perp, \alpha_n^J] = -n\alpha_{m+n}^J, \quad (12.118)$$

$$[L_m^\perp, x_0^I] = -i\sqrt{2\alpha'} \alpha_m^I \quad (12.119)$$

が得られ (これらは L_0^\perp を $N[L_0^\perp]$ に置き換えても正しい) [下記の式 (12.118) の導出と, 計算練習 12.3, 12.4 を参照], さらに Virasoro 演算子の非可換性

$$N[N[L_m^\perp], N[L_n^\perp]] = (m-n)N[L_{m+n}^\perp] + \frac{D-2}{12}(m^3-m)\delta_{m+n,0} \quad (12.133)$$

が導かれる [導出は下記].

Virasoro 演算子が弦の座標に及ぼす作用は

$$\delta X^I = \varepsilon [L_m^\perp, X^I] = \varepsilon (\xi_m^\tau \dot{X}^I + \xi_m^\sigma X^{I'}), \quad (64)$$

$$\begin{cases} \xi_m^\tau(\tau, \sigma) \equiv -ie^{im\tau} \cos m\sigma \\ \xi_m^\sigma(\tau, \sigma) \equiv e^{im\tau} \sin m\sigma \end{cases} \quad (65)$$

と評価される (ε は無限小のパラメーター) [導出は下記]. [ここに ξ_m^τ, ξ_m^σ の上付きの添字 τ, σ は関数の名称であり, そのパラメータ τ, σ 依存性を表すものではない.] これは Virasoro 演算子がパラメーターの付け替え

$$\tau \rightarrow \tau + \varepsilon \xi_m^\tau(\tau, \sigma), \quad \sigma \rightarrow \sigma + \varepsilon \xi_m^\sigma(\tau, \sigma) \quad (66)$$

を生成しているものと理解できる [説明は下記].

- 特に L_0^\perp は時間推進を生成する:

$$[L_0^\perp, X^I] = -i\partial_\tau X^I.$$

これは L_0^\perp が付加定数の違いを除き, 弦のハミルトニアンであること

$$H = 2\alpha' p^+ p^- = L_0^\perp$$

(12.1 節) から期待される結果である.

- 端点でのパラメーター σ の値の変化は

$$\varepsilon \xi_m^\sigma(\tau, \sigma = 0, \pi) = 0$$

となり, 端点の値は $\sigma = 0, \pi$ のままであることが保証される.

- L_m^\perp が生成する弦の座標の変化 δX^I は実数ではない. 反 Hermite 結合

$$L_m^\perp - L_{-m}^\perp, \quad i(L_m^\perp + L_{-m}^\perp) \quad (12.141)$$

は弦の座標 X^I に実数の変化をもたらす [確認は下記および計算練習 12.6].

12.4 節, 式の導出など

■正規順序化定数の表式 (62) の導出

$$L_0^\perp = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbf{Z}} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I = \frac{1}{2} \alpha_0^I \alpha_0^I + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p^I \alpha_{-p}^I$$

の最右辺において最初の 2 項は既に正規順序になっている. そこで最後の項を正規順序

$$N \left[\frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p^I \alpha_{-p}^I \right] = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I$$

に並び替えたときのお釣りを調べると,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p^I \alpha_{-p}^I &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} (\alpha_{-p}^I \alpha_p^I + [\alpha_p^I, \alpha_{-p}^I]) = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} p \eta^{II} = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I + \frac{1}{2} (D-2) \sum_{p=1}^{\infty} p \\ &= N \left[\frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p^I \alpha_{-p}^I \right] + a, \\ a &= \frac{1}{2} (D-2) \sum_{p=1}^{\infty} p : (62) \end{aligned}$$

となる.

■横方向 Virasoro 演算子の “Hermite 性” (63) を $n \neq 0$ に対して確認

$$(L_n^\perp)^\dagger = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbf{Z}} (\alpha_{n-p}^I \alpha_p^I)^\dagger = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbf{Z}} (\alpha_p^I)^\dagger (\alpha_{n-p}^I)^\dagger = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbf{Z}} \alpha_{-p}^I \alpha_{-n+p}^I$$

であり, 最右辺の振動子はモード番号の和が $-n (\neq 0)$ なので可換である. そこで振動子の順序を入れ替え, $p \rightarrow -p$ とすると式 (63):

$$(L_n^\perp)^\dagger = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbf{Z}} \alpha_{-n-p}^I \alpha_p^I = L_{-n}^\perp$$

を得る.

■交換関係 (12.118) の導出 ここでは L_0^\perp として, 定義式 (12.100): $L_n^\perp \equiv \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbf{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I$ に基づく正規順序化を施していない横方向 Virasoro 演算子を想定する. (正規順序化した演算子 $N[L_0^\perp]$ に対しては計算練習 12.3 を参照.)

$$\begin{aligned} [L_m^\perp, \alpha_n^J] &= \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbf{Z}} [\alpha_{m-p}^I \alpha_p^I, \alpha_n^J] = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbf{Z}} (\alpha_{m-p}^I [\alpha_p^I, \alpha_n^J] + [\alpha_{m-p}^I, \alpha_n^J] \alpha_p^I) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbf{Z}} (p \delta_{p+n,0} \alpha_{m-p}^J + (m-p) \delta_{m-p+n,0} \alpha_p^J) \\ &= \frac{1}{2} (-n \alpha_{m+n}^J - n \alpha_{m+n}^J) \\ &= -n \alpha_{m+n}^J : (12.118). \end{aligned}$$

■横方向 Virasoro 演算子の交換関係 (12.133) の導出 ここでは教科書にならって、いちいち正規順序化を $N[\dots]$ のように明記しない。この点については本稿次節で補足する。

Virasoro 演算子 (12.100): $L_n^\perp \equiv \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbf{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I$ を正規順序化して

$$L_m^\perp = \frac{1}{2} \sum_{k \geq 0} \alpha_{m-k}^I \alpha_k^I + \frac{1}{2} \sum_{k < 0} \alpha_k^I \alpha_{m-k}^I \quad (12.120)$$

と書く。実際、右辺の第 1 の和において右側の α が消滅演算子 (もしくはゼロモード α_0^I)、第 2 の和において左側の α が生成演算子となっている。これを用いて交換子を計算すると

$$\begin{aligned} [L_m^\perp, L_n^\perp] &= \frac{1}{2} \sum_{k \geq 0} [\alpha_{m-k}^I \alpha_k^I, L_n^\perp] + \frac{1}{2} \sum_{k < 0} [\alpha_k^I \alpha_{m-k}^I, L_n^\perp] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k \geq 0} [\alpha_{m-k}^I, L_n^\perp] \alpha_k^I + \frac{1}{2} \sum_{k < 0} \alpha_k^I [\alpha_{m-k}^I, L_n^\perp] \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k \geq 0} \alpha_{m-k}^I [\alpha_k^I, L_n^\perp] + \frac{1}{2} \sum_{k < 0} [\alpha_k^I, L_n^\perp] \alpha_{m-k}^I \end{aligned} \quad (12.121)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \sum_{k \geq 0} (m-k) \alpha_{m+n-k}^I \alpha_k^I + \frac{1}{2} \sum_{k < 0} (m-k) \alpha_k^I \alpha_{m+n-k}^I \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k \geq 0} k \alpha_{m-k}^I \alpha_{k+n}^I + \frac{1}{2} \sum_{k < 0} k \alpha_{k+n}^I \alpha_{m-k}^I \end{aligned} \quad (12.122)$$

となる。最右辺の 1 行目の各項は常に正規順序になっている。2 行目の各項は、 m と n の値に応じて正規順序化が必要となる場合が生じる。以下、 $m+n \neq 0$ のときと $m+n=0$ のときを場合分けして考察する。

$m+n \neq 0$ の場合 式 (12.122) の右辺におけるすべての演算子対が可換となることに注意して

$$\begin{aligned} [L_m^\perp, L_n^\perp] &= \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbf{Z}} (m-k) \alpha_{m+n-k}^I \alpha_k^I + \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbf{Z}} k \alpha_{m-k}^I \alpha_{k+n}^I \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbf{Z}} (m-k) \alpha_{m+n-k}^I \alpha_k^I + \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbf{Z}} (k-n) \alpha_{m+n-k}^I \alpha_{k+n}^I \quad (\text{第 2 項で } k \rightarrow k-n \text{ とおいた}) \\ &= (m-n) \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbf{Z}} \alpha_{m+n-k}^I \alpha_k^I \end{aligned} \quad (12.123)$$

とできる。 $m+n \neq 0$ なので最右辺の演算子積は交換するから、これに正規順序化を施す必要はない。上式は

$$[L_m^\perp, L_n^\perp] = (m-n) L_{m+n}^\perp, \quad m+n \neq 0 \quad (12.124)$$

を意味する。すべての m と n に関して上式 (12.124) が満たされるような演算子 L_n^\perp の集合 ($n \in \mathbf{Z}$) を考えると、これは“中心拡大 (central extension) Virasoro 代数”または“Witt 代数”と呼ばれる Lie 代数を規定する (問題 12.5)。もっとも実際には横方向 Virasoro 演算子 L_n^\perp に対しては、 $m+n=0$ の場合には上式 (12.124) は成立しない。

$m+n=0$ の場合 このとき $n=-m$ と書けるので、式 (12.122) は

$$\begin{aligned} [L_m^\perp, L_{-m}^\perp] &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (m-k) \alpha_{-k}^I \alpha_k^I + \frac{1}{2} \sum_{k < 0} (m-k) \alpha_k^I \alpha_{-k}^I \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} k \alpha_{m-k}^I \alpha_{k-m}^I + \frac{1}{2} \sum_{k < 0} k \alpha_{k-m}^I \alpha_{m-k}^I \end{aligned} \quad (12.125)$$

となる．ここで右側の振動子がすべて a_k^I となるように和をとる添字を付け替えよう．1行目の第2項において $k \rightarrow -k$ とし，2行目の第1項において $k \rightarrow m+k$ とし，2行目の第2項において $k \rightarrow m-k$ とすると

$$\begin{aligned} [L_m^\perp, L_{-m}^\perp] &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (m-k) \alpha_{-k}^I \alpha_k^I + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (m+k) \alpha_{-k}^I \alpha_k^I \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=-m}^{\infty} (m+k) \alpha_{-k}^I \alpha_k^I + \frac{1}{2} \sum_{k=m+1}^{\infty} (m-k) \alpha_{-k}^I \alpha_k^I \end{aligned} \quad (12.126)$$

と書き換えられる．ここで $m > 0$ を仮定しても一般性を失わない．すると上式 (12.126) の2行目の第1項における $-m \leq k \leq 0$ の部分以外は正規順序になっている．そこで2行目の第1項から次のように $-m \leq k \leq 0$ の和を分離して，正規順序化する．

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \sum_{k=0}^m (m-k) \alpha_k^I \alpha_{-k}^I + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (m+k) \alpha_{-k}^I \alpha_k^I \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^m (m-k) [\alpha_k^I, \alpha_{-k}^I] + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^m (m-k) \alpha_{-k}^I \alpha_k^I + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (m+k) \alpha_{-k}^I \alpha_k^I. \end{aligned}$$

交換子を評価して，結果を上式 (12.126) に戻すと

$$[L_m^\perp, L_{-m}^\perp] = \sum_{k=0}^{\infty} (m-k) \alpha_{-k}^I \alpha_k^I + \sum_{k=1}^{\infty} (m+k) \alpha_{-k}^I \alpha_k^I + (D-2)A(m), \quad (12.127)$$

$$A(m) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^m k(m-k) = \frac{1}{2} m \sum_{k=1}^m k - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m k^2 \quad (12.128)$$

を得る [本稿次節で補足]．数学公式

$$\sum_{k=1}^m k^2 = \frac{1}{6} (2m^3 + 3m^2 + m) \quad (12.129)$$

を用いて $A(m)$ の和を計算すると

$$A(m) = \frac{1}{4} m^2 (m+1) - \frac{1}{12} (2m^3 + 3m^2 + m) = \frac{1}{12} (m^3 - m)$$

となる．これを式 (12.127) に代入し，和を展開すると

$$\begin{aligned} [L_m^\perp, L_{-m}^\perp] &= 2m \left(\frac{1}{2} \alpha_0^I \alpha_0^I + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{-k}^I \alpha_k^I \right) + \frac{1}{12} (D-2) (m^3 - m) \\ &= 2m L_0^\perp + \frac{1}{12} (D-2) (m^3 - m) \end{aligned} \quad (12.131)$$

を得る．

$m+n \neq 0$ の場合の式 (12.124) と $m+n=0$ の場合の式 (12.131) は式 (12.133):

$$[L_m^\perp, L_n^\perp] = (m-n) N[L_{m+n}^\perp] + \frac{D-2}{12} (m^3 - m) \delta_{m+n,0}$$

にまとめられる．この交換関係を満たす演算子 L_n^\perp の集合 ($n \in \mathbf{Z}$) は“中心拡大した Virasoro 代数”を規定する．上式の第2項は代数の中ですべての他の演算子と可換であるため，中心拡大項と呼ばれる．

■Virasoro 演算子が弦の座標に及ぼす作用 (64), (65) の導出 読者の便宜のために、弦座標のモード展開を改めて引用しておく。

$$X^I(\tau, \sigma) = x_0^I + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^I\tau + i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n \neq 0} \frac{1}{n}\alpha_n^I \cos n\sigma e^{-in\tau},$$

$$(\dot{X}^I \pm X^{I'}) = \sqrt{2\alpha'}\sum_{n \in \mathbf{Z}} \alpha_n^I e^{-in(\tau \pm \sigma)}.$$

これと交換関係 (12.118), (12.119) を利用して、求める交換子は次のように計算できる。

$$\begin{aligned} [L_m^\perp, X^I(\tau, \sigma)] &= [L_m^\perp, x_0^I] + i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \cos n\sigma e^{-in\tau} [L_m^\perp, \alpha_n^I] \\ &= -i\sqrt{2\alpha'}\alpha_m^I - i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n \neq 0} \cos n\sigma e^{-in\tau} \alpha_{m+n}^I \\ &= -i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n \in \mathbf{Z}} \cos n\sigma e^{-in\tau} \alpha_{m+n}^I \\ &= -i\sqrt{2\alpha'}\frac{1}{2}\sum_{n \in \mathbf{Z}} (e^{-in(\tau-\sigma)} + e^{-in(\tau+\sigma)})e^{-in\tau} \alpha_{m+n}^I \\ &= -i\sqrt{2\alpha'}\frac{1}{2}\sum_{n \in \mathbf{Z}} (e^{-i(n-m)(\tau-\sigma)} + e^{-i(n-m)(\tau+\sigma)})e^{-in\tau} \alpha_n^I \quad (n \rightarrow n-m) \\ &= -\frac{i}{2}e^{im(\tau-\sigma)}\sqrt{2\alpha'}\sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{-in(\tau-\sigma)} \alpha_n^I \\ &\quad -\frac{i}{2}e^{im(\tau+\sigma)}\sqrt{2\alpha'}\sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{-in(\tau+\sigma)} \alpha_n^I \\ &= -\frac{i}{2}e^{im(\tau-\sigma)}(\dot{X}^I - X^{I'}) - \frac{i}{2}e^{im(\tau+\sigma)}(\dot{X}^I + X^{I'}) \\ &= -ie^{im\tau} \cos m\sigma \dot{X}^I + e^{im\tau} \sin m\sigma X^{I'}. \end{aligned}$$

この結果は式 (64), (65):

$$\delta X^I = \varepsilon [L_m^\perp, X^I] = \varepsilon (\xi_m^\tau \dot{X}^I + \xi_m^\sigma X^{I'}),$$

$$\begin{cases} \xi_m^\tau(\tau, \sigma) \equiv -ie^{im\tau} \cos m\sigma \\ \xi_m^\sigma(\tau, \sigma) \equiv e^{im\tau} \sin m\sigma \end{cases}$$

のように書ける。

■Virasoro 演算子が弦座標に及ぼす作用の解釈 (66) の理由 実際、Virasoro 演算子がパラメーターの付け替え (66) を生成しているものとする、弦座標は

$$\begin{aligned} X^I(\tau + \varepsilon\xi_m^\tau, \sigma + \varepsilon\xi_m^\sigma) &= X^I(\tau, \sigma) + \varepsilon(\xi_m^\tau \dot{X}^I + \xi_m^\sigma X^{I'}) \\ &= X^I(\tau, \sigma) + \varepsilon [L_m^\perp, X^I(\tau, \sigma)] \end{aligned}$$

と変化することになるので、式 (64), (65) が再現される。

■ L_m^\perp の反 Hermite 結合 (12.141) が生成するパラメーターの変化が実数であることの確認 式 (12.141):

$$L_m^\perp - L_{-m}^\perp, \quad i(L_m^\perp + L_{-m}^\perp)$$

の第 1 の演算子について、これがもたらす弦座標の変化

$$\delta X^I = \varepsilon[(L_m^\perp - L_{-m}^\perp), X^I] = \varepsilon\{(\xi_m^\tau - \xi_{-m}^\tau)\dot{X}^I + (\xi_m^\sigma - \xi_{-m}^\sigma)X^{I'}\}$$

はパラメーターの付け替え (12.142):

$$\begin{aligned}\tau &\rightarrow \tau + \varepsilon\xi^\tau, & \sigma &\rightarrow \sigma + \varepsilon\xi^\sigma, \\ \xi_m^\tau &= \xi_m^\tau - \xi_{-m}^\tau = -i(e^{im\tau} - e^{-im\tau})\cos m\sigma = 2\sin m\tau \cos m\sigma, \\ \xi_m^\sigma &= \xi_m^\sigma - \xi_{-m}^\sigma = (e^{im\tau} + e^{-im\tau})\sin m\sigma = 2\cos m\tau \sin m\sigma\end{aligned}$$

に対応している。これらのパラメーターの変化は実数となっている。

もう 1 つの演算子 $i(L_m^\perp + L_{-m}^\perp)$ の生成するパラメーター変化の実数性の確認は計算練習 12.6 で行う。

12.4 について

■ M^2 の式 (12.108) について 正規順序化の操作を $N[\dots]$ という記法によって明記する。

$$M^2 = 2p^+p^- - p^I p^I = \frac{1}{\alpha'} L_0^\perp - p^I p^I = \frac{1}{\alpha'} L_0^\perp - \frac{1}{2\alpha'} \alpha_0^I \alpha_0^I = \frac{1}{2\alpha'} \sum_{p \neq 0} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I$$

を正規順序化すると

$$N[M^2] = \frac{1}{\alpha'} N[L_0^\perp] - p^I p^I = N \left[\frac{1}{2\alpha'} \sum_{p \neq 0} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I \right] = \frac{1}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{I\dagger} a_n^I$$

であり、式 (12.108) は

$$\alpha' M^2 = \alpha' N[M^2] + a$$

と書ける。

■ Virasoro 演算子の交換関係 (12.133) の導出について 正規順序化の操作を $N[\dots]$ という記法によって明記する。

- 式 (12.121), 式 (12.122), 式 (12.123), 式 (12.124) の左辺は $[N[L_m^\perp], N[L_n^\perp]]$ である。
 - 式 (12.123), 式 (12.124) の左辺は $N[N[L_m^\perp], N[L_n^\perp]]$ に等しい。
 - 式 (12.124) の右辺における L_{m+n}^\perp は $N[L_{m+n}^\perp]$ に等しい。
- 式 (12.125), 式 (12.126) の左辺は $[N[L_m^\perp], N[L_{-m}^\perp]]$ である。
- 式 (12.127), 式 (12.131), 式 (12.132) の左辺は $N[N[L_m^\perp], N[L_{-m}^\perp]]$ である。
- 式 (12.133) の左辺は $N[N[L_m^\perp], N[L_n^\perp]]$, 右辺における L_{m+n}^\perp は $N[L_{m+n}^\perp]$ である。

■ 式 (12.127), 式 (12.128) における「交換関子を評価」(p.251, l.17) について

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^m (m-k) [\alpha_k^I, \alpha_{-k}^I] = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^m (m-k) k \eta^{II} \delta_{k-k,0} = (D-2) \frac{1}{2} \sum_{k=0}^m k(m-k) \equiv (D-2)A(m).$$

■ 式 (12.141) の反 Hermite 性について 式 (12.112): $(L_m^\perp)^\dagger = L_{-m}^\perp$ より反 Hermite 性

$$(L_m^\perp - L_{-m}^\perp)^\dagger = -(L_m^\perp - L_{-m}^\perp), \quad \{i(L_m^\perp + L_{-m}^\perp)\}^\dagger = -i(L_m^\perp + L_{-m}^\perp)$$

を確かめられる。

計算練習 12.3

交換関係 (12.118) は L_n^\perp の定義式 (12.100) を用いて導かれた。このため L_0^\perp の代わりに $N[L_0^\perp]$ を用いてもこれが満たされるかは改めて確認する必要がある。正規順序化定数 a に対して $L_0^\perp = N[L_0^\perp] + a$ なので

$$[N[L_0^\perp], \alpha_n^J] = [L_0^\perp, \alpha_n^J] = -n\alpha_n^J$$

が期待される。実際 $N[L_0^\perp]$ の式 (12.105) より

$$\begin{aligned} [N[L_0^\perp], \alpha_n^J] &= \sum_{p=1}^{\infty} [\alpha_{-p}^I \alpha_p^I, \alpha_n^J] \quad (\because [\alpha_0^I, \alpha_0^J] = 0) \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} p(\delta_{p+n,0} \alpha_{-p}^J - \delta_{-p+n,0} \alpha_p^J) \\ &= \begin{cases} \sum_{p=1}^{\infty} p \delta_{p+n,0} \alpha_{-p}^J = -n\alpha_n^J & (n \leq 1) \\ 0 & (n = 0) \\ -\sum_{p=1}^{\infty} p \delta_{-p+n,0} \alpha_p^J = -n\alpha_n^J & (n \geq 1) \end{cases} \\ &= -n\alpha_n^J \end{aligned}$$

を得る。

計算練習 12.4

$$[L_m^\perp, x_0^I] = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbf{Z}} [\alpha_{m-p}^J \alpha_p^J, x_0^I] = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbf{Z}} (\alpha_{m-p}^J [\alpha_p^J, x_0^I] + [\alpha_{m-p}^J, x_0^I] \alpha_p^J).$$

ここで式 (12.52): $[x_0^I, \alpha_n^J] = 0 (n \neq 0)$, 式 (12.53): $[x_0^I, \alpha_0^J] = \sqrt{2\alpha'} i \eta^{IJ}$ より最右辺の和において第 1 項は $p=0$ の項が³, 第 2 項は $p=m$ の項が³残る。よって

$$\begin{aligned} [L_m^\perp, x_0^I] &= -\frac{1}{2} \{ \alpha_m^J (\sqrt{2\alpha'} i \eta^{IJ}) + (\sqrt{2\alpha'} i \eta^{IJ}) \alpha_m^J \} \\ &= -i\sqrt{2\alpha'} \alpha_m^I : (12.119) \end{aligned}$$

を得る。

計算練習 12.5

ここでは数学的帰納法によらず, $\sum k^3, \sum k^4, \dots$ の計算にも応用の利く証明を与える。

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$$

において, $k=1, \dots, n$ について両辺の和をとると

$$(n+1)^3 - 1 = 3 \sum_{k=1}^n k^2 + \frac{3}{2} n(n+1) + n$$

となる。よって

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{3} \left\{ (n+1)^3 - 1 - \frac{3}{2}n(n+1) - n \right\} = \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) : (12.129)$$

を得る。

計算練習 12.6

$$\delta X^I = \varepsilon [i(L_m^\perp + L_{-m}^\perp), X^I] = \varepsilon \{ i(\xi_m^\tau + \xi_{-m}^\tau) \dot{X}^I + i(\xi_m^\sigma + \xi_{-m}^\sigma) X^{I'} \}$$

はパラメーターの付け替え (12.143):

$$\begin{aligned} \tau &\rightarrow \tau + \varepsilon \xi^\tau, & \sigma &\rightarrow \sigma + \varepsilon \xi^\sigma, \\ \xi^\tau &= i(\xi_m^\tau + \xi_{-m}^\tau) = (e^{im\tau} + e^{-im\tau}) \cos m\sigma = 2 \cos m\tau \cos m\sigma, \\ \xi^\sigma &= i(\xi_m^\sigma + \xi_{-m}^\sigma) = i(e^{im\tau} - e^{-im\tau}) \sin m\sigma = -2 \sin m\tau \sin m\sigma \end{aligned}$$

によるものである。

12.5 Lorentz 生成子

弦の作用の Lorentz 不変性に伴うチャージ (8.65):

$$M_{\mu\nu} = \int_0^\pi (X_\mu \mathcal{P}_\nu^\tau - X_\nu \mathcal{P}_\mu^\tau) d\sigma$$

(ただし開弦を仮定し $0 \leq \sigma \leq \pi$ とした) は、光錐ゲージにおいて

$$M^{\mu\nu} = x_0^\mu p^\nu - x_0^\nu p^\mu - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^\mu \alpha_n^\nu - \alpha_{-n}^\nu \alpha_n^\mu) \quad (67)$$

とモード展開される [導出は下記]。そこで量子 Lorentz チャージ M^{-I} を

$$\begin{aligned} M^{-I} &= x_0^- p^I - \frac{1}{2} (x_0^I p^- + p^- x_0^I) - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^- \alpha_n^I - \alpha_{-n}^I \alpha_n^-) \\ &\quad (\text{非 Hermite な項 } -x_0^I p^- \text{ を対称化して Hermite にした}) \\ &= x_0^- p^I - \frac{1}{4\alpha' p^+} \{ x_0^I (N[L_0^\perp] + a) + (N[L_0^\perp] + a) x_0^I \} - \frac{i}{\sqrt{2\alpha' p^+}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (L_{-n}^\perp \alpha_n^I - \alpha_{-n}^I L_n^\perp) \\ &\quad \left(\because \sqrt{2\alpha'} \alpha_n^- = \frac{1}{p^+} L_n^\perp, \quad 2\alpha' p^- = \frac{1}{p^+} (N[L_0^\perp] + a) \right) \end{aligned}$$

と考えると $[x_0^I p^-]$ の非 Hermite 性について、本稿次節で考察^{*9}、これは Hermite であり正規順序化されている。この M^{-I} に対して

$$[M^{-I}, M^{-J}] = -\frac{1}{\alpha' (p^+)^2} \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_{-m}^I \alpha_m^J - \alpha_{-m}^J \alpha_m^I) \left[m \left\{ 1 - \frac{1}{24} (D-2) \right\} + \frac{1}{m} \left\{ \frac{1}{24} (D-2) + a \right\} \right]$$

^{*9} 本稿では正規順序化を $N[\dots]$ によって表している。 $n \neq 0$ に対して $L_n^\perp = N[L_n^\perp]$ である。

となる (導出は行わない). Lorentz 不変性の条件 $[M^{-I}, M^{-J}] = 0$ (11.6 節) が成り立つことを要求すると, 時空次元 D と粒子の質量の定数シフト a が

$$D = 26, \quad a = -\frac{1}{24}(D - 2) = -1$$

に確定する. 第 2 式は無限和の計算から得られた結果 $a = \frac{1}{2}(D - 2) \sum_{p=1}^{\infty} = -\frac{1}{24}(D - 2)$ と同一である.

12.5 節, 式の導出など

■角運動量テンソルの光錐ゲージにおける表式 (67) の導出 光錐ゲージでは

$$\mathcal{P}^{\sigma\mu} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} X^{\mu'}, \quad \mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^{\mu}$$

なので

$$M^{\mu\nu} = \int_0^\pi (X_\mu \mathcal{P}^{\tau\nu} - X_\nu \mathcal{P}^{\tau\mu}) d\sigma = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^\pi (X^\mu \dot{X}^\nu - X^\nu \dot{X}^\mu) d\sigma$$

を得る. 弦座標のモード展開 (9.56), (9.57):

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\mu \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} \cos n\sigma,$$

$$\dot{X}^\mu = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \alpha_n^\mu \cos n\sigma e^{-in\tau}$$

を用いてこれを評価しよう. 例えば被積分関数の第 1 項は

$$X^\mu \dot{X}^\nu = x_0^\mu (\sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\nu) + i2\alpha' \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu \alpha_{-n}^\nu \cos^2 n\sigma + (\tau \text{ に依存しない項})$$

となる. 第 2 項は μ と ν を入れ替えた類似の式によって与えられる. ところで $M^{\mu\nu}$ は τ に依存しないことがあらかじめ保証されているので, τ に依存しない項だけを拾い上げれば充分である (具体的な計算は計算練習 12.7). よって式 (67):

$$M^{\mu\nu} = x_0^\mu p^\nu - x_0^\nu p^\mu - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^\mu \alpha_n^\nu - \alpha_{-n}^\nu \alpha_n^\mu)$$

が導かれる.

12.5 について

■「 x_0^I と p^- は非可換なので, 第 2 項はエルミートではない」 (p.255 下から 11 行目) について

$$\text{式 (12.104): } \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^- = 2\alpha' p^- = \frac{1}{p^+} L_0^\perp, \quad \text{式 (12.119): } [L_0^\perp, x_0^I] = -i\sqrt{2\alpha'} \alpha_0^I$$

より

$$[x_0^I, p^-] = \frac{1}{2\alpha' p^+} [x_0^I, L_0^\perp] = \frac{i}{2\alpha' p^+} \alpha_0^I = i \frac{p^I}{p^+}$$

となるので, 確かに x_0^I と p^- は非可換である. (このとき $(x_0^I p^-)^\dagger = p^- x_0^I \neq x_0^I p^-$ なので, $x_0^I p^-$ は非 Hermite である.)

なお上式の第 1 の等号では $[x_0^I, p^+] = 0$ を仮定した. これは式 (12.12): $[X^I, p^+] = 0$ に X^I のモード展開を代入した関係が, 任意の σ, τ の値に対して成立しなければならぬことから正当化される.

■ M^{-I} の式 (12.150) について 振動モードの項を除けば, これは粒子に対する式 (11.88):

$$M^{-I} = x_0^- p^I - \frac{1}{2}(x_0^I p^- + p^- x_0^I)$$

に一致する. 最後の項の Hermite 性は次のように確かめられる.

$$\{i(\alpha_{-n}^- \alpha_n^I - \alpha_{-n}^I \alpha_n^-)\} = -i\{(\alpha_n^I)^\dagger (\alpha_{-n}^-)^\dagger - (\alpha_n^-)^\dagger (\alpha_{-n}^I)^\dagger\} = -i(\alpha_{-n}^I \alpha_n^- - \alpha_{-n}^- \alpha_n^I) = i(\alpha_{-n}^- \alpha_n^I - \alpha_{-n}^I \alpha_n^-).$$

計算練習 12.7

式 (9.52): $\alpha_0^\mu = \sqrt{2\alpha'} p^\mu$ より

$$\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^\pi d\sigma \{x_0^\mu (\sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\nu) - x_0^\nu (\sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\mu)\} = \left(\frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\sigma\right) (x_0^\mu p^\nu - x_0^\nu p^\mu) = x_0^\mu p^\nu - x_0^\nu p^\mu$$

である. また

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^\pi d\sigma \left\{ i2\alpha' \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} (\alpha_n^\mu \alpha_{-n}^\nu - \alpha_n^\nu \alpha_{-n}^\mu) \cos^2 n\sigma \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^\pi d\sigma \left\{ -i2\alpha' \times 2 \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^\mu \alpha_n^\nu - \alpha_{-n}^\nu \alpha_n^\mu) \cos^2 n\sigma \right\} \quad (\because \text{交換関係 (12.45)}) \\ &= -i \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^\mu \alpha_n^\nu - \alpha_{-n}^\nu \alpha_n^\mu) \frac{2}{\pi} \int_0^\pi d\sigma \cos^2 n\sigma \\ &= -i \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^\mu \alpha_n^\nu - \alpha_{-n}^\nu \alpha_n^\mu) \end{aligned}$$

なので $M^{\mu\nu}$ の式 (12.147) を得る.

12.6 状態空間の構築

運動量固有状態 $|p^+, \vec{p}_T\rangle$ を基底状態 (真空状態), すなわち

$$a_n^I |p^+, \vec{p}_T\rangle = 0, \quad n \geq 1, \quad I = 1, 2, \dots, 25$$

を満たす状態として, 一般的な基本状態

$$|\lambda\rangle = \prod_{n=1}^\infty \prod_{I=2}^{25} (a_n^{I\dagger})^{\lambda_{n,I}} |p^+, \vec{p}_T\rangle$$

が作られる. ここに非負の整数 $\lambda_{n,I}$ は $a_n^{I\dagger}$ が基底状態 $|p^+, \vec{p}_T\rangle$ に作用する回数である. また生成演算子どうしは可換だから, その順序を気にする必要はない.

質量の自乗の演算子 (12.108):

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} (-1 + N^\perp)$$

($a = -1$ を考慮した) における励起の数演算子

$$N^\perp \equiv \sum_{n=1}^\infty n a_n^{I\dagger} a_n^I$$

を考える。基本状態 $|\lambda\rangle$ に関する N^\perp の固有値 N_λ^\perp は、その基本状態を作っている生成演算子のモード番号の和

$$N_\lambda^\perp = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{I=2}^{25} n \lambda_{n,I} \quad (68)$$

になることが分かる [説明は下記]。例えば

$$\begin{aligned} |\lambda\rangle &= a_5^{I\dagger} a_3^{J\dagger} a_3^{J\dagger} a_2^{K\dagger} a_1^{J\dagger} a_1^{I\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle \quad (I, J \text{ について和をとらない}) \\ \Rightarrow N_\lambda^\perp &= 5 + 3 + 3 + 2 + 1 + 1 \end{aligned}$$

である。

ハミルトニアンは式 (12.14): $H = 2\alpha' p^+ p^-$, 式 (12.106): $2\alpha' p^- = \frac{1}{p^+} (N[L_0^\perp] + a)$, 式 (12.156): $a = -1$ より

$$H = 2\alpha' p^+ p^- = N[L_0^\perp] - 1$$

で与えられるため、時間に依存する物理的な状態は

$$\exp(-i(N[L_0^\perp] - 1)\tau) |\lambda\rangle$$

と書ける。さらにハミルトニアン $H = N[L_0^\perp] - 1$ には本節で導入した数演算子 N^\perp が入っており、

$$H = \alpha' p^I p^I + N^\perp - 1 \quad (69)$$

と書き直せることが有用となる [導出は下記]。

$M^2 = \frac{1}{\alpha'} (-1 + N^\perp)$ より基底状態 (固有値 $N^\perp = 0$) に対して質量の自乗は $M^2 = -1/\alpha' < 0$ となる (タキオン)。

また $M^2 = 0$ となる無質量状態は、固有値 $N^\perp = 1$ を持つ状態

$$a_1^{I\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad I = 2, 3, \dots, 25$$

の重ね合せ

$$\sum_{I=2}^{25} \xi_I a_1^{I\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle \quad (70)$$

として実現される。一方、光錐ゲージにおいて 1 光子状態は式 (36):

$$\sum_{I=2}^{D-1} \xi_I a_{p^+, \vec{p}_T}^{I\dagger} |\Omega\rangle$$

で与えられる。これは状態 (70) と対応付けられる。よって開弦の量子論において無質量で偏極を持ち、それ故、光子状態に対応する状態が得られたことになる。これは質量のシフト (正規順序化定数 $a = -1$) によって可能になっている。

それぞれの状態 $|\lambda\rangle$ は 1 粒子状態を表す。多粒子状態ではない。

12.6 節, 式の導出など

■ハミルトニアンを表式 (69) の導出

$$N[L_0^\perp] = \frac{1}{2}\alpha_0^I\alpha_0^I + \sum_{p=1}^{\infty}\alpha_{-p}^I\alpha_p^I = \alpha'p^I p^I + N^\perp$$

を $H = N[L_0^\perp] - 1$ に代入して, 式 (69):

$$H = \alpha'p^I p^I + N^\perp - 1$$

を得る.

■数演算子の固有値 (68) の説明 励起の数演算子

$$N^\perp \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{I\dagger} a_n^I$$

は交換関係

$$[N^\perp, a_n^{I\dagger}] = n a_n^{I\dagger}, \quad (12.165)$$

$$[N^\perp, a_n^I] = -n a_n^I, \quad (12.166)$$

を満たす [本稿次節で確認]. また N^\perp は正規順序化されているので, $N^\perp |p^+, \vec{p}_T\rangle = 0$ のように基底状態を消失させる. 以上を踏まえ, 例えば基本状態 $|\lambda\rangle = a_3^{J\dagger} a_2^{I\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle$ に対する固有方程式を作ると

$$\begin{aligned} N^\perp |\lambda\rangle &= N^\perp a_3^{J\dagger} a_2^{I\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle \\ &= [N^\perp, a_3^{J\dagger}] a_2^{I\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle + a_3^{J\dagger} N^\perp a_2^{I\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle \\ &= [N^\perp, a_3^{J\dagger}] a_2^{I\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle + a_3^{J\dagger} [N^\perp, a_2^{I\dagger}] |p^+, \vec{p}_T\rangle + a_3^{J\dagger} a_2^{I\dagger} N^\perp |p^+, \vec{p}_T\rangle \\ &= (3a_3^{J\dagger}) a_2^{I\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle + a_3^{J\dagger} (2a_2^{I\dagger}) |p^+, \vec{p}_T\rangle \\ &= 5 |\lambda\rangle \end{aligned}$$

となるので, 固有値は $N_\lambda^\perp = 5$ と求まる.

ここから同様に一般の基本状態に関する固有値 N_λ^\perp が, その基本状態を作っている生成演算子のモード番号の和 (68) で与えられることが容易に分かる.

計算練習 12.8

2つの状態 $|\lambda\rangle$ と $|\lambda'\rangle$ が異なるとき,

$$\langle\lambda'|\lambda\rangle = \langle p^+, \vec{p}_T | \left(\prod_{n,I} (a_n^I)^{\lambda_{n,I}} \right) \left(\prod_{m,J} (a_m^{J\dagger})^{\lambda_{m,J}} \right) |p^+, \vec{p}_T\rangle$$

に含まれる a_p^K と a_p^\dagger が同数とならない組 (p, K) がある.

- a_p^K の方が多く含まれるとき $\langle\lambda'|\lambda\rangle$ は $a_p^K |p^+, \vec{p}_T\rangle = 0$ に比例し,
- $a_p^{K\dagger}$ の方が多く含まれるとき $\langle\lambda'|\lambda\rangle$ は $\langle p^+, \vec{p}_T | a_p^{K\dagger} = 0$ に比例するため,

いずれの場合も $\langle\lambda'|\lambda\rangle = 0$ となる.

12.6 について

■基底状態 (12.159): $|p^+, \vec{p}_T\rangle$ が真空状態と呼ばれることについて その呼び名に反して運動量 p^+, \vec{p}_T の1つの弦が存在する状態である。

場の理論では真空状態 $|\Omega\rangle$ が基底状態であり, これに生成演算子が作用して1粒子状態 (11.54): $|p^+, \vec{p}_T\rangle = a_{p^+, \vec{p}_T}^\dagger |\Omega\rangle$ が作られた. これとは対照的に弦理論では運動量固有状態 $|p^+, \vec{p}_T\rangle$ が基底状態 (真空状態) であることになる.

■交換関係 (12.165), (12.166) の確認

$$[N^\perp, a_n^{I\dagger}] = \sum_{m=1}^{\infty} m a_m^{J\dagger} [a_m^J, a_n^{I\dagger}] = \sum_{m=1}^{\infty} m a_m^{J\dagger} \delta_{mn} \eta^{IJ} = n a_n^{I\dagger} : (12.165),$$

$$[N^\perp, a_n^I] = \sum_{m=1}^{\infty} m [a_m^{J\dagger}, a_n^I] a_m^J = \sum_{m=1}^{\infty} m (-\delta_{mn} \eta^{IJ}) a_m^J = -n a_n^I : (12.166).$$

■タキオン (tachyon) に関する p.260 訳註の引用

ギリシャ語の $\tau\alpha\chi\upsilon\delta$ ('速い'の意味) に因む. 粒子質量 m が純虚数の仮想的な相対論的粒子 'タキオン' を考えると $E = |m|c^2 \{v^2/c^2 - 1\}^{-1/2}$ であり, そのような粒子は, 通常の因果律の枠外において振舞う超光速粒子 ($v \geq c$) ということになる.

■「弦の量子化においても正確に同様のもの」(p.261, l.16,17) について 式 (12.178): $\sum_{I=2}^{25} \xi_I a_1^{I\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle$ のことと考えられる.

■「付言すると, ……」(p.261, l.17~) について 12.7 節参照.

■表 12.1(p.261) について $a_1^{I\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle$ と $a_2^{I\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle$ に対応する波動関数はいずれも $\psi(\tau, p^+, \vec{p}_T)$ と書かれており, それらを区別する指標がない. より一般に式 (12.183) で定義される波動関数 $\psi_{I_1 \dots I_k}(\tau, p^+, \vec{p}_T)$ は, 振動子のモード番号 $\{n_i\}$ を含まない.

■「量子弦のそれぞれの状態 $|\lambda\rangle$ は, 確定した運動量を持つ1粒子状態を表す」(p.262, l.4) について 1本の弦を量子化しているため, 得られる粒子が1個であるというのは自然である. 生成演算子は粒子数を増加させるのではなく, 粒子の種類を変える.

12.7 運動方程式

11.4 節では点粒子の波動関数を与える Schrödinger 方程式が, スカラー場の古典的な場の方程式と同型 (isomorphic) であることを見た. 本節では弦に関して同様の議論を行う.

基本状態 $a_{n_1}^{I_1\dagger} \dots a_{n_k}^{I_k\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle$ の重ね合せを

$$|\Psi, \tau\rangle = \int dp^+ d^{D-2} p_T \psi_{I_1 \dots I_k}(\tau, p^+, \vec{p}_T) a_{n_1}^{I_1\dagger} \dots a_{n_k}^{I_k\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad D = 26$$

と書いて $\psi_{I_1 \dots I_k}(\tau, p^+, \vec{p}_T)$ を導入すると, $[\langle p^+, \vec{p}_T | \Psi, \tau\rangle = \psi_{I_1 \dots I_k}(\tau, p^+, \vec{p}_T)$ だから] これは [運動量空間

の] 波動関数である。一般的な状態 $|\Psi, \tau\rangle$ が満たす Schrödinger 方程式

$$i \frac{\partial}{\partial \tau} |\Psi, \tau\rangle = H |\Psi, \tau\rangle, \quad H = N[L_0^\perp] - 1 = \alpha' p^I p^I + N^\perp - 1$$

は波動関数に対する式

$$i \frac{\partial}{\partial \tau} \psi_{I_1 \dots I_k} = (\alpha' p^I p^I + N^\perp - 1) \psi_{I_1 \dots I_k}$$

になる (計算練習 12.9)。ただしここでの N^\perp は状態 $|\Psi, \tau\rangle$ における演算子 N^\perp の固有値 $(n_1 + \dots + n_k)$ である。

これはスカラー場 $\phi(\tau, p^+, \vec{p}_T)$ に対する式 (34):

$$i \frac{\partial \phi}{\partial \tau} = \alpha' (p^I p^I + m^2) \phi$$

と同じ形をとる。

特にタキオン状態 $|p^+, \vec{p}_T\rangle$ (固有値 $N^\perp = 0$) の波動関数 ψ に対してこれは

$$i \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = (\alpha' p^I p^I - 1) \psi$$

となり、スカラー場 $\phi(\tau, p^+, \vec{p}_T)$ に対する式 (34) でスカラー場の質量を $m^2 = -1/\alpha'$ と置いたものと完全に一致する。

また $N^\perp = 1$ の波動関数 ψ_I に対しては

$$i \frac{\partial \psi_I}{\partial \tau} = \alpha' p^J p^J \psi_I$$

となり、これは Maxwell 場 $A^I(\tau, p^+, \vec{p}_T)$ の満たす式

$$i \frac{\partial}{\partial \tau} A^I = \alpha' p^J p^J A^I \tag{12.194}$$

[本稿次節で補足] と完全に一致する。

12.7 について

■ 「 $m^2 = -1/\alpha'$ と置くと……」 (p.269, 1.5) について これはタキオンに対して M^2 の固有値が $-1/\alpha'$ であること (式 (12.176)) と整合している。

■ $A^I(\tau, p^+, \vec{p}_T)$ の満たす式 (12.194) について 式 (10.83): $p^2 A^I(p) = 0$ は電磁ポテンシャルの全成分の Fourier 変換 $A^I(p)$ に対する式であるのに対し、式 (12.194) における $A^I(\tau, p^+, \vec{p}_T)$ は光錐座標系の空間成分に関する Fourier 変換であり、

$$A^I(\tau, x^-, \vec{x}_T) = \int \frac{d^D p^+ d^{D-2} p_T}{(2\pi)^{D-1}} e^{i(p^+ x^- + \vec{p}_T \cdot \vec{x}_T)} A^I(\tau, p^+, \vec{p}_T), \quad D = 26$$

によって定義される。式 (12.194) を得るにはこれを光錐ゲージにおける式

$$0 = \partial^2 A^I(\tau, x^-, \vec{x}_T) = (-2\partial_+ \partial_- + \partial_J \partial_J) A^I(\tau, x^-, \vec{x}_T)$$

に代入し、

$$0 = \{-2ip^+ \partial_+ + (i\vec{p}_T)^2\} A^I(\tau, p^+, \vec{p}_T) = - \left(\frac{i}{\alpha'} \frac{\partial}{\partial \tau} + p^J p^J \right) A^I(\tau, p^+, \vec{p}_T) \quad (\because x^+ \equiv 2\alpha' p^+ \tau)$$

とすれば良い。

要するにこの結果は、光錐ゲージにおいて Maxwell 場が質量のないスカラー場の方程式に従うため、スカラー場の方程式 (34) と全く同じ仕方で導かれている。スカラー場との唯一の違いは場が添字を持ちことだけである。

読者はこのことを奇妙の思うかも知れない。たとえば Maxwell の古典場の方程式は、スカラー場の方程式よりも複雑ではないだろうか？光錐ゲージではそうではない。我々はすでにこのことに言及した [式 (10.83) の箇所]。 (以上、教科書 p.264 から引用)

■弦の状態と対応する場について 場の量子論において場によって記述される粒子が弦理論からも現れるならば、弦理論から粒子と関係する場を導けると期待するのは自然である。そして我々が学んだことは、そのような場が弦の状態を表す波動関数に同定されるということである。

計算練習 12.9

Schrödinger 方程式 (12.186) に式 (12.183) を代入すると

$$\int dp^+ d^{24} p_T \left[i \frac{\partial}{\partial \tau} \psi_{I_1 \dots I_k}(\tau, p^+, \vec{p}_T) - (\alpha' p^I p^I + N^\perp - 1) \psi_{I_1 \dots I_k}(\tau, p^+, \vec{p}_T) \right] a_{n_1}^{I_1 \dagger} \dots a_{n_k}^{I_k \dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle = 0$$

となる。ただしここではハミルトニアンにおける演算子 p^I, N^\perp は状態 $a_{n_1}^{I_1 \dagger} \dots a_{n_k}^{I_k \dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle$ に作用して固有値に置き換わっている。式 (11.53) の導出と同様、括弧 $[\dots]$ の中がゼロでなければならないから式 (12.188):

$$i \frac{\partial}{\partial \tau} \psi_{I_1 \dots I_k} = (\alpha' p^I p^I + N^\perp - 1) \psi_{I_1 \dots I_k}$$

を得る。

12.8 タキオンと D-ブレイン崩壊

一様な自由スカラー場 $\phi(t)$ に対して

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi), \quad V(\phi) = \frac{1}{2} M^2 \phi^2, \quad \therefore \ddot{\phi} + M^2 \phi = 0$$

である。

- $M^2 > 0$ のとき

$V(\phi)$ は $\phi = 0$ において極小値をとるため、 $\phi = 0$ の状態は安定である。実際このとき

$$\phi(t) = A \cos(Mt) + B \sin(Mt)$$

となり、場の値は $\phi = 0$ の付近を振動する。

- $M^2 < 0$ のとき

$V(\phi)$ は $\phi = 0$ において極大値をとるため、 $\phi = 0$ の状態は不安定である。

実際このとき $\beta = \sqrt{-M^2}$ とおくと

$$\phi(t) = A \cosh(\beta t) + B \sinh(\beta t)$$

となり、自明な解 $\phi = 0$ を除けば $|\phi(\infty)| = \infty$ となる。

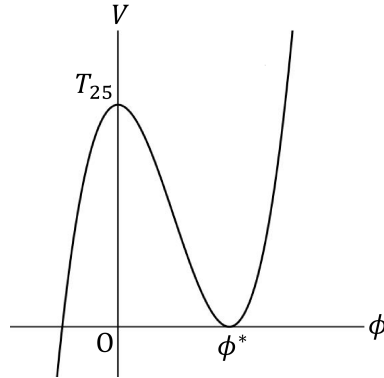


図 27 D25-ブレーンを基礎に置く開弦理論のタキオンポテンシャル (教科書の図 12.3(p.268) を改変)

開弦におけるタキオン状態は $M^2 = -1/\alpha' < 0$ を持つので不安定性が示唆される。フェルミオンを含む超弦理論においてもタキオンが現れ得るため、その不安定性について理解しなければならない。

開弦は D25-ブレーンに接続している。そこで D25-ブレーンのエネルギー密度 T_{25} をタキオンのポテンシャルに組み込み、さらに場の相互作用を表す 3 次以上の項を加えて

$$V(\phi) = T_{25} - \frac{1}{2\alpha'}\phi^2 + \beta\phi^3 + \dots$$

とする。 $\phi = 0$ の近くでは $V(\phi) \simeq T_{25} - \frac{1}{2\alpha'}\phi^2$ なので、 $\phi = 0$ の状態は不安定である。不安定性により場の値が $\phi > 0$ の方へ変化する場合を考える。このときポテンシャルの値は $V(0) = T_{25}$ から減少する。これはタキオンが D25-ブレーンのエネルギーを低下させるものと解釈される。場の値が $V(\phi^*) = 0$ となる $\phi = \phi^*$ に達すると D25-ブレーンは消失し、これに端点を接続されていない開弦もともに消失する。 $\phi = \phi^*$ の状態は安定であることが証明されている (図 27 参照)。

計算練習 12.8

Euler-Lagrange 方程式

$$0 = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -\partial_\mu \partial^\mu \phi + V'(\phi)$$

は場の運動方程式 (12.197) を与える。

問題 (第 12 章)

問題 12.1 運動量密度に対する Heisenberg 方程式

12.1 節 p.236 で言及されている問題 12.1 を解く。

$$i\dot{\mathcal{P}}^{\tau I}(\tau, \sigma) = [\mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma), H(\tau)] = \frac{\pi\alpha'}{(2\pi\alpha')^2} \int d\sigma' [\mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma), X^{J'}(\tau, \sigma') X^{J'}(\tau, \sigma')]$$

において

$$[\mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma), X^{J'}(\tau, \sigma')] = -\frac{d}{d\sigma'} [X^J(\tau, \sigma'), \mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma)] = -i\eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma'} \delta(\sigma - \sigma')$$

なので

$$\begin{aligned}
 i\dot{\mathcal{P}}^{\tau I}(\tau, \sigma) &= \frac{1}{4\pi\alpha'}(-2i\eta^{IJ}) \int d\sigma' X^{J'}(\tau, \sigma') \frac{d}{d\sigma'} \delta(\sigma - \sigma') \\
 &= \frac{i}{2\pi\alpha'} \int d\sigma' X^{I''}(\tau, \sigma') \delta(\sigma - \sigma') \\
 &= \frac{i}{2\pi\alpha'} X^{I''}(\tau, \sigma), \\
 \therefore \dot{\mathcal{P}}^{\tau I} &= X^{I''}
 \end{aligned}$$

を得る。これと $\dot{X}^I = 2\pi\alpha' \mathcal{P}^{\tau I}$:(12.21) を合わせると、演算子もまた波動方程式を満たすこと

$$\ddot{X}^I = 2\pi\alpha' \dot{\mathcal{P}}^{\tau I} = X^{I''}, \quad \therefore \ddot{X}^I - X^{I''} = 0$$

が導かれる。

問題 12.4 ゼータ関数の解析接続

12.4 節 p.248 で、式 (12.110):

$$\zeta(-1) = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots = -\frac{1}{12}$$

に関して言及されている問題 12.4 を解く。ゼータ関数の定義は式 (12.109):

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \Re(s) > 1$$

で与えられている。

ガンマ関数の定義 $\Gamma(s) = \int_0^{\infty} dt e^{-t} t^{s-1}$ を考える。この積分において $t \rightarrow nt$ と置いて得られる式を用いて、次式を証明せよ。

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^{\infty} dt \frac{t^{s-1}}{e^t - 1}, \quad \Re(s) > 1 \quad (1)$$

また、 t が小さいときの展開が、次のようになることを証明せよ。

$$\frac{1}{e^t - 1} = \frac{1}{t} - \frac{1}{2} + \frac{t}{12} + \mathcal{O}(t^2) \quad (2)$$

上の式を利用して $\Re(s) > 1$ において次式を示せ。

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^1 dt t^{s-1} \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} - \frac{t}{12} \right) + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2s} + \frac{1}{12(s+1)} + \int_1^{\infty} dt \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} \quad (3)$$

上式の右辺が $\Re(s) > -2$ において良く定義されている理由を説明せよ。この右辺が、左辺の $\Re(s) > -2$ への解析接続を定義していることになる。 $\Gamma(s)$ の極の構造 (問題 3.6) を思い出し、それを用いて $\zeta(0) = -1/2$ と $\zeta(-1) = -1/12$ を証明せよ。

まず, 上式 (1) は次のように示される.

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty dt \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} &= \int_0^\infty dt e^{-t} t^{s-1} \frac{1}{1 - e^{-t}} \\
 &= \int_0^\infty dt e^{-t} t^{s-1} (1 + e^{-t} + e^{-2t} + \dots) \\
 &= \int_0^\infty dt t^{s-1} \sum_{n=1}^\infty e^{-nt} \\
 &= \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty \frac{dt'}{n} \left(\frac{t'}{n}\right)^{s-1} e^{-t'} \quad (nt = t') \\
 &= \left(\int_0^\infty dt' e^{-t'} t'^{s-1} \right) \left(\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} \right) \\
 &= \Gamma(s) \zeta(s).
 \end{aligned}$$

ただし $\zeta(s)$ の定義域として $\Re(s) > 1$ を要求する.

次に t が小さいとき ($0 < t < 1$),

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{e^t - 1} &= \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{2!}t + \frac{1}{3!}t^2 + O(t^3)} \\
 &= \frac{1}{t} \left\{ 1 - \frac{1}{2!}t - \frac{1}{3!}t^2 + \left(\frac{1}{2!}t\right)^2 + O(t^3) \right\} \\
 &= \frac{1}{t} - \frac{1}{2} + \frac{t}{12} + O(t^2)
 \end{aligned}$$

となるので, 上式 (2) が成り立つ.

上式 (3) は

$$\int_0^1 dt t^{s-1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2} + \frac{t}{12} \right) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2s} + \frac{1}{12(s+1)}$$

による. 式 (3) における $\left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} - \frac{t}{12} \right)$ は $O(t^2)$ なので, $\Re(s) > -2$ としても右辺第 1 項の積分は下限 $t=0$ で発散しない.

$\zeta(s)$ は $s = -n (n = 0, 1, 2, \dots)$ に極を持たないから,

$$\operatorname{Res}[\Gamma(-n)\zeta(-n)] = \zeta(-n)\operatorname{Res}[\Gamma(-n)]$$

として良い. また問題 3.6 で得た結果

$$\operatorname{Res}[\Gamma(-n)] = \frac{(-1)^n}{n!} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

はその導き方より $n = 0$ でも正しい. 以上より

$$\operatorname{Res}[\Gamma(0)\zeta(0)] = \zeta(0), \quad \operatorname{Res}[\Gamma(-1)\zeta(-1)] = -\zeta(-1)$$

となる. これを式 (3) から読み取れる関係

$$\operatorname{Res}[\Gamma(0)\zeta(0)] = -\frac{1}{2}, \quad \operatorname{Res}[\Gamma(-1)\zeta(-1)] = \frac{1}{12}$$

と比較して

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}, \quad \zeta(-1) = -\frac{1}{12}$$

を得る. 第 1 式は $1 + 1 + 1 + 1 + \dots = -1/2$ を意味しており (!), 第 2 式は示したかった式 (12.110) である.

■素朴な説明 無限等比級数和 (Taylor 展開)

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1)$$

を両辺 x で微分すると,

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots = \frac{1}{(1-x)^2}$$

を得る. この式の成立範囲は $|x| < 1$ であるけれど, $x = -1$ を代入することを許すと

$$1 - 2 + 3 - 4 + \dots = \frac{1}{4}$$

を得る. よって無限級数和 $S = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots$ は

$$S = (1 - 2 + 3 - 4 + \dots) + 2 \cdot (2 + 4 + \dots) = \frac{1}{4} + 4S, \quad \therefore S = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{12}$$

と “求まる”. このような素朴な議論から, $S = -1/12$ が示唆される.

問題 12.5 Virasoro 代数は Lie 代数である

§ 12.4(p.251, l.2) で言及されている問題 12.5 を解く.

要素 x, y, z, \dots を持つベクトル空間 L と, L 中の 2 つの要素から, もうひとつの L の要素を与える双一次の括弧 $[\cdot, \cdot]$ が用意され, 次の条件が満たされるならば, これは Lie 代数となる.

(i) 反対称性:

$$L \text{ に属するすべての要素 } x \text{ と } y \text{ に関して } [x, y] = -[y, x].$$

(ii) Jacobi (ヤコビ) 恒等式の成立:

$$L \text{ に属するすべての要素 } x, y, z \text{ に関して } [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0.$$

$n \in \mathbf{Z}$ のすべてのモードの Virasoro 演算子によって張られるベクトル空間 L を考える. まず, 式 (12.124):

$$[L_m^\perp, L_n^\perp] = (m-n)L_{m+n}^\perp, \quad m+n \neq 0$$

の交換関係が m と n のすべての値について成立するものと仮定して, これが Lie 代数を定義することを示せ. 次に式 (12.133):

$$[L_m^\perp, L_n^\perp] = (m-n)L_{m+n}^\perp + \frac{D-2}{12}(m^3-m)\delta_{m+n,0}$$

の交換関係を考え, これも Lie 代数を定義することを示せ.

はじめから式 (12.133) の交換関係を考えよう.

式 (12.133) の右辺第 1 項は m と n の入れ替えに関して反対称であることが明白である. また第 2 項は $m = -n$ のときゼロでない値 $\frac{D-2}{12}(m^3-m)$ を持ち, これは m と $n (= -m)$ の入れ替えに関して反対称である. 以上より式 (12.133) は (i) の反対称性を満たす.

次に式 (12.133) に対して

$$\begin{aligned} [L_l^\perp, [L_m^\perp, L_n^\perp]] &= (m-n)[L_l^\perp, L_{m+n}^\perp] \\ &= (m-n) \left\{ (l-m-n)L_{l+m+n}^\perp + \frac{D-2}{12}(l^3-l)\delta_{l+m+n,0} \right\}. \end{aligned}$$

添字 l, m, n を巡回置換して得られる 2 項を加えると

$$\begin{aligned} &[L_l^\perp, [L_m^\perp, L_n^\perp]] + [L_m^\perp, [L_n^\perp, L_l^\perp]] + [L_n^\perp, [L_l^\perp, L_m^\perp]] \\ &= \{(m-n)(l-m-n) + (n-l)(m-n-l) + (l-m)(n-l-m)\}L_{l+m+n}^\perp \\ &\quad + \frac{D-2}{12} \{(m-n)(l^3-l) + (n-l)(m^3-m) + (l-m)(n^3-n)\}\delta_{l+m+n,0} \end{aligned}$$

となる。右辺第 1 項の L_{l+m+n}^\perp の係数は

$$(1-1)l^2 + \{(m-n) - n - (m-n) + (n-m) + m\}l + \{-(m-n)(m+n) + n(m-n) - m(n-m)\} = 0$$

であり、第 2 項は $l+m+n=0$ の場合にも $\{\dots\}$ 内が

$$\begin{aligned} &-(m-n)(m+n)\{(m+n)^2-1\} + (m+2n)(m^3-m) - (n+2m)(n^3-n) \\ &= (-1+1)m^4 + (-2n+n-n+2n)m^3 + (1-2n^2+2n^2-1)m^2 \\ &\quad + \{-n(n^2-1) + n(n^2-1) + 2n^3 - 2n - 2(n^3-n)\}m + \{n^2(n^2-1) - n(n^3-n)\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となるので消える。よって (ii) の Jacobi の恒等式も満たされている。

問題 12.11 対称な積の勘定

12.6 節 (p.262, 1.1) で言及されている問題 12.11 を解く。

$N^\perp = n$ の状態として

$$a_1^{I_1^\dagger} a_1^{I_2^\dagger} \dots a_1^{I_n^\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle$$

を考える。添字 I_1, I_2, \dots, I_n は $k (= 24)$ 個の横方向成分 $2, 3, \dots, 24$ をとる。生成演算子の順序の異なる状態は区別されないから、このような状態の数は、互いに見分けの付かない n 個の \bullet を、 k 種類の部屋に重複を許して振り分ける方法の数だけある。例えば $k=6$ で $n=9$ ならば、部屋を $k-1$ 本の仕切りで表すと

$$\bullet | \bullet \bullet | \bullet \bullet \bullet | \bullet | \bullet \bullet \quad \leftrightarrow \quad a_1^{I_1^\dagger} a_1^{I_2^\dagger} a_1^{I_2^\dagger} a_1^{I_4^\dagger} a_1^{I_4^\dagger} a_1^{I_4^\dagger} a_1^{I_5^\dagger} a_1^{I_6^\dagger} a_1^{I_6^\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle.$$

このような場合の数は重複組合せと呼ばれ、 n 個の \bullet と $k-1$ 種類の仕切りを並べる方法の数

$${}_k H_n = \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}$$

に等しい。

p.262, 1.1-3 にあるように、 $N^\perp = n = 3, k = 24$ に対して ${}_{24} H_3 = 2600$ である。

また例えば $N^\perp = 7$ の状態は $a_1^{I_1^\dagger} \dots a_1^{I_7^\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle$ という形に限らず、

$$a_1^{I_1^\dagger} a_1^{I_2^\dagger} a_1^{I_3^\dagger} a_2^{J_1^\dagger} a_2^{J_2^\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle$$

という形も考えられるが、このような状態数も上の結果を援用して ${}_{24} H_3 \times {}_{24} H_2$ と数えられる。

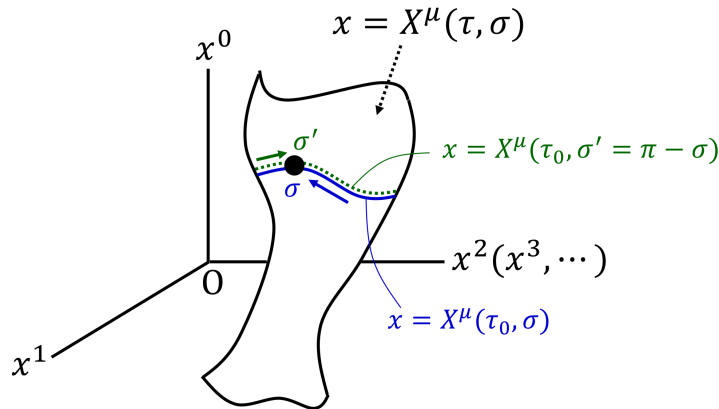


図 28 開弦 $X^\mu(\tau, \sigma)$ と、弦の向きを反転させた開弦 $X^\mu(\tau, \pi - \sigma)$

問題 12.12 無向の開弦

12.6 節 (p.262), 14.8 節 (p.319, l.1), 16.1 節で言及されている, “無向 (unoriented) の” 弦の理論に関する問題 12.12 を解く.

鍵となる概念は理論の対称性を表し, 弦の向きを反転させるような演算子 Ω (ハミルトニアンと可換) の定義である. 無向の弦の理論のスペクトルは, 弦のスペクトルを, Ω の作用の下で不変な状態の組に制約することによって得られる. 無向の弦は, 文字通りに向きがないというわけではない. それは総体として向きの反転の下で不変となるような, 有向の状態の量子力学的な重ね合わせとして見るべきものである. ある無向の状態は, 図 12.1 [教科書 p.262] に示すように, 互いに反対の向きを持つ同じ弦の状態の重ね合わせにあたるものと想定される. (以上, p.262)

次のように, 弦座標演算子に対して, 弦の向きを変えるような変換作用を持つ反転演算子 Ω を導入する.

$$\Omega X^I(\tau, \sigma) \Omega^{-1} = X^I(\tau, \pi - \sigma) \quad (1)$$

更に, 次のように宣言する.

$$\Omega x_0^- \Omega^{-1} = x_0^-, \quad \Omega p^+ \Omega^{-1} = p^+ \quad (2)$$

(a)

$\sigma \in [0, \pi]$ の開弦 $X^\mu(\tau, \sigma)$ において τ を指定すると, 時空においてパラメーター付けの施された曲線が得られる. この弦の向きは, この曲線において σ が増加する方向である.

同じ τ において, 開弦 $X^\mu(\tau, \pi - \sigma)$ はもとの弦の向きを反転させた弦を表す (図 28 参照).

(b) 開弦の振動子展開 (12.32):

$$X^I(\tau, \sigma) = x_0^I + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^I \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^I \cos n\sigma e^{-in\tau}$$

を用いて, $\Omega x_0^I \Omega^{-1}, \Omega \alpha_0^I \Omega^{-1}, \Omega \alpha_n^I \Omega^{-1} (n \neq 0)$ を計算する.

$$X^I(\tau, \pi - \sigma) = x_0^I + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^I\tau + i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n \neq 0} \frac{1}{n}(-1)^n \alpha_n^I \cos n\sigma e^{-in\tau}$$

であり, これが任意の τ, σ で $\Omega X^I(\tau, \sigma)\Omega^{-1}$ に一致しなければならないことから,

$$\begin{aligned} \Omega x_0^I \Omega^{-1} &= x_0^I, & \Omega \alpha_0^I \Omega^{-1} &= \alpha_0^I, \\ \Omega \alpha_n^I \Omega^{-1} &= (-1)^n \alpha_n^I = \begin{cases} \alpha_n^I & (n \neq 0) : \text{偶数} \\ -\alpha_n^I & (n \neq 0) : \text{奇数} \end{cases} \end{aligned}$$

が見出される.

(c) まず式 (9.72):

$$X^-(\tau, \sigma) = x_0^- + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^-\tau + i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n \neq 0} \frac{1}{n}\alpha_n^- \cos n\sigma e^{-in\tau}$$

の X^- に対して $\Omega X^-(\tau, \sigma)\Omega^{-1} = X^-(\tau, \pi - \sigma)$ を示す. 式 (9.77):

$$\sqrt{2\alpha'}\alpha_n^- = \frac{1}{p^+}L_n^\perp, \quad L_n^\perp \equiv \frac{1}{2}\sum_{p \in \mathbf{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I$$

と小問 (b) の結果と上式 (2) の仮定 $\Omega p^+ \Omega^{-1} = p^+$ より

$$\begin{aligned} \Omega \sqrt{2\alpha'}\alpha_n^- \Omega^{-1} &= \frac{1}{2p^+} \sum_{p \in \mathbf{Z}} (\Omega \alpha_{n-p}^I \Omega^{-1})(\Omega \alpha_p^I \Omega^{-1}) \\ &= \pm \frac{1}{2p^+} \sum_{p \in \mathbf{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I \\ &= \pm \sqrt{2\alpha'}\alpha_n^- \end{aligned}$$

となる. ただし複号 \pm は n が偶数で, それ故 $n-p$ と p の偶奇が一致するときに上側を, n が奇数で, それ故 $n-p$ と p の偶奇が一致しないときに下側をとる. まとめると X^- の展開係数 α_n^- は X^I の展開係数 α_n^I と同様,

$$\Omega \alpha_0^- \Omega^{-1} = \alpha_0^-, \quad \Omega \alpha_n^- \Omega^{-1} = (-1)^n \alpha_n^- \quad (n \neq 0)$$

と変換するので, 式 (2) の仮定 $\Omega x_0^- \Omega^{-1} = x_0^-$ とより式 (9.72) の X^- も

$$\Omega X^-(\tau, \sigma)\Omega^{-1} = X^-(\tau, \pi - \sigma)$$

と変換される.

また光錐ゲージ条件 (9.62): $X^+(\tau, \sigma) = 2\alpha'p^+\tau$ より

$$\Omega X^+(\tau, \sigma)\Omega^{-1} = 2\alpha'p^+\tau = X^+(\tau, \pi - \sigma)$$

なので, 結局すべての弦座標 $\mu = \pm, I$ に対して

$$\Omega X^\mu(\tau, \sigma)\Omega^{-1} = X^\mu(\tau, \pi - \sigma)$$

が成立することになる.

ハミルトニアン (12.16): $H = L_0^\perp$ は上の計算を通して見たように, 反転に対して不変である ($\Omega H \Omega^{-1} = H$). このため向きの反転は開弦の対称性変換であると言える.

$$\Omega H \Omega^{-1} = H \quad \therefore [H, \Omega] = 0.$$

表2 $N^\perp \leq 3$ の開弦状態のリストと Ω の固有値

$N^\perp = 0$	$ p^+, \vec{p}_T\rangle$	$\Omega = +1$
$N^\perp = 1$	$a_1^{I\dagger} p^+, \vec{p}_T\rangle$	$\Omega = -1$
$N^\perp = 2$	$a_1^{I\dagger} a_1^{J\dagger} p^+, \vec{p}_T\rangle$	$\Omega = +1$
	$a_2^{I\dagger} p^+, \vec{p}_T\rangle$	$\Omega = +1$
$N^\perp = 3$	$a_1^{I\dagger} a_1^{J\dagger} a_1^{K\dagger} p^+, \vec{p}_T\rangle$	$\Omega = -1$
	$a_1^{I\dagger} a_2^{J\dagger} p^+, \vec{p}_T\rangle$	$\Omega = -1$
	$a_3^{I\dagger} p^+, \vec{p}_T\rangle$	$\Omega = -1$

(d) 基底状態が反転不変であると仮定する.

$$\Omega |p^+, \vec{p}_T\rangle = \Omega^{-1} |p^+, \vec{p}_T\rangle = |p^+, \vec{p}_T\rangle.$$

すると小問 (b) の結果 $\Omega \alpha_n^I \Omega^{-1} = (-1)^n \alpha_n^I$ とより, 例えば

$$\Omega(a_1^{I\dagger} a_2^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle) = (\Omega a_1^{I\dagger} \Omega^{-1})(\Omega a_2^{J\dagger} \Omega^{-1})(\Omega |p^+, \vec{p}_T\rangle) = -a_1^{I\dagger} a_2^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle$$

となる. 同様にして $N^\perp \leq 3$ の開弦状態のリストと Ω の固有値は表2のようにまとめられる.
一般に反転固有値は

$$\Omega = (-1)^{N^\perp}$$

であることを次のように証明できる. 数演算子の固有値が式 (12.170):

$$N^\perp = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{I=2}^{25} n \lambda_{n,I}$$

の基本状態 (12.162):

$$\prod_{n=1}^{\infty} \prod_{I=2}^{25} (a_n^{I\dagger})^{\lambda_{n,I}} |p^+, \vec{p}_T\rangle$$

(表2の各行の状態はそれぞれこのように表される) において, 各 $a_n^{I\dagger}$ は1つ1つが Ω に対して $(-1)^n$ の寄与をし, それが $\lambda_{n,I}$ 個あるので $(-1)^{n\lambda_{n,I}}$ の寄与をする. したがって反転固有値は

$$\Omega = \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{I=2}^{25} (-1)^{n\lambda_{n,I}} = (-1)^{\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{I=2}^{25} n\lambda_{n,I}} = (-1)^{N^\perp}$$

と計算される.

(e) 反転操作の下で不変な状態は, “無向” であると言う. 無向の開弦の理論を構築するには, 奇数の固有値 N^\perp を持つ状態を棄てる必要がある.

第 13 章 相対論的な量子閉弦

13.1 モード展開と交換関係

弦理論は当初、ハドロンの理論であると考えられた。しかし閉弦から現れるスピン 2 を持つ無質量状態に対応するハドロンは知られていなかった。その後、この無質量状態のひとつを重力子に同定し得ることが判明した。

ゲージ条件

$$n \cdot X = \alpha' (n \cdot p) \tau, \quad n \cdot p = 2\pi n \cdot \mathcal{P}^\tau$$

の下では、開弦と閉弦のいずれに対しても

$$\begin{aligned} \text{制約条件} \quad & (\dot{X} \pm X')^2 = 0, \\ \text{運動方程式} \quad & \ddot{X}^\mu - X^{\mu''} = 0, \\ \mathcal{P}^\sigma, \mathcal{P}^\tau \text{ の式} \quad & \mathcal{P}^{\sigma\mu} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} X^{\mu'}, \quad \mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^\mu \end{aligned}$$

が成り立つ (9.3 節)。閉弦を考えよう。このとき σ の値が 2π の整数倍だけ異なる点は同じ点を表す。よって周期性条件

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X^\mu(\tau, \sigma + 2\pi)$$

が課せられることに注意して、制約条件 $(\dot{X} \pm X')^2 = 0$ の下で波動方程式を解くと

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\mu \tau + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{-in\tau}}{n} (\alpha_n^\mu e^{in\sigma} + \bar{\alpha}_n^\mu e^{-in\sigma}) \quad (71)$$

となる (確かに σ に関する周期性が見て取れる) [導出は下記]。開弦に対する式 (9.52): $\alpha_0^\mu = \sqrt{2\alpha'} p^\mu$ と同様に、 α_0^μ は弦の運動量に比例する：

$$p^\mu = \int_0^{2\pi} \mathcal{P}^{\tau\mu}(\tau, \sigma) d\sigma = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^{2\pi} \dot{X}^\mu(\tau, \sigma) d\sigma = \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \alpha_0^\mu, \quad \therefore \alpha_0^\mu = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} p^\mu.$$

量子論に移り正準交換関係

$$[X^I(\tau, \sigma), \mathcal{P}^{\tau J}(\tau, \sigma')] = i\delta(\sigma - \sigma') \eta^{IJ}, \quad [x_0^-, p^+] = -i, \quad \text{etc.}$$

を課すと、2 組の振動子 $\bar{\alpha}, \alpha$ に対する交換関係

$$[\bar{\alpha}_m^I, \bar{\alpha}_n^J] = m\delta_{m+n,0} \eta^{IJ}, \quad [\alpha_m^I, \alpha_n^J] = m\delta_{m+n,0} \eta^{IJ}, \quad [\alpha_m^I, \bar{\alpha}_n^J] = 0 \quad (72)$$

を得る [本稿次節で補足しつつ導出]。ただし $\bar{\alpha}_0^\mu \equiv \alpha_0^\mu$ である [上式 (71) の導出過程を参照]。 $n \geq 1$ に対して

$$\begin{aligned} \alpha_n^I &= a_n^I \sqrt{n}, & \alpha_{-n}^I &= a_n^{I\dagger} \sqrt{n}, \\ \bar{\alpha}_n^I &= \bar{a}_n^I \sqrt{n}, & \bar{\alpha}_{-n}^I &= \bar{a}_n^{I\dagger} \sqrt{n} \end{aligned}$$

によって $a_n^I, a_n^{I\dagger}, \bar{a}_n^I, \bar{a}_n^{I\dagger}$ を導入すると、これらは [開弦の場合と同じ次理由で]

$$[\bar{a}_m^I, \bar{a}_n^{J\dagger}] = \delta_{m,n} \eta^{IJ}, \quad [a_m^I, a_n^{J\dagger}] = \delta_{m,n} \eta^{IJ}, \quad \text{etc.}$$

を満たすため、生成・消滅演算子となる。 x_0^I と $\alpha_n^J (n \neq 0)$, $\alpha_0^J = \sqrt{\alpha'/2} p^J$ の交換関係

$$\begin{aligned} [x_0^I, \alpha_n^J] &= [x_0^I, \bar{\alpha}_n^J] = 0 \quad \text{for } n \neq 0, \\ [x_0^I, p^J] &= i\eta^{IJ} \end{aligned}$$

も見出される (問題 13.1)。閉弦に対してハミルトニアンは

$$H = \alpha' p^+ p^- \quad (73)$$

である [下記参照]。

13.1 節, 式の導出など

■閉弦座標のモード展開 (71) の導出 波動方程式の一般解

$$X^\mu = X_L^\mu(u) + X_R^\mu(v), \quad u \equiv \tau + \sigma, \quad v \equiv \tau - \sigma$$

に周期境界条件 $X^\mu(\tau, \sigma) = X^\mu(\tau, \sigma + 2\pi)$ を課すと,

$$\begin{aligned} X_L^\mu(u) + X_R^\mu(v) &= X_L^\mu(u + 2\pi) + X_R^\mu(v - 2\pi), \\ \therefore X_L^\mu(u + 2\pi) - X_L^\mu(u) &= X_R^\mu(v) - X_R^\mu(v - 2\pi) \end{aligned} \quad (74)$$

を得る。右辺の値は u に依らないから、左辺の値もまた u に依らない。よって

$$\frac{d}{du} \{X_L^\mu(u + 2\pi) - X_L^\mu(u)\} = 0, \quad \therefore X_L^{\mu'}(u + 2\pi) = X_L^{\mu'}(u)$$

である。これは $X_L^{\mu'}(u)$ が周期 2π を持つ周期関数となることを意味する。同様に $X_R^{\mu'}(v)$ も周期 2π の周期関数となるから、

$$X_L^{\mu'}(u) = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \bar{\alpha}_n^\mu e^{-inu}, \quad X_R^{\mu'}(v) = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \alpha_n^\mu e^{-inv} \quad (75)$$

とモード展開できる。このように閉弦は 2 組の振動子 $\bar{\alpha}_n^\mu, \alpha_n^\mu$ で記述される (ここで導入した α_n^μ は開弦の振動子とは関係ない)。これらを積分すると

$$\begin{aligned} X_L^\mu(u) &= \frac{1}{2} x_0^{L\mu} + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \bar{\alpha}_0^\mu u + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{\bar{\alpha}_n^\mu}{n} e^{-inu}, \\ X_R^\mu(v) &= \frac{1}{2} x_0^{R\mu} + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \alpha_0^\mu v + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^\mu}{n} e^{-inv} \end{aligned}$$

となる。ここで再び上式 (74) を考慮すると、

$$2\pi \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \bar{\alpha}_0^\mu = 2\pi \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \alpha_0^\mu, \quad \therefore \bar{\alpha}_0^\mu = \alpha_0^\mu$$

という制約が見出される。以上より閉弦座標のモード展開

$$\begin{aligned} X^\mu &= X_L^\mu(u) + X_R^\mu(v) \\ &= \frac{1}{2} (x_0^{L\mu} + x_0^{R\mu}) + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\mu \tau + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{-in\tau}}{n} (\alpha_n^\mu e^{in\sigma} + \bar{\alpha}_n^\mu e^{-in\sigma}) \end{aligned}$$

が得られる。最後に $\frac{1}{2}(x_0^{L\mu} + x_0^{R\mu}) = x_0^\mu$ とおくと式 (71) に到達する^{*10}。

^{*10} 弦の運動量変数は 1 つだけなので、量子論において運動量演算子に共役なゼロモード座標は 1 つだけであり、2 種類のゼロモード $x_0^{L\mu} + x_0^{R\mu}$ の和 $x_0^\mu = \frac{1}{2}(x_0^{L\mu} + x_0^{R\mu})$ だけが意味を持つ。

■閉弦のハミルトニアン (73) について 光錐ゲージ条件は閉弦に対して $X^+ = \alpha' p^+ p^-$ であることを踏まえ
ると,

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \alpha' p^+ \frac{\partial}{\partial X^+} \quad \leftrightarrow \quad H = \alpha' p^+ p^- : (73).$$

13.1 について

■式 (13.13) について 式 (13.13)(本稿の式 (74)) の左辺 $X_L^\mu(u+2\pi) - X_L^\mu(u)$ がゼロでない値を持つこと
は, $X_L^\mu(u)$ が「周期条件から外れる」(p.277, 1.17) ことを意味する. 式 (13.13) の右辺の値は u に依らない
から, 左辺 $X_L^\mu(u+2\pi) - X_L^\mu(u)$ の値もまた u に依らない. よって

$$\frac{d}{du} \{X_L^\mu(u+2\pi) - X_L^\mu(u)\} = 0, \quad \therefore X_L^{\mu'}(u+2\pi) = X_L^{\mu'}(u)$$

である. これは $X_L^{\mu'}(u)$ が「周期 2π を持つ周期関数」(p.277, 1.20) となることを意味する.

■振動子の交換関係 (72) の導出

$$\begin{aligned} \dot{X}^\mu &= X_L^{\mu'}(\tau + \sigma) + X_R^{\mu'}(\tau - \sigma), \\ X^{\mu'} &= X_L^{\mu'}(\tau + \sigma) - X_R^{\mu'}(\tau - \sigma) \end{aligned}$$

および上式 (75) より, 弦座標の導関数の線形結合を作ると

$$\begin{aligned} \dot{X}^\mu + X^{\mu'} &= 2X_L^{\mu'}(\tau + \sigma) = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \bar{\alpha}_n^\mu e^{-in(\tau + \sigma)}, \\ \dot{X}^\mu - X^{\mu'} &= 2X_R^{\mu'}(\tau - \sigma) = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \alpha_n^\mu e^{-in(\tau - \sigma)} \end{aligned} \quad (76)$$

となる. 導関数の和に振動子 $\bar{\alpha}_n^\mu$ が現れるのに対し, 差には振動子 α_n^μ が現れるという違いを除けば, これは
開弦に対する式 (12.33) と全く同じ形をしている. また正準交換関係から, 交換関係

$$\left[(\dot{X}^I \pm X^{I'}) (\tau, \sigma), (\dot{X}^J \pm X^{J'}) (\tau, \sigma') \right] = \pm 4\pi \alpha' i \eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma'), \quad (\text{式 (54)})$$

$$\left[(\dot{X}^I \pm X^{I'}) (\tau, \sigma), (\dot{X}^J \mp X^{J'}) (\tau, \sigma') \right] = 0 \quad (\text{式 (55)})$$

(複号同順) が導かれることを思い出そう. ここではこれらの関係式の成り立つ閉弦座標の定義域が $\sigma, \sigma' \in [0, 2\pi]$ であることから, 振動子の交換関係を引き出すには単に, 上式 (76) を交換関係 (54), (55) に代入する
ところから始めれば良い. その後の解析は開弦の場合と似たものになる.

まず上式 (76) を交換関係 (54) に代入すると, 式 (12.40) の代わりに

$$\sum_{m', n' \in \mathbf{Z}} \left\{ \begin{array}{l} [\bar{\alpha}_{m'}^I, \bar{\alpha}_{n'}^J] \\ [\alpha_{m'}^I, \alpha_{n'}^J] \end{array} \right\} e^{-im'(\tau \pm \sigma)} e^{-in'(\tau \pm \sigma')} = \pm 2\pi i \eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma')$$

が得られる (複号の上側に対しては上側の交換子を, 複号の下側に対しては下側の交換子をとる). 両辺に積分

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma e^{\pm im\sigma} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma' e^{\pm in\sigma'}$$

を施すと、右辺は式 (12.43) と同様

$$\begin{aligned}
& \pm i\eta^{IJ} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma e^{\pm im\sigma} \frac{d}{d\sigma} \int_0^{2\pi} d\sigma' e^{\pm in\sigma'} \delta(\sigma - \sigma') \\
&= \pm i\eta^{IJ} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma e^{\pm im\sigma} \frac{d}{d\sigma} e^{\pm in\sigma} \\
&= -n\eta^{IJ} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma e^{i(m+n)\sigma} \\
&= -n\eta^{IJ} \delta_{m+n,0} = m\eta^{IJ} \delta_{m+n,0}
\end{aligned}$$

となるので、振動子の交換関係

$$e^{-i(m+n)\tau} \left\{ \begin{array}{l} [\bar{\alpha}_m^I, \bar{\alpha}_n^J] \\ [\alpha_m^I, \alpha_n^J] \end{array} \right\} = m\eta^{IJ} \delta_{m+n,0}, \quad \therefore \left\{ \begin{array}{l} [\bar{\alpha}_m^I, \bar{\alpha}_n^J] \\ [\alpha_m^I, \alpha_n^J] \end{array} \right\} = m\eta^{IJ} \delta_{m+n,0}$$

を得る.

同様に上式 (76) を交換関係 (55) に代入すれば,

$$[\alpha_m^I, \bar{\alpha}_n^J] = 0$$

が導かれる.

13.2 閉弦の Virasoro 演算子

閉弦に対しては 2 組の横方向 Virasoro 演算子

$$\bar{L}_n^\perp = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbf{Z}} \bar{\alpha}_p^I \bar{\alpha}_{n-p}^I, \quad L_n^\perp = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbf{Z}} \alpha_p^I \alpha_{n-p}^I$$

を定義できる. X^- を横方向座標に関係付ける式

$$\begin{aligned}
\dot{X}^- + X^{-'} &= \frac{1}{\alpha'} \frac{1}{2p^+} (\dot{X}^I + X^{I'})^2 = \frac{2}{p^+} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \bar{L}_n^\perp e^{-in(\tau+\sigma)}, \\
\dot{X}^- - X^{-'} &= \frac{1}{\alpha'} \frac{1}{2p^+} (\dot{X}^I - X^{I'})^2 = \frac{2}{p^+} \sum_{n \in \mathbf{Z}} L_n^\perp e^{-in(\tau-\sigma)}
\end{aligned} \tag{77}$$

[第 2 の等号については下記] を X^- (の導関数) のモード展開 (76):

$$\dot{X}^- + X^{-'} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \bar{\alpha}_n^- e^{-in(\tau+\sigma)}, \quad \dot{X}^- - X^{-'} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \alpha_n^- e^{-in(\tau-\sigma)}$$

と比較すると、閉弦においても X^- の振動子モード $\bar{\alpha}_n^-, \alpha_n^-$ が横方向 Virasoro 演算子に相当することが分かる:

$$\sqrt{2\alpha'} \bar{\alpha}_n^- = \frac{2}{p^+} \bar{L}_n^\perp, \quad \sqrt{2\alpha'} \alpha_n^- = \frac{2}{p^+} L_n^\perp.$$

$n = 0$ の場合を考えると

$$\alpha_0^\mu = \bar{\alpha}_0^\mu \quad \Rightarrow \quad \alpha_0^- = \bar{\alpha}_0^-$$

なので

$$L_0^\perp = \bar{L}_0^\perp$$

が得られる。これは閉弦の任意の状態 $|\Psi\rangle$ が $L_0^\perp |\Psi\rangle = \bar{L}_0^\perp |\Psi\rangle$ を満たさなければならないという、状態 $|\Psi\rangle$ に対する制約である。

$L_0^\perp, \bar{L}_0^\perp$ を正規順序化すると

$$N[\bar{L}_0^\perp] = \frac{\alpha'}{4} p^I p^I + \bar{N}^\perp, \quad N[L_0^\perp] = \frac{\alpha'}{4} p^I p^I + N^\perp \quad (13.42)$$

(ただし $N^\perp \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{I\dagger} a_n^I$, $\bar{N}^\perp \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n \bar{a}_n^{I\dagger} \bar{a}_n^I$) および

$$\bar{L}_0^\perp = N[\bar{L}_0^\perp] - 1, \quad L_0^\perp = N[L_0^\perp] - 1 \quad (13.44)$$

となるので [本稿次節で補足], この制約条件は

$$N^\perp = \bar{N}^\perp$$

と書き換えられることが有用となる。

閉弦に対する質量やハミルトニアンを, 次のように Virasoro 演算子に関係付けることができる [導出は下記].

$$\begin{aligned} M^2 &= \frac{2}{\alpha'} (N[L_0^\perp] + N[\bar{L}_0^\perp] - 2) - p^I p^I \\ &= \frac{1}{\alpha'} (N^\perp + \bar{N}^\perp - 2), \end{aligned} \quad (78)$$

$$\begin{aligned} H &= N[L_0^\perp] + N[\bar{L}_0^\perp] - 2 \\ &= \frac{\alpha'}{2} p^I p^I + N^\perp + \bar{N}^\perp - 2. \end{aligned} \quad (79)$$

Virasoro 演算子の閉弦座標への作用として以下が見出される [導出は下記].

- $[N[L_0^\perp] + N[\bar{L}_0^\perp], X^I(\tau, \sigma)] = -i \frac{\partial X^I}{\partial \tau}$
 - ハミルトニアン $H = N[L_0^\perp] + N[\bar{L}_0^\perp] - 2$ は τ -推進を生成する.
- $[N[L_0^\perp] - N[\bar{L}_0^\perp], X^I(\tau, \sigma)] = i \frac{\partial X^I}{\partial \sigma}$
 - $P \equiv N[L_0^\perp] - N[\bar{L}_0^\perp]$ はパラメーター σ の巡回的なずらしを生成する.
 - * 光錐ゲージにおいてもパラメーター σ は固定されず,
 $\sigma \rightarrow \sigma + \sigma_0$ という変換を施せる任意性が残っている.
 - * このことから P は“世界面の”運動量と言える.
- $L_0^- = \bar{L}_0^- (\Rightarrow N[L_0^\perp] = N[\bar{L}_0^\perp])$ より,
 パラメーター σ のずらし操作の下で閉弦状態 $|\Psi\rangle$ は不変: $\exp(-iP\sigma_0) |\Psi\rangle = |\Psi\rangle$.

13.2 節, 式の導出など

■式 (77) 第 2 の等号について 弦座標の導関数の線形結合 (76):

$$\begin{aligned} \dot{X}^\mu + X^{\mu'} &= \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \bar{\alpha}_n^\mu e^{-in(\tau+\sigma)}, \\ \dot{X}^\mu - X^{\mu'} &= \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \alpha_n^\mu e^{-in(\tau-\sigma)} \end{aligned}$$

を用いると

$$\begin{aligned}
(\dot{X}^I + X^{I'})^2 &= 4\alpha' \sum_{n \in \mathbf{Z}} \left(\frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbf{Z}} \bar{\alpha}_p^I \alpha_{n-p}^I \right) e^{-in(\tau+\sigma)} \equiv 4\alpha' \sum_{n \in \mathbf{Z}} \bar{L}_n^\perp e^{-in(\tau+\sigma)}, \\
(\dot{X}^I - X^{I'})^2 &= 4\alpha' \sum_{n \in \mathbf{Z}} \left(\frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbf{Z}} \alpha_p^I \alpha_{n-p}^I \right) e^{-in(\tau-\sigma)} \equiv 4\alpha' \sum_{n \in \mathbf{Z}} L_n^\perp e^{-in(\tau-\sigma)}
\end{aligned} \tag{13.36}$$

となることによる [第 1 の等号については本稿次節で補足].

■ M^2 の式 (78), H の式 (79) の導出

$$\begin{aligned}
\alpha' p^- &= \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^- \quad (\because \alpha_0^\mu = \sqrt{\alpha'/2} p^\mu) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{p^+} L_0^\perp + \frac{2}{p^+} \bar{L}_0^\perp \right) \\
&= \frac{1}{p^+} (N[L_0^\perp] + N[\bar{L}_0^\perp] - 2) \quad (\text{式 (13.44)}) \\
&= \frac{1}{p^+} \left(\frac{\alpha'}{2} p^I p^I + N^\perp + \bar{N}^\perp - 2 \right) \quad (\text{式 (13.42)})
\end{aligned}$$

に注意して

$$\begin{aligned}
M^2 &= 2p^+ p^- - p^I p^I \\
&= \frac{2}{\alpha'} (N[L_0^\perp] + N[\bar{L}_0^\perp] - 2) - p^I p^I \\
&= \frac{1}{\alpha'} (N^\perp + \bar{N}^\perp - 2), \\
H &= \alpha' p^+ p^- \\
&= N[L_0^\perp] + N[\bar{L}_0^\perp] - 2 \\
&= \frac{\alpha'}{2} p^I p^I + N^\perp + \bar{N}^\perp - 2
\end{aligned}$$

とすれば良い.

■ Virasoro 演算子の閉弦座標への作用について 計算練習 13.2 で得た 2 式

$$[\bar{L}_0^\perp, X^I(\tau, \sigma)] = -\frac{i}{2} (\dot{X}^I + X^{I'}), \quad [L_0^\perp, X^I(\tau, \sigma)] = -\frac{i}{2} (\dot{X}^I - X^{I'})$$

を辺々足すまたは引くと,

$$[N[L_0^\perp] + N[\bar{L}_0^\perp], X^I(\tau, \sigma)] = -i \frac{\partial X^I}{\partial \tau}, \quad [N[L_0^\perp] - N[\bar{L}_0^\perp], X^I(\tau, \sigma)] = i \frac{\partial X^I}{\partial \sigma}$$

を得る.

13.2 について

■式 (13.36) 第 1 の等号 例えば第 1 式について

$$\begin{aligned} (\dot{X}^I + X^{I'})^2 &= 2\alpha' \sum_{p,m} \bar{\alpha}_p^I \bar{\alpha}_m^I e^{-i(p+m)(\tau+\sigma)} \\ &= 4\alpha' \sum_n \left(\frac{1}{2} \sum_p \bar{\alpha}_p^I \bar{\alpha}_{n-p}^I \right) e^{-in(\tau+\sigma)} \quad (m+p=n) \end{aligned}$$

とすれば良い.

■ $N[\bar{L}_0^\perp], N[L_0^\perp]$ の式 (13.42) について

$$\begin{aligned} L_0^\perp &= \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbf{Z}} \alpha_p^I \alpha_{-p}^I \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} p (a_p^I a_p^{I\dagger} + a_p^{I\dagger} a_p^I) + \frac{\alpha'}{2} p^I p^I \right\} \quad (\because \alpha_0^I = \sqrt{\alpha'/2} p^I) \end{aligned}$$

なので

$$N[L_0^\perp] = \frac{\alpha'}{4} p^I p^I + N^\perp, \quad N^\perp \equiv \sum_{p=1}^{\infty} p a_p^{I\dagger} a_p^I$$

を得る. $N[\bar{L}_0^\perp]$ についても同様.

■式 (13.44) とその説明について 上で行った $N[\bar{L}_0^\perp], N[L_0^\perp]$ の式 (13.42) の確認作業より, 例えば

$$L_0^\perp = N[L_0^\perp] + a$$

における正規順序化定数 a は, 開弦の場合と同様に

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} p [a_p^I, a_p^{I\dagger}] \\ &= \frac{1}{2} (D-2) \sum_{p=1}^{\infty} p : (12.107) \\ &= -\frac{1}{24} (D-2) : (12.111) \\ &= -1 \quad (\text{閉弦においても } D=26) \end{aligned}$$

となる. \bar{L}_0^\perp の正規順序化定数についても同様.

■式 (13.45) とその説明について

$$L_0^\perp = N[L_0^\perp] - 1, \quad \bar{L}_0^\perp = N[\bar{L}_0^\perp] - 1$$

より

$$L_0^\perp = \bar{L}_0^\perp \Rightarrow N[L_0^\perp] = N[\bar{L}_0^\perp]$$

である. そこで $N[\bar{L}_0^\perp], N[L_0^\perp]$ の式 (13.42) を等置して $N^\perp = \bar{N}^\perp$: (13.45) を得る.

■閉弦の状態に関する質量公式 (13.48) について 式 (13.48):

$$M^2 = \frac{2}{\alpha'}(N^\perp + \bar{N}^\perp - 2)$$

は開弦に関する式 (12.164): $M^2 = \frac{1}{\alpha'}(N^\perp - 1)$ と類似している.

■式 (13.59) の導出 (問題 13.3(a)) 恒等式

$$e^{-iP\sigma_0} X^I e^{iP\sigma_0} = X^I + i\sigma_0 [X^I, P] + \frac{(i\sigma_0)^2}{2!} [[X^I, P], P] + \dots$$

が成り立つこと (ベーカー・ハウスドルフの補助定理) を利用する [7, p.129].

$$[X^I, P] = -i \frac{\partial X^I}{\partial \sigma} : (13.56), \quad [[X^I, P], P] = -i \frac{\partial}{\partial \sigma} [X^I, P] = -\frac{\partial^2 X^I}{\partial \sigma^2}, \quad \dots$$

により上式は

$$e^{-iP\sigma_0} X^I e^{iP\sigma_0} = X^I + \sigma_0 \frac{\partial X^I}{\partial \sigma} + \frac{\sigma_0^2}{2!} \frac{\partial^2 X^I}{\partial \sigma^2} + \dots = X^I(\tau, \sigma + \sigma_0) : (13.59)$$

を与える.

計算練習 13.1

$$\begin{aligned} [\bar{L}_m^\perp, x_0^I] &= \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbf{Z}} (\bar{\alpha}_p^J [\bar{\alpha}_{m-p}^J, x_0^I] + [\bar{\alpha}_p^J, x_0^I] \bar{\alpha}_{m-p}^J) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbf{Z}} \left\{ \bar{\alpha}_p^J \left(-i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \eta^{IJ} \delta_{pm} \right) + \left(-i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \eta^{IJ} \delta_{p0} \right) \bar{\alpha}_{m-p}^J \right\} \quad (\because \text{式 (13.33)}) \\ &= -i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \bar{\alpha}_m^I : (13.53). \end{aligned}$$

$\bar{L}_0^\perp = N[\bar{L}_0^\perp] - 1$ より $m = 0$ に対してこれは \bar{L}_0^\perp を $N[\bar{L}_0^\perp]$ に置き換えても成り立つと期待される. 実際, $N[\bar{L}_0^\perp]$ の式 (13.42) より

$$[N[\bar{L}_0^\perp], x_0^I] = \frac{\alpha'}{4} [p^J p^J, x_0^I] = -i \frac{\alpha'}{2} p^I = -i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \bar{\alpha}_0^I \quad (\because \text{式 (13.22)})$$

となる. 式 (13.53) の第 2 式

$$[L_m^\perp, x_0^I] = -i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \alpha_m^I$$

も同様に確かめられる. $m = 0$ に対してこれが L_0^\perp を $N[L_0^\perp]$ に置き換えても成り立つことも同様である.

計算練習 13.2

$X^I(\tau, \sigma)$ を式 (13.24) のようにモード展開し, 交換関係 (13.51–53) を用いると

$$\begin{aligned}
 [\bar{L}_0^\perp, X^I(\tau, \sigma)] &= [\bar{L}_0^\perp, x_0^I] + \sqrt{2\alpha'} [\bar{L}_0^\perp, \alpha_0^I] \tau + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{-in\tau}}{n} ([\bar{L}_0^\perp, \alpha_n^I] e^{in\sigma} - [\bar{L}_0^\perp, \bar{\alpha}_n^I] e^{-in\sigma}) \\
 &= -i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \bar{\alpha}_0^I - i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \bar{\alpha}_n^I e^{-in(\tau+\sigma)} \\
 &= -\frac{i}{2} \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \bar{\alpha}_n^I e^{-in(\tau+\sigma)} \\
 &= -\frac{i}{2} \{ \dot{X}^I(\tau, \sigma) + X^{I'}(\tau, \sigma) \} : (13.54) \quad (\because \text{式 (13.26)})
 \end{aligned}$$

を得る. ここで用いた交換関係 (13.51–53) は \bar{L}_0^\perp を $N[\bar{L}_0^\perp]$ に置き換えても成り立つので, 式 (13.54) 第 1 式もまた \bar{L}_0^\perp を $N[\bar{L}_0^\perp]$ に置き換えても成り立つ. 式 (13.54) 第 2 式

$$[L_0^\perp, X^I] = -\frac{i}{2} (\dot{X}^I - X^{I'})$$

も同様に確かめられる. これが L_0^\perp を $N[L_0^\perp]$ に置き換えても成り立つことも同様である.

13.3 閉弦の状態空間

基底状態を $|p^+, \vec{p}_T\rangle$ とする状態

$$|\lambda, \bar{\lambda}\rangle = \left[\prod_{n,I} (a_n^{I\dagger})^{\lambda_{n,I}} \right] \left[\prod_{m,J} (\bar{a}_m^{J\dagger})^{\bar{\lambda}_{m,J}} \right] |p^+, \vec{p}_T\rangle$$

($\lambda_{n,I}, \bar{\lambda}_{n,I}$ は非負整数) のうち, 条件 $L_0^\perp = \bar{L}_0^\perp$ より固有値が

$$N^\perp = \bar{N}^\perp$$

を満たすものが一般的な基本状態を成す. この条件はパラメーター σ の巡回的なずらしの操作の下で不変な閉弦の状態だけが許容されることを意味する (13.2 節).

$M^2 = \frac{2}{\alpha'} (N^\perp + \bar{N}^\perp - 2)$ より, 基底状態 $|p^+, \vec{p}_T\rangle (N^\perp = \bar{N}^\perp = 0)$ は $M^2 = -4/\alpha' < 0$ を持つ閉弦タキオンである. 閉弦タキオンは開弦タキオンに比べて理解がほとんど進んでいない.

$M^2 = 0$ の無質量状態は $N^\perp + \bar{N}^\perp = 2$ のとき実現され, 条件 $N^\perp = \bar{N}^\perp$ よりこのとき $N^\perp = \bar{N}^\perp = 1$ である. そこで状態

$$\sum_{I,J} R_{IJ} a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle$$

を考える. 一般に行列 (R_{IJ}) はトレースレスの対称部分 (\hat{S}_{IJ}) と, 反対称部分 (A_{IJ}) と, 単位行列 (δ_{IJ}) に比例する部分に分解できる:

$$R_{IJ} = \hat{S}_{IJ} + A_{IJ} + S' \delta_{IJ}.$$

ここに

$$S_{IJ} \equiv \frac{1}{2} (R_{IJ} + R_{JI}) : \text{対称部分}, \quad A_{IJ} \equiv \frac{1}{2} (R_{IJ} - R_{JI}) : \text{反対称部分}$$

に対して

$$\begin{aligned}
 S &\equiv \delta_{IJ} S_{IJ} [= \text{tr}(S_{IJ})], \\
 \hat{S}_{IJ} &\equiv S_{IJ} - \frac{1}{D-2} \delta_{IJ} S : \text{トレースレスの対称部分}, \\
 S' &\equiv \frac{S}{D-2}
 \end{aligned}$$

である.

ここでトレースレス部分 \hat{S}_{IJ} の担う状態

$$\sum_{I,J} \hat{S}_{IJ} a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle \quad (80)$$

は, 重力子の 1 粒子状態に同定される. 実際, 運動量 (p^+, \vec{p}_T) を持つ 1 重力子状態は, 式 (37):

$$\sum_{I,J=2}^{D-1} \xi_{IJ} a_{p^+, \vec{p}_T}^{IJ\dagger} |\Omega\rangle$$

で与えられる. 重力子の偏極テンソル ξ_{IJ} は \hat{S}_{IJ} と同じくトレースレスで対称だから, 上の状態 (80) に対応付けられる.

- 反対称部分 A_{IJ} の担う状態

$$\sum_{I,J} A_{IJ} a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle$$

↔ 反対称テンソル場 $B_{\mu\nu}$ (Kalb-Ramond 場) の 1 粒子状態 (問題 10.6, 第 16 章).

- トレース部分 $S' \delta_{IJ}$ の担う状態

$$\sum_{I,J} S' \delta_{IJ} a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle = S' a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{I\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle$$

↔ 質量のないスカラー場の 1 粒子状態. 粒子はディラトンと呼ばれる.

最後に弦状態の波動関数と古典場の関係を論じる. 無質量状態 $a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle$ の重ね合せ

$$|\Psi, \tau\rangle = \int dp^+ d^{24} p_T \psi_{IJ}(\tau, p^+, \vec{p}_T) a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle$$

が Schrödinger 方程式 $i\partial_\tau |\Psi, \tau\rangle = H |\Psi, \tau\rangle$ を満たすことから, 波動関数 $\psi_{IJ}(\tau, p^+, \vec{p}_T) = \langle p^+, \vec{p}_T | \Psi, \tau \rangle$ は質量のないスカラー場の方程式

$$\left(i \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\alpha'}{2} p^K p^K \right) \psi_{IJ}(\tau, p^+, \vec{p}_T) = 0$$

を満たす [我々は同様の計算を開弦に対して行っている]. したがって波動関数の

- トレースレスの対称部分
- 反対称部分
- トレース部分

も同じ方程式を満たす．ところで重力場，Kalb-Ramond 場，ディラトン場も光錐ゲージでは，質量のないスカラー場の方程式 (32):

$$\left(i \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\alpha'}{2} p^K p^K \right) \phi(\tau, p^+, \vec{p}_T) = 0$$

(ただし [閉弦の光錐ゲージ条件を想定して] $x^+ = \alpha' p^+ \tau$ と設定した) を満たすことから (重力場については 10.6 節，Kalb-Ramond 場については問題 10.6)，これらをそれぞれ重力場，Kalb-Ramond 場，ディラトン場と見なすことが正当化される．

13.3 について

■「表 13.1 の 1 行目の基底状態は量子スカラー場の 1 粒子状態である」(p.285, 1.16) について 無質量状態 $N^\perp = \bar{N}^\perp = 1$ に対して p.287 で議論されているように，基底状態 $N^\perp = \bar{N}^\perp = 0$ に対して波動関数 ψ はスカラー場の方程式

$$i \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = \left(\frac{\alpha'}{2} p^I p^I - 2 \right) \psi$$

を満たす．

■ディラトンに関する p.287 訳註の引用

Kalb や Ramond は人名だが，‘dilaton’ は ‘拡げる’ という意味の ‘dilate’ に因む．元々この術語は Kaluza-Klein 理論 (17.6 節) において，第 5 次元がコンパクト化した状況下で，コンパクト化寸法の変動 (dilation) に対応する量子として現れる仮想的スカラーボゾンを指すために用いられた造語である．弦理論では空間のコンパクト化構造ではなく，閉弦自体の閉じた構造における方向性を持たない変形 (dilation) の量子という形でディラトンが現れている．

ここで「方向性を持たない変形」とあるのは，ディラトンの 1 粒子状態 (13.71):

$$\sum_{I,J} S' \delta_{IJ} a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle = S' a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{I\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle$$

が横方向添字に関して対称的であるためと考えられる．

■波動関数を導入する式 (13.74) について $N^\perp = \bar{N}^\perp = 1$ の無質量状態を考えているため， $a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} \rightarrow a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{I\dagger}$ と訂正されるものと考えられる．

■「 $x^+ = \alpha' p^+ \tau$ と設定すると」(p.287 下から 4 行目) について 光錐ゲージ条件 (9.62): $X^+ = \beta \alpha' p^+ \tau$ (閉弦に対して $\beta = 1$) と整合している．

13.4 弦の結合とディラトン

本節ではディラトンが「弦理論において果たす役割を大まかに見」(p.288, 1.8,9) る．これは「上級コースの題材である」(p.288, 1.8)．

■弦の結合 g と重力相互作用 超弦理論の展開される 10 次元時空を考えよう．自然単位系において，次元解析 $[G^{(D)}] = L^{D-2}, [\alpha'] = L^2$ により 10 次元 Newton 定数は

$$G^{(10)} \sim (\alpha')^4$$

である。閉弦の相互作用に関する無単位の定数 (弦の結合) g を導入すると、 $G^{(D)}$ は g^2 に比例することが分かる：

$$G^{(10)} \sim g^2 (\alpha')^4.$$

$g \rightarrow 0$ とすると $G^{(10)} \rightarrow 0$ となって重力の相互作用が消える。6次元の余剰次元が体積 $V^{(6)}$ の空間へと巻き取られているとき、4次元時空の重力定数 G との関係 (3.116) は

$$G = \frac{G^{(10)}}{V^{(6)}} \sim g^2 \alpha' \frac{1}{V^{(6)}/l_s^6} \quad (\text{弦の長さ (8.78): } l_s = \sqrt{\alpha'}) \\ \sim g^2 \alpha'$$

を与える。ここに $V^{(6)}/l_s^6$ は弦の長さ l_s を単位として測った余剰次元体積である。

■ディラトン状態は弦の相互作用を制御する 弦理論において閉弦の結合 g は定数ではなく力学変数であって、ディラトン場 $\phi(x)$ から

$$g \sim e^\phi$$

と“決定される”。ひとつの魅力的な可能性として、ディラトン場は [したがって閉弦の結合 g は] 他の場が生成するディラトンに対するポテンシャルの安定な臨界点における値に落ち着く。

13.4 について

■「自然単位系において $G^{(D)}$ は…… $l_P^{(D)}$ の $(D-2)$ 乗に等しい」(p.288 下から 3,2 行) について 自然単位系において式 (3.90) は $l_P = \sqrt{G}$ となるので、式 (3.108) は $G^{(D)} = (l_P^{(D)})^{D-2}$ を与える。

■ディラトン場の単位 (次元) ディラトン場 ϕ が単位を持つなら、式 (13.85): $g \sim e^\phi$ において指数部分を無単位とするための何らかの係数が必要となる。

13.5 $\mathbf{R}^1/\mathbf{Z}_2$ オービフォールドにおける閉弦

26次元時空における1方向 $x^{25} \equiv x$ に同一視

$$x \sim -x$$

を導入し、この方向の半直線 $x \geq 0$ ($\mathbf{R}^1/\mathbf{Z}_2$ オービフォールド) における理論を考える。

まず、変換 $x \rightarrow -x$ を表す演算子 U を導入する。これは弦の座標 $X^{25} \equiv X$ に次のように作用する。

$$UX(\tau, \sigma)U^{-1} = -X(\tau, \sigma).$$

また U は他の弦座標 $X^i (i = 2, \dots, 24)$ および p^+, x_0^- を不変に保つものとする。

$$UX^i(\tau, \sigma)U^{-1} = X^i(\tau, \sigma), \quad Up^+U^{-1} = p^+, \quad Ux_0^-U^{-1} = x_0^-.$$

このとき

$$X^\pm, \quad p^-, \quad H$$

も不変となる [説明は下記]。ハミルトニアンの不変性は U が理論に備わっている対称性であることを意味し、ある時刻において U -不変な状態が全時刻において U -不変となることを保証する。

オービフォルド閉弦理論は、同一視を導入しない元々の母体理論の中の U -不変な状態だけを保持する。

$$\vec{p}_T = (\vec{p}, p), \quad \vec{p} \equiv (p^2, \dots, p^{24}), \quad p \equiv p^{25}$$

と書くと、重ね合せ

$$|p^+, \vec{p}, p\rangle + |p^+, \vec{p}, -p\rangle \quad (81)$$

は U -不変な状態であることを確かめられる [確認は下記]。そこでこれをオービフォルド基底状態とする。ここから例えば U -不変な無質量状態 ($N^\perp = \bar{N}^\perp = 1$) として

$$\begin{aligned} & \alpha_{-1}^i \bar{\alpha}_{-1}^j (|p^+, \vec{p}, p\rangle + |p^+, \vec{p}, -p\rangle), \\ & \alpha_{-1}^i \bar{\alpha}_{-1}^j (|p^+, \vec{p}, p\rangle - |p^+, \vec{p}, -p\rangle), \\ & \alpha_{-1}^i \bar{\alpha}_{-1}^j (|p^+, \vec{p}, p\rangle - |p^+, \vec{p}, -p\rangle), \\ & \alpha_{-1}^i \bar{\alpha}_{-1}^j (|p^+, \vec{p}, p\rangle + |p^+, \vec{p}, -p\rangle) \end{aligned}$$

が作られる [本稿次節で U -不変性を確認]。

13.5 節, 式の導出など

■ X^\pm, p^-, H の U -不変性について

実際, $X^+ = \alpha' p^+ \tau$ の不変性は, p^+ の不変性から直接に導かれる. X^- の不変性が成立するのは, これが不変なモード x_0^- と, 不変な座標の 2 次の項と, \dot{X} や X' の 2 次の項 (式 (13.35) [$\dot{X}^- \pm X'^- = \frac{1}{\alpha'} \frac{1}{2p^+} (\dot{X}^I \pm X'^I)^2$] 参照) の和から成るからである. p^- が U の下で不変であることも導かれる [本稿次節で補足]. p^+ も不変なので, ハミルトニアン $H = \alpha' p^+ p^-$ (式 (13.49) 参照) も不変で $U H U^{-1} = H$ である. これは U が閉弦理論に備わっている対称性であることを意味している. (p.291, 1.3-7)

■ オービフォルド基底状態 (81) の U -不変性について 弦座標は

$$X(\tau, \sigma) = x_0 + \alpha' p \tau + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{-in\tau}}{n} (\alpha_n e^{in\sigma} + \bar{\alpha}_n e^{-in\sigma})$$

とモード展開されるので, あらゆる τ と σ の値に対して

$$U X(\tau, \sigma) U^{-1} = -X(\tau, \sigma)$$

が満たされるには, U は各演算子に対して以下のように作用しなければならない.

$$U x_0 U^{-1} = -x_0, \quad U p U^{-1} = -p, \quad U \alpha_n U^{-1} = -\alpha_n, \quad U \bar{\alpha}_n U^{-1} = -\bar{\alpha}_n.$$

さて, 運動量 p に共役な演算子 x_0 の働き $|p^+, \vec{p}, p\rangle = e^{ix_0 p} |p^+, \vec{p}, 0\rangle$ を用いると,

$$U |p^+, \vec{p}, p\rangle = U e^{ix_0 p} U^{-1} U |p^+, \vec{p}, 0\rangle = e^{i(-x_0) p} |p^+, \vec{p}, 0\rangle = |p^+, \vec{p}, -p\rangle$$

となる [第 2 の等号について, x_0 が演算子であるのに対して p は固有値である]. よってオービフォルド基底状態 (81):

$$|p^+, \vec{p}, p\rangle + |p^+, \vec{p}, -p\rangle$$

は U -不変となっていることが見て取れる.

13.5 について

■「 p^- が U の下で不変であることも導かれる」(p.291, 1.5) について X^- の不変性により $p^- = \sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\alpha_0^-$ は不変である. あるいは $p^+, p^- = \sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\alpha_0^i$ の不変性および $UpU^{-1} = -p$:(13.92) により

$$p^- = \frac{1}{2p^+}(p^i p^i + p^2 + m^2)$$

は不変である.

■ U -不変性について p.291 にあるように, ハミルトニアンの不変性は U が理論に備わっている対称性であることを意味し, ある時刻において U -不変な状態が全時刻において U -不変となることを保証する.

$$UHU^{-1} = H \quad \rightarrow \quad [U, H] = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dU}{dt} = 0.$$

■ $|p + \delta p\rangle = \exp(i\delta pq) |p\rangle$ (p.292, 1.7) について ここでは p, q を演算子とし, 運動量 p の固有値 p' を持つ固有状態を $|p'\rangle$ と書く. このとき状態 $e^{iq\delta p'} |p'\rangle$ は運動量の固有値 $p' + \delta p'$ を持つこと

$$pe^{iq\delta p'} |p'\rangle = (p' + \delta p')e^{iq\delta p'} |p'\rangle$$

を, $\delta p'$ の 1 次の近似で次のように確かめられる.

$$\begin{aligned} p(1 + iq\delta p') |p'\rangle &= \{p + i\delta p'(qp + [p, q])\} |p'\rangle \\ &= \{p' + i\delta p'(qp' - i)\} |p'\rangle \\ &= \{(p' + \delta p') + p' \cdot iq\delta p'\} |p'\rangle \\ &\simeq (p' + \delta p')(1 + iq\delta p') |p'\rangle. \end{aligned}$$

なお, これは運動量演算子 p が対となる座標 q の並進 $|q + \delta q\rangle = e^{ip\delta q} |q\rangle$ をもたらすのと対称的な関係として理解できる.

■「波動関数 $\psi(\tau, p^+, \vec{p}, x)$ は x の偶関数になる」(p.292, 1.18) について 波動関数

$$\psi(\tau, p^+, \vec{p}, x) = \int \frac{dp}{2\pi} e^{ipx} \psi(\tau, p^+, \vec{p}, p)$$

は, 引数 τ, p^+, \vec{p} を省略すると

$$\begin{aligned} \psi(-x) &= \int \frac{dp}{2\pi} e^{-ipx} \psi(p) \\ &= \int \frac{dp'}{2\pi} e^{ip'x} \psi(-p') \quad (p' = -p) \\ &= \psi(x) \quad (\because \psi(-p') = \psi(p') : (13.97)) \end{aligned}$$

を満たすので偶関数である.

■p.292, 1.23~26 の 4 つの無質量状態が U -不変であることについて p^+ と \vec{p} を省略して状態 $|p^+, \vec{p}, p\rangle$ を $|p\rangle$ と書く. 例えば 2 つ目の状態

$$\alpha_{-1}^i \bar{\alpha}_{-1}(|p\rangle - |-p\rangle)$$

について, 式 (13.94) より

$$U(|p\rangle - |-p\rangle) = -(|p\rangle - |-p\rangle)$$

なので $|p\rangle - |-p\rangle$ は「 $U = -1$ となるような真空状態の組合せ」(p.292, 1.27,28) である. そして

$$\begin{aligned} & U\{\alpha_{-1}^i \bar{\alpha}_{-1}(|p\rangle - |-p\rangle)\} \\ &= (U\alpha_{-1}^i U^{-1})(U\bar{\alpha}_{-1} U^{-1})U(|p\rangle - |-p\rangle) \\ &= \alpha_{-1}^i (-\bar{\alpha}_{-1})\{-(|p\rangle - |-p\rangle)\} \\ &= \alpha_{-1}^i \bar{\alpha}_{-1}(|p\rangle - |-p\rangle) \end{aligned}$$

なので「状態全体として $U = +1$ になっている」(p.292, 1.28).

■次節の予告「“ツイスト (twist) した” 部分 (セクター)」(p.292 一番下) に関する p.292 訳註の引用

日常英語としての ‘twist’ の意味は, 曲げる, ねじる, よじる, からませるなど. ここではオービフォルドに課した対称性 (同一視) の制約によって弦の新たな “構造” が生じることを指す.

計算練習 13.3

$$\begin{aligned} H &= N[L_0^\perp] + N[\bar{L}_0^\perp] - 2 \\ &= \frac{\alpha'}{2} p^I p^I + N^\perp + \bar{N}^\perp - 2 : (13.50) \\ &= \frac{\alpha'}{2} (p^i p^i + p^2) + \sum_{n=1}^{\infty} n \{ (\bar{a}_n^{i\dagger} \bar{a}_n^i + a_n^{i\dagger} a_n^i) + (\bar{a}_n^\dagger \bar{a}_n + a_n^\dagger a_n) \} - 2 \end{aligned}$$

は U の作用

$$\begin{aligned} p^i &\rightarrow p^i, & \bar{a}_n^{i\dagger} &\rightarrow \bar{a}_n^{i\dagger}, & \bar{a}_n^i &\rightarrow \bar{a}_n^i, & a_n^{i\dagger} &\rightarrow a_n^{i\dagger}, & a_n^i &\rightarrow a_n^i, \\ p &\rightarrow -p, & \bar{a}_n^\dagger &\rightarrow -\bar{a}_n^\dagger, & \bar{a}_n &\rightarrow -\bar{a}_n, & a_n^\dagger &\rightarrow -a_n^\dagger, & a_n &\rightarrow -a_n \end{aligned}$$

の下で不変である.

13.6 オービフォルドにおけるツイストしたセクター

オービフォルド理論においてツイストした閉弦が新たに現れる. これは母体理論において $X(\tau, \sigma)$ と $X(\tau, \sigma + 2\pi)$ が異なるような開弦である. 同一視 $X \sim -X$ によって $X \leq 0$ の部分を $x \geq 0$ に移すと, オービフォルド $x \geq 0$ における弦が得られる. ところが端点はオービフォルド条件

$$X(\tau, \sigma + 2\pi) = -X(\tau, \sigma) \quad (82)$$

によって同一視されるため, オービフォルド $x \geq 0$ における弦は閉弦となる (図 29 参照). これはツイストした閉弦と呼ばれ, [弦の状態の中に] ツイストしたセクター (部分) を構成する.

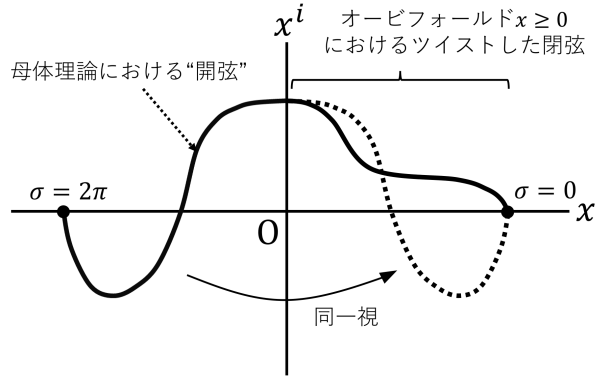


図 29 オービフォールドにおけるツイストした閉弦

半整数 $\frac{n}{2}$ ($n \in \mathbf{Z}_{\text{odd}}$: 奇数) に対して $e^{\pm i \frac{n}{2} \sigma}$ という指数関数因子を持つモード展開

$$X(\tau, \sigma) = i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \in \mathbf{Z}_{\text{odd}}} \frac{2}{n} e^{-i \frac{n}{2} \tau} (\bar{\alpha}_{\frac{n}{2}} e^{-i \frac{n}{2} \sigma} + \alpha_{\frac{n}{2}} e^{i \frac{n}{2} \sigma})$$

を考える。これは条件 (82) の下で波動方程式を満たすため、ツイストした閉弦に対する座標 X のモード展開を与える。

- 正準交換関係 $[X(\tau, \sigma), \mathcal{P}^\tau(\tau, \sigma')] = i\delta(\sigma - \sigma')$ から、振動子の交換関係

$$[\bar{\alpha}_{\frac{m}{2}}, \bar{\alpha}_{\frac{n}{2}}] = \frac{m}{2} \delta_{m+n,0}, \quad [\alpha_{\frac{m}{2}}, \alpha_{\frac{n}{2}}] = \frac{m}{2} \delta_{m+n,0}, \quad [\alpha_{\frac{m}{2}}, \bar{\alpha}_{\frac{n}{2}}] = 0 \quad (83)$$

が得られる [導出は下記].

- 変換 $x \rightarrow -x$ の演算子 U を定義する式 (13.87):

$$UX(\tau, \sigma)U^{-1} = -X(\tau, \sigma)$$

より U の振動子に対する作用は

$$U\alpha_{\frac{n}{2}}U^{-1} = -\alpha_{\frac{n}{2}}, \quad U\bar{\alpha}_{\frac{n}{2}}U^{-1} = -\bar{\alpha}_{\frac{n}{2}}$$

となる。

- X の展開には運動量の項が現れない。そこでツイストしたセクターの基底状態を $|p^+, \bar{p}\rangle$ とする。これは x 方向に保存する運動量を持たない。

ツイストしたセクターに対して Virasoro 演算子を

$$\bar{L}_0^\perp = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbf{Z}} \bar{\alpha}_p^i \bar{\alpha}_{-p}^i + \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbf{Z}_{\text{odd}}} \bar{\alpha}_{\frac{k}{2}} \bar{\alpha}_{-\frac{k}{2}}$$

のように定義する。 $1 + 2 + 3 + \dots \rightarrow -\frac{1}{12}$ に注意してこれを正規順序化すると

$$\bar{L}_0^\perp = N[\bar{L}_0^\perp] - \frac{15}{16}, \quad N[\bar{L}_0^\perp] = \frac{1}{4} \alpha' p^i p^i + \bar{N}^\perp, \quad \bar{N}^\perp = \sum_{p=1}^{\infty} \bar{\alpha}_{-p}^i \bar{\alpha}_p^i + \sum_{k \in \mathbf{Z}_{\text{odd}}^+} \bar{\alpha}_{-\frac{k}{2}} \bar{\alpha}_{\frac{k}{2}} : \text{数演算子} \quad (84)$$

となる ($\mathbf{Z}_{\text{odd}}^+$ は正の奇数) [導出は下記]. L_0^\perp に対しても同様の式が成り立つ. ここから質量の自乗の公式

$$\frac{1}{2}\alpha' M^2 = N^\perp + \bar{N}^\perp - \frac{15}{8} \quad (13.119)$$

が得られる [本稿次節で補足].

ツイストした状態 $|p^+, \vec{p}\rangle, \alpha_{-\frac{1}{2}}\bar{\alpha}_{-\frac{1}{2}}|p^+, \vec{p}\rangle, \dots$ の運動量ラベルは x 方向に保存する運動量を持たないため, 対応する座標空間の波動関数は $\psi(\tau, x^-, \vec{x})$ という形をとり, x を引数として持たない. これは波動関数に対応付けられる場が 25 次元時空 $x = 0$ に存在するためであると解釈できる. このことは式 (82): $X(\tau, \sigma + 2\pi) = -X(\tau, \sigma)$ を満たすツイストした閉弦が $x = 0$ を過ぎらねばならず, $x = 0$ 付近に局在することを強いられていることを考えれば, 理に適っている.

13.6 節, 式の導出など

■振動子の交換関係 (83) の導出 弦座標の導関数の線形結合は

$$\begin{aligned} \dot{X} + X' &= \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbf{Z}_{\text{odd}}} \bar{\alpha}_{\frac{n}{2}} e^{-i\frac{n}{2}(\tau+\sigma)}, \\ \dot{X} - X' &= \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbf{Z}_{\text{odd}}} \alpha_{\frac{n}{2}} e^{-i\frac{n}{2}(\tau-\sigma)} \end{aligned} \quad (13.106)$$

とモード展開される [本稿次節で補足]. これを正準交換関係の帰結 (13.28) [開弦の箇所で見た式 (54)] :

$$\left[(\dot{X}^I \pm X'^I)(\tau, \sigma), (\dot{X}^J \pm X'^J)(\tau, \sigma') \right] = \pm 4\pi\alpha' i \eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma')$$

における複号の上側を採用した式に適用すると,

$$\sum_{m', n' \in \mathbf{Z}_{\text{odd}}} e^{-i\frac{m'}{2}(\tau+\sigma)} e^{-i\frac{n'}{2}(\tau+\sigma')} \left[\bar{\alpha}_{\frac{m'}{2}}, \bar{\alpha}_{\frac{n'}{2}} \right] = 2\pi i \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma')$$

を得る. ここで両辺に積分

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma e^{i\frac{m}{2}\sigma} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma' e^{i\frac{n}{2}\sigma'}, \quad m, n \in \mathbf{Z}_{\text{odd}}$$

を施す. すると 2 つの関数 $e^{i\frac{k}{2}\sigma}$ と $e^{i\frac{k'}{2}\sigma}$ は $k, k' \in \mathbf{Z}_{\text{odd}}$ で $k + k' \neq 0$ であれば $k + k'$ が偶数になるので, 区間 $[0, 2\pi]$ において直交する. このため左辺において $m' = m, n' = n$ の交換子が抽出され,

$$\left[\bar{\alpha}_{\frac{m}{2}}, \bar{\alpha}_{\frac{n}{2}} \right] = \frac{m}{2} \delta_{m+n, 0} \quad (13.109)$$

が得られる (計算練習 13.4).

同様に

$$\left[\alpha_{\frac{m}{2}}, \alpha_{\frac{n}{2}} \right] = \frac{m}{2} \delta_{m+n, 0}, \quad \left[\alpha_{\frac{m}{2}}, \bar{\alpha}_{\frac{n}{2}} \right] = 0 \quad (13.110)$$

が得られる [本稿次節で詳細を補足].

■正規順序化した横方向 Virasoro 演算子 (84) の導出 Virasoro 演算子

$$\bar{L}_0^\perp = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbf{Z}} \bar{\alpha}_p^i \bar{\alpha}_{-p}^i + \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbf{Z}_{\text{odd}}} \bar{\alpha}_{\frac{k}{2}} \bar{\alpha}_{-\frac{k}{2}}$$

の第 2 項を正規順序化すると,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbf{Z}_{\text{odd}}} \bar{\alpha}_{\frac{k}{2}} \bar{\alpha}_{-\frac{k}{2}} &= \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbf{Z}_{\text{odd}}^+} \bar{\alpha}_{\frac{k}{2}} \bar{\alpha}_{-\frac{k}{2}} + \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbf{Z}_{\text{odd}}^+} \bar{\alpha}_{-\frac{k}{2}} \bar{\alpha}_{\frac{k}{2}} \\ &= \sum_{k \in \mathbf{Z}_{\text{odd}}^+} \bar{\alpha}_{-\frac{k}{2}} \bar{\alpha}_{\frac{k}{2}} + \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbf{Z}_{\text{odd}}^+} [\bar{\alpha}_{\frac{k}{2}}, \bar{\alpha}_{-\frac{k}{2}}] \\ &= \sum_{k \in \mathbf{Z}_{\text{odd}}^+} \bar{\alpha}_{-\frac{k}{2}} \bar{\alpha}_{\frac{k}{2}} + \frac{1}{4} \sum_{k \in \mathbf{Z}_{\text{odd}}^+} k \end{aligned}$$

となる. 最右辺におけるすべての正の奇数の“和”は次のように評価できる.

$$\sum_{k=1}^{\infty} k = \sum_{k \in \mathbf{Z}_{\text{odd}}^+} k + \sum_{k \in \mathbf{Z}_{\text{even}}^+} k = \sum_{k \in \mathbf{Z}_{\text{odd}}^+} k + 2 \sum_{k=1}^{\infty} k, \quad \therefore \sum_{k \in \mathbf{Z}_{\text{odd}}^+} k = - \sum_{k=1}^{\infty} k = \frac{1}{12}.$$

また第 1 の和 $\frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbf{Z}} \bar{\alpha}_p^i \alpha_{-p}^i$ は, 23 方向 i それぞれが正規順序化定数に $\frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{12}) = -\frac{1}{24}$ の寄与を持つので,

$$\bar{L}_0^\perp = \left(\frac{1}{4} \alpha' p^i p^i + \sum_{p=1}^{\infty} \bar{\alpha}_{-p}^i \alpha_p^i - 23 \cdot \frac{1}{24} \right) + \left(\sum_{k \in \mathbf{Z}_{\text{odd}}^+} \bar{\alpha}_{-\frac{k}{2}} \bar{\alpha}_{\frac{k}{2}} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{12} \right). \quad (13.117)$$

が得られる [本稿次節で補足]. これは式 (84):

$$\bar{L}_0^\perp = \frac{1}{4} \alpha' p^i p^i + \bar{N}^\perp - \frac{15}{16}, \quad \bar{N}^\perp = \sum_{p=1}^{\infty} \bar{\alpha}_{-p}^i \alpha_p^i + \sum_{k \in \mathbf{Z}_{\text{odd}}^+} \bar{\alpha}_{-\frac{k}{2}} \bar{\alpha}_{\frac{k}{2}} : \text{数演算子}$$

に書き直される.

■まとめ

オービフォールドは必ずツイストしたセクターを持つので, オービフォールドの導入には 2 重の効果がある——すなわち“2 段攻撃 (ダブル・ストライク)”となる. 第 1 の効果は, 母体理論における状態の中でオービフォールドの下で不変でない状態が除かれることである. もうひとつの効果は“ツイストした”境界条件を満たす新たなセクターが出現することである. (最終段落)

13.6 について

■弦座標のモード展開 (13.105) について 和の前の因子 i は弦座標 X の Hermite 性の条件が, 標準的な振動子の性質 $(\alpha_{n/2})^\dagger = \alpha_{-n/2}, (\bar{\alpha}_{n/2})^\dagger = \bar{\alpha}_{-n/2}$ となることを保証している. (同様の指摘は 15.4 節に見られる.) これは振動子が生成・消滅演算子となるために必要なことである.

■ $\dot{X} \pm X'$ の式 (13.106) について $X(\tau, \sigma)$ のモード展開 (13.105) より

$$\dot{X}(\tau, \sigma) = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \in \mathbf{Z}_{\text{odd}}} e^{-i\frac{n}{2}\tau} (\bar{\alpha}_{\frac{n}{2}} e^{-i\frac{n}{2}\sigma} + \alpha_{\frac{n}{2}} e^{i\frac{n}{2}\sigma}), \quad X'(\tau, \sigma) = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \in \mathbf{Z}_{\text{odd}}} e^{-i\frac{n}{2}\tau} (\bar{\alpha}_{\frac{n}{2}} e^{-i\frac{n}{2}\sigma} - \alpha_{\frac{n}{2}} e^{i\frac{n}{2}\sigma})$$

となることから得られる.

■振動子の交換関係 (13.110) について 式 (13.106) の $\dot{X} - X'$ に対して式 (13.28) の複号の下側を採用した式を書き下すと

$$\sum_{m', n' \in \mathbf{Z}_{\text{odd}}} e^{-i\frac{m'}{2}(\tau-\sigma)} e^{-i\frac{n'}{2}(\tau-\sigma')} [\alpha_{\frac{m'}{2}}, \alpha_{\frac{n'}{2}}] = -2\pi i \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma')$$

となる。これは $-\sigma \rightarrow \sigma, -\sigma' \rightarrow \sigma'$ と置き換えると、式 (13.107) において振動子の種類を $\bar{\alpha} \rightarrow \alpha$ と置き換えたものに一致する。よってここから、交換関係 (13.109) の $\bar{\alpha}$ を α に置き換えた式 (13.110) 第1式

$$[\alpha_{\frac{m}{2}}, \alpha_{\frac{n}{2}}] = \frac{m}{2} \delta_{m+n, 0}$$

が得られる。

第2式 $[\alpha_{\frac{m}{2}}, \bar{\alpha}_{\frac{n}{2}}] = 0$ は式 (12.31) [本稿の式 (55)] :

$$[(\dot{X}^I \pm X^{I'}) (\tau, \sigma), (\dot{X}^J \mp X^{J'}) (\tau, \sigma')] = 0$$

から得られる。

■ツイストしたセクターの基底状態 (13.112): $|p^+, \vec{p}\rangle$ について 「ツイストした状態が X 方向に保存する運動量を持たない」 (p.295, 1.14,15) ということは、これを X 方向の運動量 p がゼロの状態 $|p^+, \vec{p}, p=0\rangle$ と見ることはできないと考えられる。

■ \bar{L}_0^\perp の式 (13.113) とその説明について $\dot{X} + X'$ の式 (13.106) より

$$\begin{aligned} (\dot{X} + X')^2 &= 4\alpha' \sum_{p \in \mathbf{Z}_{\text{odd}}} \left(\frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbf{Z}_{\text{odd}}} \bar{\alpha}_{\frac{k}{2}} \bar{\alpha}_{\frac{p}{2}} \right) e^{-i\frac{k+p}{2}(\tau+\sigma)} \\ &= 4\alpha' \sum_{n \in \mathbf{Z}} \left(\frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbf{Z}_{\text{odd}}} \bar{\alpha}_{\frac{k}{2}} \bar{\alpha}_{n-\frac{k}{2}} \right) e^{-in(\tau+\sigma)} \quad \left(\frac{k+p}{2} = n \right) \end{aligned}$$

である。また $(\dot{X}^i + X^{i'})^2$ は式 (13.36) に類似の式で表されるから

$$\begin{aligned} (\dot{X}^I + X^{I'})^2 &= (\dot{X}^i + X^{i'})^2 + (\dot{X} + X')^2 \\ &= 4\alpha' \sum_{n \in \mathbf{Z}} \left(\frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbf{Z}} \bar{\alpha}_p^i \bar{\alpha}_{n-p}^i + \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbf{Z}_{\text{odd}}} \bar{\alpha}_{\frac{k}{2}} \bar{\alpha}_{n-\frac{k}{2}} \right) e^{-in(\tau+\sigma)} \end{aligned}$$

を得る。これを式 (13.35), 式 (13.39) により振動子 $\bar{\alpha}_n^-$ に関係づけたとき

$$\sqrt{2\alpha'} \bar{\alpha}_n^- = \frac{2}{p^+} \bar{L}_n^\perp$$

となるように Virasoro 演算子 \bar{L}_n^\perp を定義すると,

$$\bar{L}_n^\perp = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbf{Z}} \bar{\alpha}_p^i \bar{\alpha}_{n-p}^i + \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbf{Z}_{\text{odd}}} \bar{\alpha}_{\frac{k}{2}} \bar{\alpha}_{n-\frac{k}{2}}$$

となる。このとき特に L_0^\perp は式 (13.113) で与えられる。

■ \bar{L}_0^\perp の式 (13.117) について 式 (12.101), 式 (12.102) と類似の計算を繰り返し式 (12.110): $\sum_{p=1}^{\infty} p = -\frac{1}{12}$ を用いると,

$$\frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbf{Z}} \bar{\alpha}_p^i \bar{\alpha}_{-p}^i = \frac{1}{2} \bar{\alpha}_0^i \bar{\alpha}_0^i + \sum_{p=1}^{\infty} \bar{\alpha}_{-p}^i \bar{\alpha}_p^i + \frac{1}{2} \cdot 23 \cdot \left(-\frac{1}{12}\right)$$

となる。また式 (13.114), 式 (13.116) より

$$\frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbf{Z}_{\text{odd}}} \bar{\alpha}_{\frac{k}{2}} \bar{\alpha}_{-\frac{k}{2}} = \sum_{k \in \mathbf{Z}_{\text{odd}}^+} \bar{\alpha}_{-\frac{k}{2}} \bar{\alpha}_{\frac{k}{2}} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{12}$$

である。これらを辺々足して式 (13.22): $\alpha_0^i = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} p^i$ を用いると \bar{L}_0^\perp の式 (13.117) を得る。

■ 質量の自乗の公式 (13.119) について \bar{L}_0^\perp の式 (13.113) において指摘したように, これは $\sqrt{2\alpha'} \bar{\alpha}_0^- = \frac{2}{p^+} \bar{L}_0^\perp$ となるように定義されている。よって

$$\alpha' p^- = \begin{cases} \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^- = \frac{2}{p^+} L_0^\perp = \frac{2}{p^+} \left(N[L_0^\perp] - \frac{15}{16} \right) = \frac{1}{4} \alpha' p^i p^i + N^\perp - \frac{15}{16} \\ \sqrt{2\alpha'} \bar{\alpha}_0^- = \frac{2}{p^+} \bar{L}_0^\perp = \frac{2}{p^+} \left(N[\bar{L}_0^\perp] - \frac{15}{16} \right) = \frac{1}{4} \alpha' p^i p^i + \bar{N}^\perp - \frac{15}{16} \end{cases}$$

であり, 2通りの表現の平均をとることにより

$$\alpha' p^+ p^- = \frac{1}{2} \alpha' p^i p^i + N^\perp + \bar{N}^\perp - \frac{15}{8}$$

を得る。今 x 方向の運動量がないため $p^I p^I = p^i p^i$ となるものと考えれば, ここから

$$\frac{1}{2} \alpha' M^2 = \frac{1}{2} \alpha' (2p^+ p^- - p^I p^I) = N^\perp + \bar{N}^\perp - \frac{15}{8} : (13.119)$$

を得る。

計算練習 13.4

式 (13.108) の積分を式 (13.107) の両辺に施すと, 左辺は

$$\begin{aligned} & \sum_{m', n' \in \mathbf{Z}_{\text{odd}}} e^{-i(m'+n')\tau/2} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma e^{i(m-m')\sigma/2} \right] \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma' e^{i(n-n')\sigma'/2} \right] [\bar{\alpha}_{\frac{m'}{2}}, \bar{\alpha}_{\frac{n'}{2}}] \\ &= \sum_{m', n' \in \mathbf{Z}_{\text{odd}}} e^{-i(m'+n')\tau/2} \delta_{mm'} \delta_{nn'} [\bar{\alpha}_{\frac{m'}{2}}, \bar{\alpha}_{\frac{n'}{2}}] \\ &= e^{-i(m+n)\tau/2} [\bar{\alpha}_{\frac{m}{2}}, \bar{\alpha}_{\frac{n}{2}}] \end{aligned}$$

となる。一方, 右辺は

$$\begin{aligned} & i \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma' \int_0^{2\pi} d\sigma e^{im\sigma/2} e^{in\sigma'/2} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma') \\ &= i \frac{1}{2\pi} \left(-i \frac{m}{2}\right) \int_0^{2\pi} d\sigma' \int_0^{2\pi} d\sigma e^{im\sigma/2} e^{in\sigma'/2} \delta(\sigma - \sigma') \\ &= \frac{m}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma' e^{i(m+n)\sigma'/2} \\ &= \frac{m}{2} \delta_{m+n, 0} \end{aligned}$$

となるので、これらを等置して式 (13.109):

$$[\bar{\alpha}_{\frac{m}{2}}, \bar{\alpha}_{\frac{n}{2}}] = \frac{m}{2} \delta_{m+n,0} e^{i(m+n)\tau/2} = \frac{m}{2} \delta_{m+n,0}$$

を得る.

計算練習 13.5

式 (13.118) の \bar{N}^\perp に対しても式 (12.165) と同様に

$$[\bar{N}^\perp, \bar{a}_n^{i\dagger}] = n \bar{a}_n^{i\dagger}$$

が成り立つ. また $q, k \in \mathbf{Z}_{\text{odd}}^+$: 正の奇数に対して $[\bar{\alpha}_{-\frac{k}{2}}, \bar{\alpha}_{-\frac{q}{2}}] = 0$ となることに注意すると

$$[\bar{N}^\perp, \bar{\alpha}_{-\frac{q}{2}}] = \sum_{k \in \mathbf{Z}_{\text{odd}}^+} \bar{\alpha}_{-\frac{k}{2}} [\bar{\alpha}_{\frac{k}{2}}, \bar{\alpha}_{-\frac{q}{2}}] = \sum_{k \in \mathbf{Z}_{\text{odd}}^+} \bar{\alpha}_{-\frac{k}{2}} \frac{k}{2} \delta_{kq} = \frac{q}{2} \bar{\alpha}_{-\frac{q}{2}}$$

を得る. 固有値 (12.170) の説明を思い出すと, 2 式より状態

$$\left[\prod_{n=1}^{\infty} \prod_{i=2}^{24} (a_n^{i\dagger})^{\lambda_{n,i}} \right] \left[\prod_{n' \in \mathbf{Z}_{\text{odd}}^+} (\alpha_{-\frac{n'}{2}})^{\lambda_{n'}} \right] \left[\prod_{m=1}^{\infty} \prod_{j=2}^{24} (\bar{a}_m^{j\dagger})^{\bar{\lambda}_{m,j}} \right] \left[\prod_{m' \in \mathbf{Z}_{\text{odd}}^+} (\alpha_{-\frac{m'}{2}})^{\bar{\lambda}_{m'}} \right] |p^+, \vec{p}\rangle$$

($\lambda_{n,i}, \lambda_{n'}, \bar{\lambda}_{m,j}, \bar{\lambda}_{m'}$ は非負整数) は固有値

$$\bar{N}^\perp = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=2}^{24} m \bar{\lambda}_{m,j} + \sum_{m' \in \mathbf{Z}_{\text{odd}}^+} \frac{m'}{2} \bar{\lambda}_{m'}$$

を持つ.

問題 (第 13 章)

13.1 節 p.280 で言及されている問題 13.1 を解く.

問題 13.1 振動子の交換関係

(a)

正準交換関係 (13.27) から振動子の交換関係 (13.29), (13.30) が得られることは, 13.1 節のノートで詳しく補足済みである.

(b)

問題 10.2(a) と同様の計算を繰り返せば良い.

(c)

振動子の交換関係 (13.29), (13.30) および式 (13.33): $[x_0^I, p^J] = i\eta^{IJ}$ から正準交換関係 (13.27) が得られることを確かめよう. X のモード展開 (13.24) および

$$\dot{X}^J(\tau, \sigma') = \alpha' p^J + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{m \neq 0} e^{-im\tau} (\alpha_m^J e^{im\sigma'} + \bar{\alpha}_m^J e^{-im\sigma'})$$

より

$$\begin{aligned}
[X^I(\tau, \sigma), \dot{X}^J(\tau, \sigma')] &= \alpha' [x_0^I, p^J] + i \frac{\alpha'}{2} \sum_{n \neq 0} \sum_{m \neq 0} \frac{e^{-i(n+m)\tau}}{n} \left\{ [\alpha_n^I, \alpha_m^J] e^{i(n\sigma+m\sigma')} + [\bar{\alpha}_n^I, \bar{\alpha}_m^J] e^{-i(n\sigma+m\sigma')} \right\} \\
&= \alpha' i \eta^{IJ} + i \frac{\alpha'}{2} \eta^{IJ} \sum_{n \neq 0} \{ e^{in(\sigma-\sigma')} + e^{-in(\sigma-\sigma')} \} \\
&\quad (m = -n \text{ の項のみ寄与を持つから}) \\
&= \alpha' i \eta^{IJ} \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{in(\sigma-\sigma')} \\
&= 2\pi \alpha' i \eta^{IJ} \delta(\sigma - \sigma'), \\
\therefore [X^I(\tau, \sigma), \mathcal{P}^{\tau J}(\tau, \sigma')] &= \frac{1}{2\pi \alpha'} [X^I(\tau, \sigma), \dot{X}^J(\tau, \sigma')] \\
&= i \eta^{IJ} \delta(\sigma - \sigma') : (13.27)
\end{aligned}$$

を得る.

(d)

正準交換関係 (13.27) から振動子の交換関係 (13.29), (13.30) が得られたものとして, さらに交換関係 (13.33): $[x_0^I, p^J] = i \eta^{IJ}$ を導くことを考えよう. 正準交換関係

$$[X^I(\tau, \sigma), \dot{X}^J(\tau, \sigma')] = 2\pi \alpha' i \eta^{IJ} \delta(\sigma - \sigma')$$

の両辺を $0 \leq \sigma \leq 2\pi$ にわたって積分すると, 右辺は $2\pi \alpha' i \eta^{IJ}$ になる. 一方, 左辺において $X^I(\tau, \sigma)$ の含む $n \neq 0$ の振動モードの項

$$i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{-in\tau}}{n} (\alpha_n^I e^{in\sigma} + \bar{\alpha}_n^I e^{-in\sigma})$$

は積分に寄与しない. よって

$$\int_0^{2\pi} d\sigma [X^I(\tau, \sigma), \dot{X}^J(\tau, \sigma')] = \int_0^{2\pi} d\sigma [x_0^I + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^I \tau, \dot{X}^J(\tau, \sigma')] = 2\pi [x_0^I + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^I \tau, \dot{X}^J(\tau, \sigma')]$$

だから

$$[x_0^I + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^I \tau, \dot{X}^J(\tau, \sigma')] = i \alpha' \eta^{IJ}$$

を得る. ここで $\dot{X}^J(\tau, \sigma')$ をモード展開すると

$$\sqrt{2\alpha'} [x_0^I, \alpha_0^J] + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{m \neq 0} e^{-im\tau} \left\{ [x_0^I, \alpha_m^J] e^{im\sigma'} + [x_0^I, \bar{\alpha}_m^J] e^{-im\sigma'} \right\} = i \alpha' \eta^{IJ} \quad (85)$$

となる. $n \neq 0$ として両辺に $\int_0^{2\pi} d\sigma' e^{-in\sigma'}$ を作用させると

$$\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \left\{ [x_0^I, \alpha_n^J] e^{-in\tau} + [x_0^I, \bar{\alpha}_{-n}^J] e^{in\tau} \right\} = 0$$

となる. これが任意の τ に対して成り立つためには

$$[x_0^I, \alpha_n^J] = 0, \quad [x_0^I, \bar{\alpha}_{-n}^J] = 0 \quad \text{for} \quad n \neq 0$$

でなければならない。さらにこれを式 (85) にもどすと

$$\sqrt{2\alpha'}[x_0^I, \alpha_0^J] = i\alpha'\eta^{IJ}, \quad \therefore [x_0^I, \alpha_0^J] = i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\eta^{IJ} : (13.33)$$

を得る。

問題 13.5 無向の開弦

14.8 節 (p.319, 1.1), 16.1 節で言及されている問題 13.5 を解く。

弦座標演算子に対して次のような変換作用を持つ反転演算子 Ω を導入する。

$$\Omega X^I(\tau, \sigma)\Omega^{-1} = X^I(\tau, 2\pi - \sigma) \quad (1)$$

そして更に、次のように宣言する。

$$\Omega x_0^- \Omega^{-1} = x_0^-, \quad \Omega p^+ \Omega^{-1} = p^+ \quad (2)$$

- (a) 図示は省略するが、問題 12.12(a) と同様に開弦 $X^\mu(\tau, 2\pi - \sigma)$ はもとの弦と逆向きの弦を表す。
(b) 閉弦の振動子展開 (13.24):

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^\mu\tau + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n \neq 0} \frac{e^{-in\tau}}{n}(\alpha_n^\mu e^{in\sigma} + \bar{\alpha}_n^\mu e^{-in\sigma})$$

を用いて、 $\Omega x_0^I \Omega^{-1}, \Omega \alpha_0^I \Omega^{-1}, \Omega \alpha_n^I \Omega^{-1}, \Omega \bar{\alpha}_n^I \Omega^{-1} (n \neq 0)$ を計算する。

$$X^I(\tau, 2\pi - \sigma) = x_0^I + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^I\tau + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n \neq 0} \frac{e^{-in\tau}}{n}(\alpha_n^I e^{-in\sigma} + \bar{\alpha}_n^I e^{in\sigma})$$

であり、これが任意の τ, σ で $\Omega X^I(\tau, \sigma)\Omega^{-1}$ に一致しなければならないことから、

$$\begin{aligned} \Omega x_0^I \Omega^{-1} &= x_0^I, & \Omega \alpha_0^I \Omega^{-1} &= \alpha_0^I, \\ \begin{cases} \Omega \alpha_n^I \Omega^{-1} &= \bar{\alpha}_n^I \\ \Omega \bar{\alpha}_n^I \Omega^{-1} &= \alpha_n^I \end{cases} & (n \neq 0) \end{aligned}$$

が見出される。開弦の場合 (問題 12.12(b)) との違いは $n \neq 0$ の振動子の変換に現れる。

- (c) まず $\Omega X^-(\tau, \sigma)\Omega^{-1} = X^-(\tau, 2\pi - \sigma)$ を示す。 X^- の展開係数 $\bar{\alpha}_n^-, \alpha_n^-$ も上に引用した式 (13.24) を用いて定義されており、

$$\text{式 (13.40):} \quad \sqrt{2\alpha'}\bar{\alpha}_n^- = \frac{2}{p^+}\bar{L}_n^\perp, \quad \sqrt{2\alpha'}\alpha_n^- = \frac{2}{p^+}L_n^\perp,$$

$$\text{式 (13.37):} \quad \bar{L}_n^\perp \equiv \frac{1}{2}\sum_{p \in \mathbf{Z}} \bar{\alpha}_p^I \bar{\alpha}_{n-p}^I, \quad L_n^\perp \equiv \frac{1}{2}\sum_{p \in \mathbf{Z}} \alpha_p^I \alpha_{n-p}^I$$

と制約 (13.17): $\bar{\alpha}_0^\mu = \alpha_0^\mu$ に注意すると、小問 (b) の結果と上式 (2) の仮定 $\Omega p^+ \Omega^{-1} = p^+$ より

$$\begin{aligned} \Omega \sqrt{2\alpha'}\bar{\alpha}_n^- \Omega^{-1} &= \frac{1}{p^+} \sum_{p \in \mathbf{Z}} (\Omega \bar{\alpha}_p^I \Omega^{-1})(\Omega \bar{\alpha}_{n-p}^I \Omega^{-1}) \\ &= \frac{1}{p^+} \sum_{p \in \mathbf{Z}} \alpha_p^I \alpha_{n-p}^I \\ &= \sqrt{2\alpha'}\alpha_n^-, \\ \therefore \Omega \bar{\alpha}_n^- \Omega^{-1} &= \alpha_n^- \end{aligned}$$

となる. 同様に $\Omega\alpha_n^-\Omega^{-1} = \bar{\alpha}_n^-$ を得る. これは X^- の展開係数 α_n^- も X^I の展開係数 α_n^I と同様に変換することを意味しているので, 式 (2) の仮定 $\Omega x_0^-\Omega^{-1} = x_0^-$ とより X^- も

$$\Omega X^-(\tau, \sigma)\Omega^{-1} = X^-(\tau, 2\pi - \sigma)$$

と変換される.

また開弦の場合 (問題 12.12(c)) と同様, 光錐ゲージ条件 (9.62): $X^+(\tau, \sigma) = \alpha' p^+ \tau$ より

$$\Omega X^+(\tau, \sigma)\Omega^{-1} = \alpha' p^+ \tau = X^+(\tau, 2\pi - \sigma)$$

なので, 結局すべての弦座標 $\mu = \pm, I$ に対して

$$\Omega X^\mu(\tau, \sigma)\Omega^{-1} = X^\mu(\tau, 2\pi - \sigma)$$

が成立することになる.

ハミルトニアン (13.49): $H = L_0^\perp + \bar{L}_0^\perp$ (ただしこの $L_0^\perp, \bar{L}_0^\perp$ は式 (13.37) の正規順序化していない Virasoro 演算子) は, 上の計算を通して理解される結果

$$\Omega \bar{L}_0^\perp \Omega^{-1} = L_0^\perp, \quad \Omega L_0^\perp \Omega^{-1} = \bar{L}_0^\perp$$

より, 反転に対して不変である ($\Omega H \Omega^{-1} = H$). このため向きの反転は閉弦の対称性変換であると言える.

$$\Omega H \Omega^{-1} = H \quad \therefore [H, \Omega] = 0.$$

(d) レベル整合条件 (13.45): $N^\perp = \bar{N}^\perp$ を思い出そう. ここで 13.3 節で見たように, $N^\perp = \bar{N}^\perp = 0$ の状態は基底状態 $|p^+, \vec{p}_T\rangle$ である. 基底状態は反転不変であると仮定する.

$$\Omega |p^+, \vec{p}_T\rangle = \Omega^{-1} |p^+, \vec{p}_T\rangle = |p^+, \vec{p}_T\rangle.$$

次に 13.3 節で調べた $N^\perp = \bar{N}^\perp = 1$ の状態 (無質量状態) を, 反転固有値 Ω とともに以下に示す.

- トレースレスの対称部分 \hat{S}_{IJ} の担う状態

$$\sum_{I,J} \hat{S}_{IJ} a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle$$

↔ 重力子の 1 粒子状態, $\Omega = +1$.

- 反対称部分 A_{IJ} の担う状態

$$\sum_{I,J} A_{IJ} a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle$$

↔ 反対称テンソル場 $B_{\mu\nu}$ (Kalb-Ramond 場) の 1 粒子状態, $\Omega = -1$.

- トレース部分 $S' \delta_{IJ}$ の担う状態

$$\sum_{I,J} S' \delta_{IJ} a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle = S' a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{I\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle$$

↔ 質量のないスカラー場の 1 粒子状態 (粒子はディラトンと呼ばれる), $\Omega = +1$.

ただし反対称部分 A_{IJ} の担う状態の反転固有値は次のように求めた.

$$\begin{aligned}\Omega \sum_{I,J} A_{IJ} a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle &= \sum_{I,J} A_{IJ} (\Omega a_1^{I\dagger} \Omega^{-1}) (\Omega \bar{a}_1^{J\dagger} \Omega^{-1}) \Omega |p^+, \vec{p}_T\rangle = \sum_{I,J} A_{IJ} \bar{a}_1^{I\dagger} a_1^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle \\ &= \sum_{I,J} A_{JI} \bar{a}_1^{J\dagger} a_1^{I\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle = - \sum_{I,J} A_{IJ} a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle.\end{aligned}$$

こうして無向の閉弦理論を構築するには、質量の無い場からは Kalb-Ramond 場を除かなければならない.

$N^\perp = \bar{N}^\perp = 2$ の状態として、式 (13.64) と同様の重ね合せ

$$\begin{aligned}&\sum A_{IJ,KL} a_1^{I\dagger} a_1^{J\dagger} \bar{a}_1^{K\dagger} \bar{a}_1^{L\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle, \\ &\sum B_{I,JK} a_2^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} \bar{a}_1^{K\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle, \\ &\sum C_{IJ,K} a_1^{I\dagger} a_1^{J\dagger} \bar{a}_2^{K\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle, \\ &\sum D_{IJ} a_2^{I\dagger} \bar{a}_2^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle\end{aligned}$$

を考える (和は繰り返された横方向成分の添字についてとる). ただし一般性を失うことなく, $A_{IJ,KL}$ の添字 I, J および K, L , $B_{I,JK}$ の添字 J, K , $C_{IJ,K}$ の添字 I, J に関する対称性を仮定できる. 例えば IJ と KL の入れ替えに関して対称 (または反対称) な係数 $A_{IJ,KL}$ の担う状態は, 反転固有値 $\Omega = +1$ (または $\Omega = -1$) を持つ. 同様に D_{IJ} の対称部分 (または反対称部分) の担う状態は, 反転固有値 $\Omega = +1$ (または $\Omega = -1$) を持つ. また係数 $B_{I,JK}, C_{IJ,K}$ による線形結合の各々は反転に対する固有状態とならないが, それらの重ね合せ

$$\sum \left(B_{I,JK} a_2^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} \bar{a}_1^{K\dagger} + C_{IJ,K} a_1^{I\dagger} a_1^{J\dagger} \bar{a}_2^{K\dagger} \right) |p^+, \vec{p}_T\rangle$$

は $B_{I,JK} = \pm C_{JK,I}$ であれば, 複号の上側に対して固有値 $\Omega = +1$, 下側に対して固有値 $\Omega = -1$ の反転固有状態とすることができる. 無向の閉弦理論を構築するには, 反転固有値 $\Omega = +1$ の状態だけを残せば良い.

第 14 章 超弦理論入門

14.1 序論

- 超弦理論はフェルミオンに対応する状態を含む.
- 超弦理論はボゾンの自由度とフェルミオンの自由度が, 任意の質量レベルにおいて同じであることを保証するような対称性, すなわち超対称性を備えている.

14.1 について

■「超弦のスペクトルはタキオンを含まない」(p.301 下から 3 行目) について 「超弦を基礎に……やはりタキオンが現れうることが示された」(pp.266–267) とあるのと矛盾しているように思われるかもしれない. 実際にはタキオン状態が現れるが, 理論の超対称性を得るためにタキオン状態は捨て去られる (14.7 節, 14.8 節).

14.2 反可換な変数と演算子

弦理論においてフェルミオンを得るために, 世界面上に反可換な古典的変数 $\psi_\alpha^\mu(\tau, \sigma)$ ($\alpha = 1, 2$) を導入する. [いわゆる Grassmann 場である.]

ここで b_1, b_2 が反可換な変数であるとは,

$$b_i b_j = -b_j b_i \quad (\text{したがって } b_i^2 = 0)$$

が成り立つことを言う.

反可換な演算子はフェルミオンを記述するのに適している. 実際, 電子の生成演算子 $f_{p,s}^\dagger$ (p は運動量を, s はスピンを表す) 同士を反可換とすれば, $f_{p,s}^\dagger f_{p,s}^\dagger |\Omega\rangle = 0$ となってフェルミオンの排他律が満たされる.

計算練習 14.1

行列 (14.4):

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

に対して

$$\gamma^1 \gamma^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\gamma^2 \gamma^1, \quad [\gamma^1, \gamma^2] = 2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

となるため, γ^1 と γ^2 は反可換であって, 可換でない. γ^1 同士, γ^2 同士は反可換ではない. 実際, $(\gamma^1)^2 = -1, (\gamma^2)^2 = 1$ である (右辺の 1 は 2×2 の単位行列を表す).

なお 2 次元の Minkowski 計量 (24.67):

$$\eta^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

に対して, γ^1, γ^2 は Dirac 代数と呼ばれる反交換関係

$$\{\gamma^\alpha, \gamma^\beta\} = 2\eta^{\alpha\beta}$$

を満たす γ 行列となっている (右辺には 2×2 の単位行列が掛かっている).

計算練習 14.2

波動関数の対称部分

$$\psi^{(s)}(p_1, s_1; p_2, s_2) \equiv \frac{1}{2} \{ \psi(p_1, s_1; p_2, s_2) + \psi(p_2, s_2; p_1, s_1) \} = \psi^{(s)}(p_2, s_2; p_1, s_1)$$

の寄与は

$$\begin{aligned} & \sum_{s_1, s_2} \int d^d p_1 \int d^d p_2 \psi^{(s)}(p_1, s_1; p_2, s_2) f_{p_1, s_1}^\dagger f_{p_2, s_2}^\dagger |\Omega\rangle \\ &= \sum_{s_1, s_2} \int d^d p_1 \int d^d p_2 \psi^{(s)}(p_2, s_2; p_1, s_1) f_{p_2, s_2}^\dagger f_{p_1, s_1}^\dagger |\Omega\rangle \\ & \quad (\text{和をとる添字の名前, 積分変数名を } s_1 \leftrightarrow s_2, p_1 \leftrightarrow p_2 \text{ と入れ替えた}) \\ &= - \sum_{s_1, s_2} \int d^d p_1 \int d^d p_2 \psi^{(s)}(p_1, s_1; p_2, s_2) f_{p_1, s_1}^\dagger f_{p_2, s_2}^\dagger |\Omega\rangle \\ & \quad (\because \psi^{(s)}(p_2, s_2; p_1, s_1) = \psi^{(s)}(p_1, s_1; p_2, s_2), \quad f_{p_2, s_2}^\dagger f_{p_1, s_1}^\dagger = -f_{p_1, s_1}^\dagger f_{p_2, s_2}^\dagger) \end{aligned}$$

を満たすためゼロとなる. よってフェルミオンに対しては反対称な波動関数を用いれば良い.

14.3 世界面フェルミオン

- 光錐ゲージ条件 $\psi_\alpha^+ = 0$
 - ψ_α^- は ψ_α^I を用いて表される
- Lorentz 不変性の条件 $[M^{-I}, M^{-J}] = 0$ における交換子 $[M^{-I}, M^{-J}]$ には X^μ だけでなく ψ_α^μ も寄与する
 - 時空は 10 次元になる
 - 質量の自乗の下方シフトは -1 の代わりに $-1/2$ になる

光錐ゲージにおいて X^I と ψ_α^I の力学は, X^I に対する作用 S_X (12.3 節) と ψ_α^I に対する (Dirac) 作用

$$S_\psi = \frac{1}{2\pi} \int d\tau \int_0^\pi d\sigma [\psi_1^I (\partial_\tau + \partial_\sigma) \psi_1^I + \psi_2^I (\partial_\tau - \partial_\sigma) \psi_2^I] \quad (86)$$

を合わせた全作用 $S = S_X + S_\psi$ によって記述される [ただしここでは開弦が考えられている]. ψ_α^I が反可換であることに注意して ψ_α^I に関する作用の変分を計算すると, 境界条件

$$\psi_1^I \delta \psi_1^I - \psi_2^I \delta \psi_2^I = 0 \quad (\sigma = \sigma_* \equiv 0, \pi) \quad (87)$$

の下で変分原理から運動方程式

$$(\partial_\tau + \partial_\sigma) \psi_1^I = 0, \quad (\partial_\tau - \partial_\sigma) \psi_2^I = 0 \quad (14.16)$$

が導かれることが分かる [導出は下記]. 解は

$$\psi_1^I(\tau, \sigma) = \Psi_1^I(\tau - \sigma), \quad \psi_2^I(\tau, \sigma) = \Psi_2^I(\tau + \sigma) \quad (14.18)$$

という形をとる [本稿次節で補足].

境界条件 (87) は

$$\psi_1^I(\tau, \sigma_*) = \pm \psi_2^I(\tau, \sigma_*)$$

とすると満たされる. ψ_1^I と ψ_2^I は作用の式において 2 次で現れるので, $[-\psi_\alpha^I \rightarrow \psi_\alpha^I$ と改めても場 ψ_α^I が満たす運動方程式は変わらない. よって] 一般性を失うことなく, 一方の端点 $\sigma_* = 0$ において

$$\psi_1^I(\tau, 0) = \psi_2^I(\tau, 0)$$

とできる. このときもう一方の端点 $\sigma_* = \pi$ における 2 通りの符号

$$\psi_1^I(\tau, \pi) = \pm \psi_2^I(\tau, \pi) \quad (88)$$

が物理的意味を持つ.

$$\Psi^I(\tau, \sigma) = \begin{cases} \psi_1^I(\tau, \sigma) = \Psi_1^I(\tau - \sigma) & (0 \leq \sigma \leq \pi) \\ \psi_2^I(\tau, -\sigma) = \Psi_2^I(\tau - \sigma) & (-\pi \leq \sigma \leq 0) \end{cases}$$

を定義するとこれは $\tau - \sigma$ の関数であり, $\sigma = 0$ で連続である. 境界条件 (88) は $\Psi^I(\tau, \sigma)$ に対する境界条件

$$\Psi^I(\tau, \pi) = \pm \Psi^I(\tau, -\pi)$$

になる (複号同順).

- 複号の上側を選んだ場合の境界条件

$$\Psi^I(\tau, \pi) = +\Psi^I(\tau, -\pi)$$

は Ramond 境界条件と呼ばれ,

ここから得られる開弦の状態は Ramond(R) セクターを成す.

- 複号の下側を選んだ場合の境界条件

$$\Psi^I(\tau, \pi) = -\Psi^I(\tau, -\pi)$$

は Neveu-Schwarz 境界条件と呼ばれ,

ここから得られる開弦の状態は Neveu-Schwarz(NS) セクターを成す.

14.3 節, 式の導出など

■場の運動方程式 (14.16) の導出 作用 (86) の場 ψ_α^I に関する変分をとると,

$$\delta S_\psi = \frac{1}{2\pi} \int d\tau \int_0^\pi d\sigma [\delta\psi_1^I(\partial_\tau + \partial_\sigma)\psi_1^I + \psi_1^I(\partial_\tau + \partial_\sigma)\delta\psi_1^I + \delta\psi_2^I(\partial_\tau - \partial_\sigma)\psi_2^I + \psi_2^I(\partial_\tau - \partial_\sigma)\delta\psi_2^I]$$

となる. ここで右辺の被積分関数における 1 行目と 2 行目の第 2 項について,

$$\begin{aligned} \psi_\alpha^I(\partial_\tau \pm \partial_\sigma)\delta\psi_\alpha^I &= \partial_\tau(\psi_\alpha^I\delta\psi_\alpha^I) \pm \partial_\sigma(\psi_\alpha^I\delta\psi_\alpha^I) - [(\partial_\tau \pm \partial_\sigma)\psi_\alpha^I]\delta\psi_\alpha^I \\ &= \partial_\tau(\psi_\alpha^I\delta\psi_\alpha^I) \pm \partial_\sigma(\psi_\alpha^I\delta\psi_\alpha^I) + \delta\psi_\alpha^I(\partial_\tau \pm \partial_\sigma)\psi_\alpha^I \end{aligned}$$

と変形できる (ただし複号の + に対して $\alpha = 1$, - に対して $\alpha = 2$ を考えれば良く, α について和をとらない). 変分原理の仮定により, τ に関する全微分の項は無視できるので

$$\delta S_\psi = \frac{1}{\pi} \int d\tau \int_0^\pi d\sigma [\delta\psi_1^I (\partial_\tau + \partial_\sigma)\psi_1^I + \delta\psi_2^I (\partial_\tau - \partial_\sigma)\psi_2^I] \\ + \frac{1}{2\pi} \int d\tau [\psi_1^I \delta\psi_1^I - \psi_2^I \delta\psi_2^I]_{\sigma=0}^{\sigma=\pi}$$

を得る. ここから適正な境界条件 (87) と場の運動方程式 (14.16) が読み取れる.

14.3 について

■全作用の式 (14.9) について ここには X^I と ψ_α^I の相互作用項は現れない.

■「作用 S_ψ の式が, …… , 非自明になり得ていることを意味する」(p.304, 1.26,27) について ラグランジアンにおいて τ による全微分の項 $\partial_\tau f(\tau, \sigma)$ がある場合, その τ による積分は境界 $\tau = \tau_*$ での値 $f(\tau_*, \sigma)$ になる. その作用に対する寄与は変分をとると落ちる項だから, 場の運動方程式に影響を与えない.

■式 (14.14) について 第 2 の等号では ψ_1^I と $\delta\psi_1^I$ が反交換することを用いている.

■「時間 τ に沿った全微分の項を無視すると」(p.305, 1.2) について 変分原理では時間 τ の境界で変分 $\delta\psi_\alpha^I$ をゼロとするため, $\partial_\tau(\psi_1^I \delta\psi_1^I)$ および $\partial_\tau(\psi_2^I \delta\psi_2^I)$ は作用の変分 δS_ψ に寄与しない.

■運動方程式 (14.16) について 「作用 S_ψ は, 2次元の (τ, σ) -世界に存在するフェルミオンに関する Dirac 作用である」(p.304, 1.16) とあるように, 作用 (14.10) は Dirac 場の作用に類似のものであるため, 得られる運動方程式 (14.16) は Dirac 方程式に類似している.

■式 (14.18) について 式 (14.18) が解となることは容易に見て取れる. この結果を丁寧に導くには次のようにすれば良い.

$\tau \pm \sigma \equiv u_\pm, \partial/\partial u_\pm \equiv \partial_\pm$ と書くと

$$\partial_\tau = \partial_+ + \partial_-, \quad \partial_\sigma = \partial_+ - \partial_-$$

より運動方程式 (14.16) は

$$0 = (\partial_\tau + \partial_\sigma)\psi_1^I = 2\partial_+\psi_1^I, \quad 0 = (\partial_\tau - \partial_\sigma)\psi_2^I = 2\partial_-\psi_2^I$$

となる. よって式 (14.18):

$$\psi_1^I(\tau, \sigma) = \Psi_1^I(u_-) = \Psi_1^I(\tau - \sigma), \quad \psi_2^I(\tau, \sigma) = \Psi_2^I(u_+) = \Psi_2^I(\tau + \sigma)$$

を得る.

■「 $\psi_1^I(\tau, \sigma) \equiv 0$ となる」(p.305, 1.21) について 「全時間にわたり $\Psi_1^I(\tau) = 0$ 」(p.305, 1.20,21) となるとき 任意の u_- に対し $\Psi_1^I(u_-) = 0$ となるから, 任意の τ, σ に対して $\psi_1^I(\tau, \sigma) = \Psi_1^I(\tau - \sigma) = 0$ となる.

14.4 Neveu-Schwarz セクター

Neveu-Schwarz 境界条件を満たす, $\tau - \sigma$ の関数 Ψ^I のモード展開として

$$\Psi^I(\tau, \sigma) \sim \sum_{r: \text{半整数}} b_r^I e^{-ir(\tau - \sigma)}$$

の形を考える．[量子論に移行するためにこれを演算子と見なし] 展開係数 b_r^I に反交換関係

$$\{b_r^I, b_s^J\} = \delta_{r+s,0} \delta^{IJ}$$

を課すと, $b_{-1/2}^I, b_{-3/2}^I, b_{-5/2}^I, \dots$ を生成演算子, $b_{1/2}^I, b_{3/2}^I, b_{5/2}^I, \dots$ を消滅演算子とできる．このとき $(b_r^I)^2 = 0$ に注意すると, $b_{-1/2}^I, b_{-3/2}^I, b_{-5/2}^I, \dots$ に関する基底状態を |NS> とし NS セクターにおける基本状態は

$$|\lambda\rangle = \left[\prod_{I=2}^9 \prod_{n=1}^{\infty} (\alpha_{-n}^I)^{\lambda_{n,I}} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right] \otimes \left[\prod_{J=2}^9 \prod_{r=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots} (b_{-r}^J)^{\rho_{r,J}} |\text{NS}\rangle \right] \quad (89)$$

と書ける ($\rho_{r,J}$ は 0 か 1 の値をとる)．

NS セクターにおける質量の自乗の演算子は

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \left(\frac{1}{2} \sum_{p \neq 0} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I + \frac{1}{2} \sum_{r: \text{半整数}} r b_{-r}^I b_r^I \right) \quad (14.31)$$

であり, これを正規順序化すると

$$M^2 = N[M^2] - \frac{1}{2\alpha'} = \frac{1}{\alpha'} \left(-\frac{1}{2} + N^\perp \right), \quad N^\perp = \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I + \sum_{r=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots} r b_{-r}^I b_r^I \quad (90)$$

となる [導出は下記]．基本状態 (89) が持ち得る数演算子の固有値および対応する質量の自乗 M^2 の固有値は

$$N^\perp = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots, \quad \alpha' M^2 = -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$$

である (計算練習 14.3)．

F がフェルミオン数を表す演算子であり, したがって

$$\begin{aligned} \text{状態がボゾンの} &\leftrightarrow \text{フェルミオン数が偶数} &\leftrightarrow \text{固有値 } (-1)^F = +1, \\ \text{状態がフェルミオンの} &\leftrightarrow \text{フェルミオン数が奇数} &\leftrightarrow \text{固有値 } (-1)^F = -1 \end{aligned}$$

となるように演算子 $(-1)^F$ を導入する．基底状態 |NS> \otimes $|p^+, \vec{p}_T\rangle$ に関する $(-1)^F$ の固有値を -1 と決めておくと, [等価的に F の固有値を 1 と見なせるので] 基本状態 (89) に対して [フェルミオン数 F の固有値は $1 + \sum_{r,J} \rho_{r,J}$ だから]

$$(-1)^F |\lambda\rangle = -(-1)^{\sum_{r,J} \rho_{r,J}} |\lambda\rangle.$$

14.4 節, 式の導出など

■正規順序化した M^2 の式 (90) の導出 既に学んだように, M^2 の式 (14.31):

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \left(\frac{1}{2} \sum_{p \neq 0} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I + \frac{1}{2} \sum_{r: \text{半整数}} r b_{-r}^I b_r^I \right)$$

における各ボゾンの α^I 振動子からは, 正規順序化定数 a に対して

$$a_B = -\frac{1}{24}$$

の寄与がある。NS フェルミオンに関して正規順序化が必要な項は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{r=-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \dots} r b_{-r}^I b_r^I &= \frac{1}{2} \sum_{r=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots} (-r) b_r^I b_{-r}^I \quad (r \rightarrow -r \text{ とした}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{r=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots} r b_{-r}^I b_r^I - \frac{1}{2} (D-2) \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2} + \dots \right) \quad (\because \{b_r^I, b_s^J\} = \delta_{r+s,0} \delta^{IJ}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{r=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots} r b_{-r}^I b_r^I - \frac{1}{48} (D-2) \quad \left(\because 1 + 3 + 5 + \dots = \frac{1}{12} : (13.116) \right) \end{aligned}$$

となる。つまり NS フェルミオンの a に対する寄与は $a_{\text{NS}} = -\frac{1}{48}$ である。よって

$$a = (D-2)(a_{\text{B}} + a_{\text{NS}}) = (D-2) \left(-\frac{1}{24} - \frac{1}{48} \right) = -(D-2) \frac{1}{16}$$

が得られ、最後に $D = 10$ と置くと $a = -\frac{1}{2}$ となるので、正規順序化した M^2 の式 (90) を得る。

14.4 について

■ 「 $\sigma \rightarrow \sigma + 2\pi$ とすると符号が変わる」 (14.4 節, 1.1, 2) について 式 (14.23) では $\Psi^I(\tau, \sigma)$ は $-\pi \leq \sigma \leq \pi$ の範囲でしか定義されていない。しかし境界条件 (14.26) と適合する形で、これと矛盾することなく $\Psi^I(\tau, \sigma)$ を σ の周期 2π の (反) 周期関数と定義できる。

■ 展開係数の反交換関係 (14.29) について r, s をそれぞれ正の奇数とすると、これは

$$\{b_r^I, b_s^J\} = 0, \quad \{b_{-r}^I, b_{-s}^J\} = 0, \quad \{b_r^I, b_{-s}^J\} = \delta_{rs} \delta^{IJ}$$

を意味する。よって b_r^I と b_{-r}^I のいずれか一方を生成演算子、もう一方を対応する消滅演算子と見なせる。

■ 質量の自乗の演算子 (14.31) について 第 1 項は式 (12.104) より

$$M^2 = 2p^+ p^- - p^I p^I = \frac{1}{\alpha'} L_0^\perp - \frac{1}{2\alpha'} \alpha_0^I \alpha_0^I = \frac{1}{2\alpha'} \sum_{p \neq 0} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I$$

として得られるものである。第 2 項はこれに類似の項である。

■ 「基底状態はフェルミオンのであると決めておく」 (p.308, 下から 7, 6 行) について 状態 (14.38) のうち

- 固有値 N^\perp が整数の状態はフェルミオンの
- 固有値 N^\perp が半整数の状態はボゾンの

と見なされる (p.309) のはこのことによる。基底状態に関する $(-1)^F$ の固有値を $+1$ と定めた場合には結果は逆になる。

計算練習 14.3

恒等式 $[AB, C] = A\{B, C\} - \{A, C\}B$ を用いると、正の奇数 r に対して

$$[N^\perp, b_{-r}^I] = \sum_{s=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots} s [b_{-s}^J b_s^J, b_{-r}^I] = \sum_{s=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots} s b_{-s}^J \delta_{rs} \delta^{IJ} = r b_{-r}^I$$

となる。よって正の奇数 r_1, r_2 に対して

$$\begin{aligned} N^\perp b_{-r_2}^J |\text{NS}\rangle &= (b_{-r_2}^J N^\perp + [N^\perp, b_{-r_2}^J]) |\text{NS}\rangle = r_2 b_{-r_2}^J |\text{NS}\rangle, \\ \therefore N^\perp b_{-r_1}^I b_{-r_2}^J |\text{NS}\rangle &= (b_{-r_1}^I N^\perp + [N^\perp, b_{-r_1}^I]) b_{-r_2}^J |\text{NS}\rangle = b_{-r_1}^I (r_2 b_{-r_2}^J |\text{NS}\rangle) + (r_1 b_{-r_1}^I) b_{-r_2}^J |\text{NS}\rangle \\ &= (r_1 + r_2) b_{-r_1}^I b_{-r_2}^J |\text{NS}\rangle \end{aligned}$$

となるから、状態 $b_{-r_1}^I b_{-r_2}^J |\text{NS}\rangle$ は N^\perp の固有値 $r_1 + r_2$ を持つ。

計算練習 14.4

- $\alpha_{-1}^I b_{-1/2}^J |\text{NS}\rangle \otimes |p^+, \vec{p}_T\rangle$ $8 \times 8 = 64$ 種類
- $b_{-3/2} |\text{NS}\rangle \otimes |p^+, \vec{p}_T\rangle$ 8 種類
- $b_{-1/2}^I b_{-1/2}^J b_{-1/2}^K |\text{NS}\rangle \otimes |p^+, \vec{p}_T\rangle$
 $b_{-1/2}^I, b_{-1/2}^J, b_{-1/2}^K$ の順番が異なる状態は区別されないこと、および $(b_r^I)^2 = 0$ に注意すると、
 8 つの横方向添字 $2, \dots, 9$ から相異なる 3 つの添字の値を選ぶ方法の数を考えれば良い。

$$\binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = 56 \text{ 種類}$$

以上より $N^\perp = \frac{3}{2}$ の状態は合計

$$64 + 8 + 56 = 128 \text{ 種類.}$$

これは次節の母関数 (14.67) における x の係数に一致している。

14.5 Ramond セクター

Ramond 境界条件を満たす、 $\tau - \sigma$ の関数 Ψ^I のモード展開は

$$\Psi^I(\tau, \sigma) \sim \sum_{n \in \mathbf{Z}} d_n^I e^{-in(\tau - \sigma)}$$

という形をとる。[量子論に移行するためにこれを演算子と見なし] 展開係数 d_n^I に反交換関係

$$\{d_m^I, d_n^J\} = \delta_{m+n, 0} \delta^{IJ}$$

を課すと、 $d_{-1}^I, d_{-2}^I, d_{-3}^I, \dots$ を生成演算子、 $d_1^I, d_2^I, d_3^I, \dots$ を消滅演算子とできる。

NS セクターの場合に Ψ^I が半整数モードの指数関数によって展開されたのとは異なり、R セクターにおいては 8 個のゼロモード $d_0^I (I = 2, \dots, 9)$ がある。これらの線形結合は 4 つの生成演算子

$$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \xi_3, \quad \xi_4$$

と、対応する 4 つの消滅演算子になることが判明する。真空状態 $|0\rangle$ をとると、ここから相異なる ξ_i を偶数個持つ状態

$$\{|\text{R}_a\rangle\} = \{|0\rangle, \xi_1 \xi_2 |0\rangle, \xi_1 \xi_3 |0\rangle, \xi_1 \xi_4 |0\rangle, \xi_2 \xi_3 |0\rangle, \xi_2 \xi_4 |0\rangle, \xi_3 \xi_4 |0\rangle, \xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4 |0\rangle\}$$

および相異なる ξ_i を奇数個持つ状態

$$\{|\text{R}_\bar{a}\rangle\} = \{\xi_1 |0\rangle, \xi_2 |0\rangle, \xi_3 |0\rangle, \xi_4 |0\rangle, \xi_1 \xi_2 \xi_3 |0\rangle, \xi_1 \xi_2 \xi_4 |0\rangle, \xi_1 \xi_3 \xi_4 |0\rangle, \xi_2 \xi_3 \xi_4 |0\rangle\}$$

が作られる。これらが Ramond 基底状態 $|R_A\rangle$ を成す。 $|0\rangle$ がフェルミオンのである、すなわち

$$(-1)^F |0\rangle = -|0\rangle$$

とすると、 $|R_a\rangle$ 状態はフェルミオンの (固有値 $(-1)^F = -1$) であり、 $|R_{\bar{a}}\rangle$ 状態はボゾンの (固有値 $(-1)^F = +1$) となる。 $(d_n^I)^2 = 0$ に注意すると、基本状態は

$$|\lambda\rangle = \left[\prod_{I=2}^9 \prod_{n=1}^{\infty} (\alpha_{-n}^I)^{\lambda_{n,I}} |p^+, \vec{p}_T\rangle \right] \otimes \left[\prod_{J=2}^9 \prod_{m=1}^{\infty} (d_{-m}^J)^{\rho_{m,J}} |R_A\rangle \right]$$

と書ける ($\rho_{m,J}$ は 0 か 1 の値をとる)。

R セクターにおける質量の自乗の演算子は

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \left(\frac{1}{2} \sum_{p \neq 0} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I + \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbf{Z}} n d_{-n}^I d_n^I \right) \quad (91)$$

である。 α^I 振動子の項と d^I 振動子の項の正規順序化定数は打ち消しあってゼロになり [確認は下記],

$$M^2 = N[M^2] = \frac{1}{\alpha'} \sum_{n \geq 1} (\alpha_{-n}^I \alpha_n^I + n d_{-n}^I d_n^I)$$

を得る。例えば状態 $\alpha_{-1}^I d_{-1}^J |R_a\rangle$ における $|R_a\rangle$ を $|R_{\bar{a}}\rangle$ に置き換えれば、フェルミオン数の偶奇の異なる状態 $\alpha_{-1}^I d_{-1}^J |R_{\bar{a}}\rangle$ が作られる。よって各質量レベルにおいてボゾンの状態とフェルミオンの状態が等しい数だけ現れる。これは世界面における超対称性である [X^μ と ψ_α^μ は世界面において定義されているから]。

14.5 節, 式の導出など

■ 質量の自乗 (91) の正規順序化定数がゼロになることの確認 質量の自乗 (91):

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \left(\frac{1}{2} \sum_{p \neq 0} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I + \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbf{Z}} n d_{-n}^I d_n^I \right)$$

における R フェルミオン部分について、正規順序化が必要な項に正規順序化を施すと、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{n=-1,-2,\dots} n d_{-n}^I d_n^I &= -\frac{1}{2} \sum_{n=1,2,\dots} n d_n^I d_{-n}^I \quad (n \rightarrow -n \text{ とした}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1,2,\dots} n d_{-n}^I d_n^I - \frac{1}{2} (D-2)(1+2+3+\dots) \quad (\because \{d_m^I, d_n^J\} = \delta_{m+n,0} \delta^{IJ}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1,2,\dots} n d_{-n}^I d_n^I + \frac{1}{24} (D-2) \end{aligned}$$

となる。つまり R フェルミオンの正規順序化定数に対する寄与は $a_R = \frac{1}{24}$ であり、これはボゾンの振動子からの寄与 $a_B = -\frac{1}{24}$ と正確に相殺する。

14.5 について

■ 「16 = 2⁴ の Ramond 基底状態を構築することができる」 (p.309, 下から 7,6 行) について 生成演算子 $\xi_i (i = 1, \dots, 4)$ の各々について、それを真空状態 $|0\rangle$ に作用させるか否かの 2 通りが考えられる。

これはボゾンの弦理論において、ゼロモードの振動子 $\alpha_0^\mu \propto p^\mu$ の固有状態 (12.159): $|p^+, \vec{p}_T\rangle$ を基底状態に選んだことに対応している。

14.6 状態の勘定

教科書の説明を一般化しつつまとめよう. $N^\perp = n$ となる状態数 $a(n)$ を展開係数に持つような母関数

$$f(x) = \sum_n a(n)x^n$$

を得る方法を考える.

ひとつの振動子 a_n^\dagger だけがある場合, $N^\perp = 0, n, 2n, \dots$ の状態 $(a_n^\dagger)^k |0\rangle (k = 0, 1, 2, \dots)$ がそれぞれ1つずつ存在するから, 求める母関数は

$$f_n(x) = 1 + x^n + x^{2n} + \dots = \frac{1}{1 - x^n}$$

である [ただしボゾンの振動子を仮定している].

ひとつのフェルミオン振動子 f_{-r} だけがある場合には, $(f_{-r})^2 = 0$ なのでこの結果を適用できない. この場合 $N^\perp = 0$ の状態 $|0\rangle$ と $N^\perp = r$ の状態 $f_{-r}|0\rangle$ だけがあるから, 母関数は

$$g_r(x) = 1 + x^r$$

となる.

次に A 型の振動子 $\{a_m^\dagger\}$ の形成する状態に対する母関数

$$F_A(x) = \sum_m A(m)x^m$$

および B 型の振動子 $\{b_n^\dagger\}$ の形成する状態に対する母関数

$$F_B(x) = \sum_n B(n)x^n$$

が与えられているとき, A 型と B 型の両方の振動子によって構築される状態に関する母関数 $F_{AB}(x)$ を求めることを考える. 以下では便宜的に A 型と B 型の振動子をともにボゾンの振動子とし, それゆえそれぞれが作る状態に関して N^\perp の固有値は $0, 1, \dots$ となるものとする. $N^\perp = N$ の状態は $m + n = N$ を満たす m, n に対して, $N^\perp = m$ の状態を作る A 型振動子の積 ($A(m)$ 種類) と $N^\perp = n$ の状態を作る B 型振動子の積 ($B(n)$ 種類) を $|0\rangle$ に作用させて得られる. よって $N^\perp = N$ の状態数は

$$\sum_{m=0}^N A(m)B(N-m)$$

である. これは

$$F_A(x)F_B(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A(m)B(n)x^{m+n} = \sum_{N=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^N A(m)B(N-m) \right) x^N$$

の展開係数となっているから, 求める母関数は

$$F_{AB}(x) = F_A(x)F_B(x)$$

である. この結果は A 型または B 型の振動子がフェルミオン振動子である場合にも正しい.

- ボゾンの開弦の母関数

$$\prod_{n=1}^{\infty} \prod_{I=2}^{25} f_n(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x^n)^{24}}.$$

$\alpha' M^2 = N^\perp - 1$:(12.164) の固有値が k の状態数を x^k の係数に持つ母関数

$$f_{\text{os}}(x) = \frac{1}{x} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x^n)^{24}} = \frac{1}{x} + 24 + 324x + 3200x^2 + 25650x^3 + 176256x^4 + \dots$$

- NS セクターの母関数

$$\left[\prod_{n=1}^{\infty} \prod_{I=2}^9 f_n(x) \right] \left[\prod_{m=1}^{\infty} \prod_{J=2}^9 g_{m-\frac{1}{2}}(x) \right] = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+x^{n-\frac{1}{2}}}{1-x^n} \right)^8.$$

- 左辺第 1 の因子はボゾンの振動子 α_n^I の作る状態数に関係し、
- 第 2 の因子はフェルミオン振動子 b_{-r}^J ($r = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots, m - \frac{1}{2}, \dots$) の作る状態数に関係する。

$\alpha' M^2 = N^\perp - \frac{1}{2}$:(14.37) の固有値が k の状態数を x^k の係数に持つ母関数

$$f_{\text{NS}}(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+x^{n-\frac{1}{2}}}{1-x^n} \right)^8 = \frac{1}{\sqrt{x}} + 8 + 36\sqrt{x} + 128x + 402x\sqrt{x} + 1152x^2 + \dots$$

- R セクターの母関数

$$16 \left[\prod_{n=1}^{\infty} \prod_{I=2}^9 f_n(x) \right] \left[\prod_{r=1}^{\infty} \prod_{J=2}^9 g_r(x) \right] = 16 \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+x^n}{1-x^n} \right)^8 = 16 + 256x + 2304x^2 + 15360x^3 + \dots$$

- 最左辺第 1 の因子はボゾンの振動子 α_n^I の作る状態数に関係し、
- 第 2 の因子はフェルミオン振動子 d_{-r}^J の作る状態数関係する。
- 係数 16 は振動子の作用する Ramond 基底状態 $|R_A\rangle$ の種類の数である。
- これは $\alpha' M^2 = N^\perp$:(14.53) の固有値が k の状態数を x^k の係数に持つ母関数 $f_R(x)$ に一致する。

$f_R(x)$ における x^n ($n = 0, 1, 2, \dots$) の係数は、 $f_{\text{NS}}(x)$ における x^n ($n = 0, 1, 2, \dots$) の係数の倍になっている。これの意味するところを次節において見る。

計算練習 14.5

$$\frac{1}{(1-x^n)^{24}} = 1 + (-24)(-x^n) + \frac{1}{2!}(-24)(-25)(-x^n)^2 + \frac{(-24)(-25)(-26)}{3!}(-x^n)^3 + \dots$$

と冪展開されるので、

$$\begin{aligned} f_{\text{os}}(x) &= \frac{1}{x} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x^n)^{24}} \\ &= \frac{1}{x} \left[1 + 24x + \frac{24 \cdot 25}{2} x^2 + \frac{24 \cdot 25 \cdot 26}{3!} x^3 + O(x^4) \right] \left[1 + 24x^2 + O(x^4) \right] \left[1 + 24x^3 + O(x^4) \right] \prod_{n=1}^{\infty} [1 + O(x^4)] \\ &= \frac{1}{x} \left[1 + 24x + \left(24 + \frac{24 \cdot 25}{2} \right) x^2 + \left(24 + 24 \cdot 24 + \frac{24 \cdot 25 \cdot 26}{3!} \right) x^3 + O(x^4) \right] \\ &= \frac{1}{x} + 24 + 324x + 3200x^2 + O(x^3) : (14.63) \end{aligned}$$

を得る。

計算練習 14.6

$\alpha' M^2 = 2$ すなわち $N^\perp = 3$ の状態には

$$a_1^{I\dagger} a_1^{J\dagger} a_1^{K\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad a_1^{I\dagger} a_2^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad a_3^{I\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle$$

の 3 つの形がある。それぞれの状態数を数えると

- $a_1^{I\dagger} a_1^{J\dagger} a_1^{K\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle$
24 個の横方向成分 $2, \dots, 25$ から重複を許して 3 つ選ぶ方法の数だけ状態があり、それは 3 つの玉と $24 - 1 = 23$ 本の仕切りの並べ方の総数

$$\binom{26}{3} = \frac{26 \cdot 25 \cdot 24}{3!} = 2600$$

に一致する。

- $a_1^{I\dagger} a_2^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle$ 24×24 個
- $a_3^{I\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle$ 24 個

となるので、合計

$$2600 + 24 \times 24 + 24 = 3200 \text{ 個}$$

の状態がある。

14.7 開いた超弦

R セクターにおいて、Lorentz 変換の下で

- d_0^I はベクトル成分として変換する。
- $|R_a\rangle$ と $|R_{\bar{a}}\rangle$ はそれぞれスピノルとして変換する。
 - 2 種類の異なるフェルミオンが存在するという事実を反映。
 - * しかしここから 2 種類の時空フェルミオンを得ることはできない。
 $|R_a\rangle$ と $|R_{\bar{a}}\rangle$ の一方はボゾン的な状態だから。
 - * $|R_a\rangle$ を時空のフェルミオン、 $|R_{\bar{a}}\rangle$ を時空のボゾンと同定することもできない。
時空のボゾンはスピノル添字 \bar{a} を持ちえないから*¹¹。

そこで固有値 $(-1)^F = -1$ の状態だけを含む集合 (R- セクターと呼ばれる) だけからすべてのフェルミオンが得られるものと考え、R セクターを R- セクターに縮小する。R- セクターに含まれる世界面におけるフェルミオンの状態が、時空におけるフェルミオン状態に対応するものと見なす。 $\alpha' M^2$ を基調とする R- セクターの母関数は、 $f_R(x)$ の係数 16 を 8 に置き換えた

$$f_{R-}(x) = 8 \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+x^n}{1-x^n} \right)^8 = 8 + 128x + 1152x^2 + 7680x^3 + 42112x^4 + \dots$$

である*¹²。

*¹¹ 「時空の」という但し書きは、世界面におけるボゾン・フェルミオンとの区別を強調するために用いられている。

*¹² $(-1)^F = +1$ となる R 状態の集合「R+ セクター」は、各質量レベルにおいて R- セクターと同数の状態を持つことによる。

一方, NS セクターに関しては固有値 $(-1)^F = +1$ のボゾンの状態だけを残すことにする. これらは NS+ セクターを成す. このとき

- タキオン状態 ($\alpha' M^2 = -1/2$) である基底状態 $|\text{NS}\rangle \otimes |p^+, \vec{p}_T\rangle$ はフェルミオンのため捨て去られる.
- 1 光子状態に同定される無質量状態 $b_{-1/2}^I |\text{NS}\rangle \otimes |p^+, \vec{p}_T\rangle$ はボゾンの状態なので保持される.

フェルミオンの状態は半整数の $\alpha' M^2$ の値を持つから (14.4 節), $\alpha' M^2$ を基調とする NS+ セクターの母関数は $f_{\text{NS}}(x)$ から半整数の冪の項を除いた

$$f_{\text{NS}+}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \left[\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+x^{n-\frac{1}{2}}}{1-x^n} \right)^8 - \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-x^{n-\frac{1}{2}}}{1-x^n} \right)^8 \right] = 8 + 128x + 1152x^2 + \dots$$

となる. これは $f_{\text{R}-}(x)$ に一致しているように見える [これが前節の最後に指摘したことに他ならない]. 実際, $f_{\text{NS}+}(x) = f_{\text{R}-}(x)$ すなわち

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} \left[\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+x^{n-\frac{1}{2}}}{1-x^n} \right)^8 - \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-x^{n-\frac{1}{2}}}{1-x^n} \right)^8 \right] = 8 \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+x^n}{1-x^n} \right)^8$$

は恒等式として Jacobi により証明されている. このことは R- セクターと NS+ セクターの組合せによって定義される開弦理論が, 各質量レベルにおいてフェルミオンの状態とボゾンの状態を同数持つこと (超対称性) を意味している.

14.8 閉じた超弦

閉弦の理論において振動子 $\alpha, \bar{\alpha}$ はそれぞれ $e^{-in(\tau+\sigma)}, e^{-in(\tau-\sigma)}$ の展開係数である (式 (13.24)). そこで生成演算子 $\alpha, \bar{\alpha}$ の作る状態をそれぞれ左進セクター (添字 L で表す), 右進セクター (添字 R で表す) と呼ぶ*13. 左進セクターと右進セクターの各々は開弦の状態に当たり, それぞれ NS セクターと R セクターを持つ.

超対称性を備えた閉弦理論を得るために, 状態を

$$\text{左進セクター} : \left\{ \begin{array}{l} \text{NS+} \\ \text{R-} \end{array} \right\}, \quad \text{右進セクター} : \left\{ \begin{array}{l} \text{NS+} \\ \text{R+} \end{array} \right\}$$

と縮小する理論を IIA 型と呼ぶ. IIA 型の理論における無質量状態は

(NS+, NS+):	$\bar{b}_{-1/2}^I \text{NS}\rangle_L \otimes b_{-1/2}^I \text{NS}\rangle_R \otimes p^+, \vec{p}_T\rangle$	8 × 8 個のボゾン状態,
(NS+, R+):	$\bar{b}_{-1/2}^I \text{NS}\rangle_L \otimes \text{R}_{\bar{b}}\rangle_R \otimes p^+, \vec{p}_T\rangle$	8 × 8 個のフェルミオン状態,
(R-, NS+):	$ \text{R}_a\rangle_L \otimes b_{-1/2}^I \text{NS}\rangle_R \otimes p^+, \vec{p}_T\rangle$	8 × 8 個のフェルミオン状態,
(R-, R+):	$ \text{R}_a\rangle_L \otimes \text{R}_{\bar{b}}\rangle_R \otimes p^+, \vec{p}_T\rangle$	8 × 8 個のボゾン状態

で与えられる. 無質量の (NS+, NS+) ボゾンは 2 つの Lorentz 添字を持ち, 重力子と Kalb-Ramond 場と, ディラトンの 1 粒子状態に同定される.

状態を

$$\text{左進セクター} : \left\{ \begin{array}{l} \text{NS+} \\ \text{R-} \end{array} \right\}, \quad \text{右進セクター} : \left\{ \begin{array}{l} \text{NS+} \\ \text{R-} \end{array} \right\}$$

と縮小する理論を IIB 型と呼ぶ.

*13 左進および右進という呼び方は, 教科書では既に 13.1 節において導入されている (p.280).

II 型理論の無質量 R-R ボゾンは次のようにまとめられる (場は添字に関して反対称).

$$\begin{aligned} \text{IIA 型における R-R 無質量場: } & A_\mu, A_{\mu\nu\rho} \\ \text{IIB 型における R-R 無質量場: } & A, A_{\mu\nu}, A_{\mu\nu\rho\sigma} \end{aligned}$$

II 型超弦理論において安定となる D-ブレーンは, これらの場と結合する (16.4 節).

- II 型 (閉弦のみ)
 - 開いた超弦の複製を左進部分と右進部分に充てて組み合わせる
 - IIA 型
 - IIB 型
- ヘテロ型 (閉弦のみ)
 - 開いたボゾンの弦を左進部分, 開いた超弦を右進部分として組み合わせる.
 - $E_8 \times E_8$ ヘテロ型
 - $SO(32)$ ヘテロ型
- I 型 (閉弦と開弦)
 - 無向の (12.6 節参照) 閉弦と開弦による超対称な理論

以上の 5 種類の超弦理論と M 理論 (膜を含んでいるが弦理論ではない) は, 唯一の理論の異なる極限と見なされる. ボゾンの弦の理論も単一の理論に含まれるかはまだ不明である.

14.8 について

■「閉弦の理論が, ……乗法的に組み合わせることによって得られる」(14.8 節, l.1,2) について これは左進演算子 α と右進演算子 $\bar{\alpha}$ を乗法的に組み合わせることで基底状態に作用させると, 閉弦の状態が得られること (式 (13.60)) を意味していると考えられる. ここから (R, R) セクターが「2 重に」フェルミオンの (14.8 節, l.11,12) であることが理解される.

■閉じた超弦のセクター (14.75) について 例えば左進セクターに NS セクターと R セクターの両方を用いるような状態は考えられない. これは Neveu-Schwarz 境界条件と Ramond 境界条件が両立しないため, NS セクターと R セクターが排他的であることを考えれば当然である.

■IIA 型の超弦のセクター (14.77) について 14.7 節において $R-$ を $(-1)^F = -1$ のフェルミオンの状態, $R+$ を $(-1)^F = +1$ のボゾンの状態と定めた. しかし IIA 型の超弦のセクター (14.77):

$$(NS+, NS+), (NS+, R+), (R-, NS+), (R-, R+)$$

に対して「時空のボゾンは……(R, R) セクターからも生じ」(14.8 節, l.10,11), 「時空のフェルミオンは (NS, R) セクターと (R, NS) セクターから生じる」(14.8 節, l.12) ためには, 右進セクターの $R+$ をフェルミオンの状態と見なければならぬと考えられる.

■質量の自乗の式 (14.78) について ボゾンの弦理論においては

$$\begin{aligned} \text{閉弦理論における質量の自乗 (13.48): } & \frac{\alpha'}{2} M^2 = N^\perp + \bar{N}^\perp - 2 = \alpha' M_R^2 + \alpha' M_L^2, \\ \text{閉弦理論における質量の自乗 (12.163): } & \alpha' M_R^2 = N^\perp - 1, \quad \alpha' M_L^2 = \bar{N}^\perp - 1 \end{aligned}$$

である。そこで超弦に対しても質量の自乗を式 (14.78):

$$\frac{\alpha'}{2}M^2 = \alpha'M_R^2 + \alpha'M_L^2$$

と書いたものと考えられる。ただし M_R^2 と M_L^2 は、左進セクターと右進セクターのそれぞれで NS セクターを考えているか R セクターを考えているかに応じて式 (14.37) または式 (14.53) を用いなければならない。質量の自乗を式 (14.78) は 4 つのセクター (14.75) の縮小の仕方に依らない。

ボゾンの弦理論において、状態間のレベル整合条件 $\alpha_0^- = \bar{\alpha}_0^-$ は式 (13.45): $N^\perp = \bar{N}^\perp$ に書き換えられるので、これは $\alpha'M_R^2 = \alpha'M_L^2$ (p.316, 下から 4 行目) を意味している。超弦に対しても式 (14.37), 式 (14.53) より、例えば IIA 型理論の無質量状態 (14.79–82) が

$$\alpha'M_R^2 = \alpha'M_L^2 = 0$$

を満たしているのを見て取ることはできる。

■「 $a = 1, \dots, 8$ および $\bar{b} = \bar{1}, \dots, \bar{8}$ により」(p.317, l.13) について 状態 (14.80) は $\bar{b} = \bar{1}, \dots, \bar{8}$ と $I = 2, \dots, 9$ により、状態 (14.81) は $a = 1, \dots, 8$ と $I = 2, \dots, 9$ により $8 \times 8 = 64$ 種類ある。Ramond 基底状態の添字 a, \bar{b} のとり得る値の個数は Lorentz 添字 I のそれと一致している。

■II 型理論の無質量 R-R ボゾンに関する p.318 訳註の引用

R-R 場の添字は、ボゾンの閉弦による場や NS-NS 場とは違って単純なベクトル添字の組合せから形成されるのではなく、複数の添字を持つものに関しては、すべての添字について反対称な場だけが R-R 場として生じる。II 型の超弦 (閉弦) において、時空ボゾンは NS-NS 場と R-R 場から現れ、NS-NS 場は IIA 型と IIB 型において共通なので ((NS+,NS+):式 (14.83)), II 型の超弦理論におけるすべての無質量ボゾン場をまとめると、次のようになる。

$$\begin{aligned} \text{IIA 型における無質量場:} & \quad g_{\mu\nu}, \quad B_{\mu\nu}, \quad \phi, \quad A_\mu, \quad A_{\mu\nu\rho} \\ \text{IIB 型における無質量場:} & \quad g_{\mu\nu}, \quad B_{\mu\nu}, \quad \phi, \quad A, \quad A_{\mu\nu}, \quad A_{\mu\nu\rho\sigma} \end{aligned}$$

ここに $g_{\mu\nu}$ は計量テンソル (重力場に対応), $B_{\mu\nu}$ は Kalb-Ramond 場, ϕ はディラトン場である。

■「NS- セクターを用いることになり、タキオンを含むスペクトルが生じてしまう」(p.318, l.14,15) について NS± セクター, R± セクターのうちタキオンを含むのは NS- セクターのみである。

■II 型理論は閉弦のみであること (p.319) について それにも関わらず、発展編 (例えば 21.4 節) では 1 つの素粒子モデルを構築する際に、D6-ブレーンの安定となる IIA 型理論において開弦を考えている。この点について、p.319 の訳註を引用する。

ここでは 1980 年代の摂動論的観点の下で「閉弦のみ」としてある II 型の超弦理論も、D-ブレーンを導入して考えるならば開弦を併用することになる (第 21 章, 22.7 節)。元々は開弦を含まず (したがって開弦のスピン 1 の無質量状態を利用してゲージ対称性を作り込むことができない)、ヘテロ型のような余分の内部空間次元も持たない I 型理論は、その出発点においてゲージ対称性を備えていない。そのため当初、素粒子モデルの構築の試みにおいて II 型理論は有望視されなかったが、D-ブレーンと開弦の導入によってゲージ対称性 (Yang-Mills 場) を扱えることが分ると (15.3 節)、素粒子の現象論モデルへの応用も精力的に考察されるようになった (第 21 章, 21.5 節)。D-ブレーンは 1995 年に J. Polchinski によって理論的に発見された。

■M 理論に関する p.319 訳註の引用

“M” は membrane(膜), matrix(母体・行列), mother, mystery などの様々な意味を暗示している。超弦理論の進展の経緯を表す言葉として、1984 年の M. Green と J. Schwarz による内部矛盾を含まない I 型理論 (開弦の端点に Chan-Paton 因子 [15.3 節] を付けて $SO(32)$ 対称性を持たせることによって、量子異常などの内部矛盾を含まない理論を実現した) の発見を発端として起こった空前の超弦理論ブームを第 1 次革命、1995 年の E.

Witten(ウィッテン)による M 理論と双対性予想の提唱, および J. Polchinski による D-ブレーンの発見を契機として起こった非摂動的な側面に比重を置いた超弦理論の発展を第 2 次革命と呼ぶことがある.

■5 種類の超弦理論と M 理論が, 唯一の理論の異なる極限と見なされることに関する p.319 訳註の引用

これらの理論全体の関係性は双対性の概念に基づいて推測され明らかになった. II 型の 2 つの理論同士, ヘテロ型の 2 つの理論同士は, T 双対性 (コンパクト化半径 $R \leftrightarrow 1/R$ の双対性. 第 17 章) によって互いに入れ替わる関係にある. また IIA 型と M 理論, $E_8 \times E_8$ ヘテロ型と M 理論, I 型と $SO(32)$ ヘテロ型の組合せは, S 双対性 (結合定数 $g \leftrightarrow 1/g$ の双対性) によって関係づけられる. このようにして 6 つの理論のネットワーク構造が明らかにされたが, それぞれの理論は, それぞれの双対性の '両極端' の部分を代表しており, 包括的な双対関係全体 (U 双対性) を統括すべき唯一の理論の '中央部' は, 未だ分かっていないという状況である.

計算練習 14.7

式 (14.79) の線形結合

$$\sum_{I,J} R_{IJ} \times (14.79)$$

を作ったとき, 式 (13.64) に対応する重力子の 1 粒子状態の数は式 (10.108):

$$n(D) = \frac{1}{2}D(D-3) = 35 \quad (\because D = 10)$$

である. 式 (13.70) に対応する Kalb-Ramond 状態の数は反対称な A_{IJ} の数

$$1 + \dots + 7 = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 8 = 28$$

だけある. 式 (13.71) に対応するディラトン状態は 1 つだけなので, 以上の状態数の総和は

$$35 + 28 + 1 = 64$$

になる.

計算練習 14.8

左進セクターの R_{\pm} から R_{-} を選んでも一般性を失わない (p.317). NS_{-} セクター, R_{\pm} セクターの状態は整数値の $\alpha' M^2$ を持ち, NS_{+} セクターの状態は半整数値の $\alpha' M^2$ を持つ. よって条件 $\alpha' M_R^2 = \alpha' M_L^2$ (p.316, 下から 4 行目) を満たすためには, 右進セクターの NS_{\pm} から NS_{+} を選ぶことはできない. そこで

$$\text{左進セクター} : \left\{ \begin{array}{l} NS_{-} \\ R_{-} \end{array} \right\}, \quad \text{右進セクター} : \left\{ \begin{array}{l} NS_{-} \\ R_{\pm} \end{array} \right\}$$

とすれば良いと考えられる.

付録 A 教科書全体の要約

「第2版への前書き」にあるように、教科書の「基礎編の大部分は、頂上に弦の量子化を据えた登山道のように特徴づけられる」。以下では基礎編の教科書を基に、内容を圧縮し、弦の量子化へと至るあらすじを手短かに要約する。

弦の古典論

弦の運動の記述

弦の量子化を行うには、あらかじめ弦の古典論を調べておく必要がある。古典物理学は物体(および場)の運動を予言することを主眼とする。そこでまず、弦の古典的な運動を記述する方法について述べる(以下、図30参照)。一般に物体の運動は、物体の空間位置を時間の関数 $\vec{r} = \vec{r}(t)$ として決めることで表現できる。あるいは物体の運動を定めることは、物体が時空に描く軌道を与えることと等価である。ここでは物体が時空に描く世界領域を用いて物体の運動を表現する観点を採用しよう。

ところで弦理論では時空は4次元に限らず、より高次元の時空も想定される。しかしながら弦は空間的に1次元的な広がりを持つので、時空の次元 D の値が何であろうと、時間経過に伴って弦はその時空の中に2次元の面を描く。よって弦の運動を決定するには、弦の描く2次元の世界面が時空に占める位置を定めれば良いことになる。世界面上の位置は2つのパラメーター τ, σ を用いて指定できるので、弦の世界面の位置は τ と σ の関数として

$$x^\mu = X^\mu(\tau, \sigma)$$

と表される。こうして弦の運動を決定することは、我々が任意に導入した世界面上のパラメーター τ, σ に対して、弦座標 $X^\mu(\tau, \sigma)$ の関数形を決定することに帰着する。ここで弦座標 $X^\mu(\tau, \sigma)$ は物理的な意味としては物体の位置であるけれど、数学的にはむしろこれを、 τ と σ を引数に持つ場と見た方が有用な場合もある。実際、——話が進むにつれて明らかになるように——弦理論の定式化は場の理論によく馴染んでいるように見える。

パラメーター τ, σ の選択は任意であり、弦座標のゲージとは弦の世界面を τ, σ でパラメトライズする方法のことである。理論はゲージ不変でなければならない。ところが教科書の大部分では、後で説明する光錐ゲージと呼ばれるゲージの下で解析を行うことになる。この処置は弦の量子化に適しており、大抵の物理的な問題を扱うのに充分に有用であるものの、特定のゲージだけで成り立つ方程式を扱うことを意味しているため、理論のゲージ不変性は見えづらくなるという短所がある。さらに光錐ゲージは、後述の光錐座標と呼ばれる特定の座標系を前提として定義されるため、理論の座標変換に対する共変性も同時に隠されてしまう。

いずれにせよこれ以降、 τ はある意味で時間座標の役割を果たし、 σ は空間座標の役割を果たすものと見なすことにする。そのためには具体的には τ を、座標時間 x^0 の経過に伴って単調に増大するようにとれば良い。こうすれば τ を時間の代わりに用いることができる。極端な例としては τ を座標時間 x^0 そのものにとれば良い。このとき τ が一定の線は時刻 $x^0 = \tau$ における弦を表し、その弦に沿う位置がパラメーター σ によって表されることになる(再び図30参照)。このようなパラメーターの取り方は静的ゲージと呼ばれ、教科書の前半で弦の古典的な運動を調べるのに用いられている。他方、光錐ゲージでは τ, σ は無次元量として導入されるけれど、 τ が時間座標の役割を演じることに変わりはない。

弦の運動を記述する方法

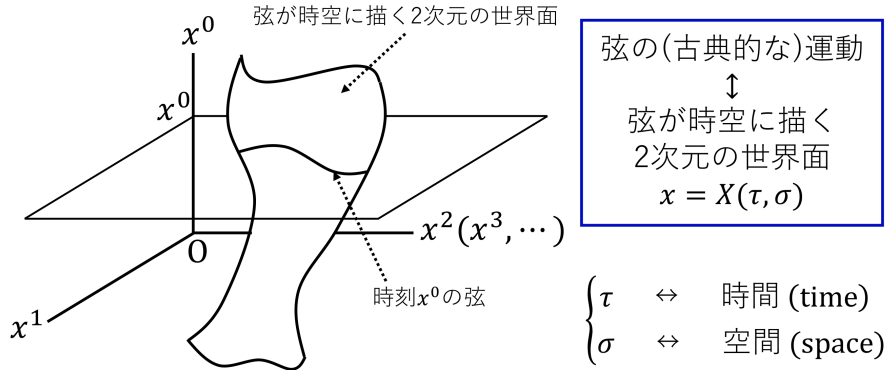


図 30

弦の作用

ここまでは弦の運動を記述する数学的・運動学的な方法について述べてきた。次に弦が実際におこなう運動を決定する問題に移ろう。弦の運動を決めるのは物理法則であり、ここからが物理の問題である。一般に古典的な理論は最小作用原理を用いて定式化できる。弦理論も例外ではない。以下では弦の作用を与えて最小作用原理から弦の運動方程式を導き、そこから弦の運動を決定することを考える (図 31 参照)。その際、理論を非相対論的な範囲に限らない。

弦の作用の表式は最終的には原理として天下りに提示されるものであるけれど、その適切な形を推定するには、相対論的な点粒子の作用からの類推という方法が役に立つ。相対論的な点粒子に対して、作用は粒子の世界線に沿う固有長さ $\int ds$ に比例した形をとる。そこで相対論的な弦の作用を、弦が描く世界面の固有面積に比例するものと考え、

$$S = -T_0 \int d\tau d\sigma \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}$$

と書く (記号・表記の定義は図 31 参照)。これは南部-後藤作用と呼ばれ、積分 $\int d\tau d\sigma \sqrt{\dots}$ が世界面の固有面積に対応する。南部-後藤作用はパラメーター τ, σ の付け替えに対して不変であることを確かめることができ、ここから理論 (運動方程式) のゲージ不変性は保証される。

T_0 は作用が適正な次元を持つため必要とされる、力の次元を持つ量であり、弦の張力と呼ばれる。これは文字通り弦の張力と見なされ、弦の状態によらず弦上の各位置で一定の値をとるものと考えられる。弦の張力 T_0 は弦理論が含む唯一の次元を持つパラメーターである。ここで自然単位系 ($c = 1, \hbar = 1$) において、弦の張力 T_0 と

$$\alpha' = \frac{1}{2\pi T_0}$$

で関係付けられる量 α' を導入する。 α' は慣習的に勾配パラメーターと呼ばれる (名前の由来は 8.6 節で説明されており、それは第 23 章で重要となるが、ここでは名前そのものにそれほど意味はない)。すると弦理論において唯一次元を持つパラメーターとして、 T_0 の代わりに α' を用いることができる。なお自然単位系で α' が長さの 2 乗の次元を持つことを記憶しておくことは有用である。 $l_s = \sqrt{\alpha'}$ は弦の長さと呼ばれる (ただし

必ずしもその意味を文字通りに解釈できるわけではない).

弦の作用

- 相対論的な点粒子の作用

$$S = -mc \int ds \quad \text{世界線の固有長さ}$$

- 相対論的な弦の作用 (南部-後藤作用)

$$S = -T_0 \int d\tau d\sigma \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2} \quad \text{世界面の固有面積}$$

$$\dot{X}^\mu \equiv \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}, \quad X^{\mu'} \equiv \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma},$$

$$\dot{X} \cdot X' \equiv \dot{X}^\mu X_{\mu'}, \quad (\dot{X})^2 \equiv \dot{X}^\mu \dot{X}_\mu, \quad (X')^2 \equiv X^{\mu'} X_{\mu'} : \text{相対論的スカラー積},$$

T_0 : 弦の張力,

$$\alpha' \equiv \frac{1}{2\pi T_0} : \text{勾配パラメーター}$$

図 31

- 弦のラグランジアン L は,
それを時間 τ で積分すると南部-後藤作用 S が得られるように定義される.
- また弦のラグランジアン密度 \mathcal{L} は,
その空間座標 σ による積分が弦のラグランジアン L を与えるように定義される.

したがって

$$S = \int d\tau d\sigma \mathcal{L},$$

$$\mathcal{L} = -T_0 \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}$$

である. 一般に作用とラグランジアン密度の定義により, ラグランジアン密度を時空領域で積分すると作用が得られるけれど, このように弦理論では積分領域として通常の時空ではなく, τ, σ でパラメトライズされた弦の世界面であることに注意する.

さらに弦のラグランジアン密度に対して, それを弦の座標の導関数によって微分した量

$$\mathcal{P}^\tau_\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} = -T_0 \frac{(\dot{X} \cdot X') X_{\mu'} - (X')^2 \dot{X}_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}},$$

$$\mathcal{P}^\sigma_\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^{\mu'}} = -T_0 \frac{(\dot{X} \cdot X') \dot{X}_\mu - (\dot{X})^2 X_{\mu'}}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}}$$

を定義する. \mathcal{P}^τ は弦の運動量密度と見なされる量である. これに対し \mathcal{P}^σ は——第 8 章で時空における並進対称性から運動量保存則を導く際に理解されるように——運動量の流れの密度を表している. ($\mathcal{P}^{\tau\mu}, \mathcal{P}^{\sigma\mu}$) は (“時間成分” を併せた) 弦の世界面における流れの密度 (カレント) であり (μ がチャージの種類を指定し, τ, σ が世界面内の成分を指定する), その τ が一定の線を貫く流束は, τ が一定の線で表される弦が持つ保存するチャージ p^μ になる (8.4 節のノートにおける図 23 を参照). p^μ は弦の運動量と解釈される量であり, カ

レントとは対照的に、ここでは μ は時空における成分を表す。こうした事情の中に、弦の時空の中での運動と弦の世界面における場の理論という、前述の弦理論の二面性の一端を見ることができる。

境界条件, 運動方程式

閉弦は端点を持たないのに対し開弦は2つの端点 ($\sigma = \sigma_* \equiv 0, \pi$ とする) を持つため、両端に対して適切な境界条件を考慮しなければならない。そのような境界条件は最小作用原理から弦座標に関する運動方程式を導く際、部分積分によって現れる境界の項を消すことができるような自然な条件として同時に見出され、座標成分 $\mu = 0, 1, \dots, d$ (空間次元, $D = d + 1$: 時空次元) の各々に対して

- Dirichlet 境界条件 $X^\mu(\tau, \sigma_*) = \text{const.}$
- 条件 $\mathcal{P}^\sigma_\mu(\tau, \sigma_*) = 0$

のいずれかを選べば良いことが分かる。Dirichlet 境界条件は固定端の条件であるのに対し、後者の \mathcal{P}^σ をゼロとおく条件は端点の座標を固定しないという意味で、自由端点の条件と見なされる。ただし弦の時間座標 X^0 は必ずパラメーター τ とともに増大するため、 $\mu = 0$ に対しては常に自由端点の境界条件を課さなければならない。このとき南部-後藤作用に対する最小作用原理から、開弦と閉弦のいずれに対しても運動方程式

$$\frac{\partial \mathcal{P}^\tau_\mu}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}^\sigma_\mu}{\partial \sigma} = 0$$

が得られる (以上, 図 32 参照)。

境界条件, 運動方程式

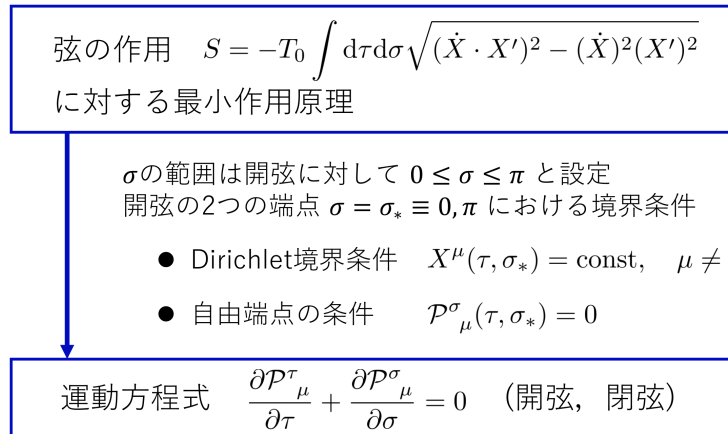


図 32

なお D p -ブレーンは p 次元の“空間的な”拡がりを持つ物体であり、開弦の端点都在这里に接続されていると、端点はブレーンに沿った方向には動けるため自由な端点の条件が適用されるのに対し、それに直交する方向には動けないため Dirichlet 境界条件が適用される。端点が空間の全方向に動ける場合には、全空間を埋める D-ブレーンが想定される。ここでは弦の端点が D-ブレーンに接続されていると、端点の運動はブレーン上に拘束されてしまうと消極的・否定的に捉えるよりも、むしろ端点はブレーンに沿った方向に運動できるようになると積極的・肯定的に捉えるという“発想の転換”を行うと理解しやすい。

光錐座標, 光錐ゲージ

次にパラメーター τ, σ の選び方の任意性を利用して, 運動方程式を簡略化することを考える. 既に予告したように, 我々は光錐ゲージを利用する. これは光錐座標を導入して初めて定義可能なものとなっている.

そこで光錐ゲージの準備として光錐座標を定義する (図 33 参照). 光錐座標は Lorentz 座標

$$(x^0, x^1, x^2, \dots, x^d)$$

(d は空間の次元) における x^0, x^1 軸の代わりに, これらを 45 度回転させた x^+, x^- 軸を用いたものである. x^+ 方向に光速で運動する物体を除けば, 物体の x^\pm 座標は時間とともに増加するから, 光錐座標 x^\pm はともに時間座標の資格を持つ. 我々は x^+ を光錐時間に同定する. (このとき平面波状態 $e^{ip \cdot x/\hbar}$ に対する関係 $i\hbar\partial_+ = cp^-$ から p^- が光錐エネルギーに同定される.) 残りの座標 $x^I (I = 2, \dots, d)$ は横方向座標と名付け, そのまま用いる^{*14}

光錐座標

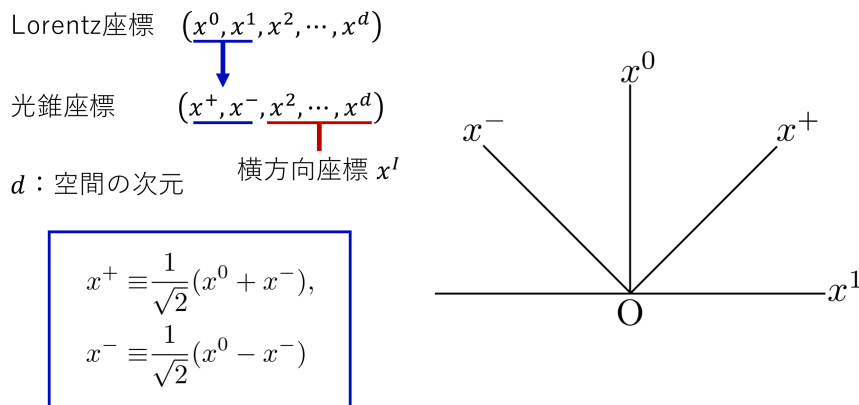


図 33

さて, τ, σ に対するパラメーター付けの条件の段階的な設定と, それに伴う一連の帰結については第 9 章のノート末尾の図 25 に早見表としてまとめたので, ここでは詳細は省き, 光錐ゲージについて簡潔に説明しよう.

光錐ゲージではパラメーター τ を光錐時間 X^+ に比例するように選ぶ. さらに弦の持つ運動量の x^+ 方向成分について, σ -密度が一定となるようにパラメーター σ の目盛り付けを行う. このとき $\mathcal{P}^\tau, \mathcal{P}^\sigma$ はそれぞれ, \dot{X}, X' に比例する形に簡略化される. したがって光錐ゲージにおいて, 自由端点の条件 $\mathcal{P}^\sigma_\mu = 0$ は Neumann 境界条件 $X'^\mu = 0$ に帰着する. また弦の運動方程式は波動方程式に簡略化される (以上, 図 34 参照).

開弦の運動

ここからは運動方程式を基に, 弦の運動を議論する. まず自由な端点を持つ開弦の運動を考えると, Neumann 境界条件の下で弦の座標 X^μ に対する波動方程式の実数解は, 図 35 のようにモード展開される.

^{*14} x^\pm のみを光錐座標と呼ぶのか, 横方向座標 x^I を併せて光錐座標と呼ぶのかはやや曖昧である.

光錐ゲージ

$$\beta = \begin{cases} 2 & \text{開弦} \\ 1 & \text{閉弦} \end{cases} \text{とし, 以降パラメーター}\tau, \sigma \text{は無次元とする.}$$

光錐ゲージ条件 $X^+(\tau, \sigma) = \beta\alpha'p^+\tau$
 σ の目盛付けの条件 $p^+ = \frac{2\pi}{\beta}P^{\tau+}$
 (弦の線要素 $d\sigma$ が担う運動量の x^+ 成分は $P^{\tau+}d\sigma$)

$$P^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'}\dot{X}^\mu, \quad P^{\sigma\mu} = -\frac{1}{2\pi\alpha'}X^{\mu'}$$

運動方程式 $\ddot{X}^\mu - X^{\mu''} = 0$: 波動方程式
 (ドットは τ , プライムは σ による微分)

図 34

さらに弦の運動量 p^μ および展開係数 a_n^μ の代わりに量 α_n^μ を導入して、モード展開を簡単に書くことも可能である。後で見ると量子化の後に通常の意味での生成・消滅演算子となるのは α ではなく a であるが、 α を用いた方が式が整理され便利な場合もある。教科書では展開係数 a_n^μ, α_n^μ を単に振動子と呼んでいる。弦座標の実数条件のために、番号 $n (\neq 0)$ の符号の異なる振動子 $\alpha_n^\mu, \alpha_{-n}^\mu$ は互いに複素共役となることに注意する。量子論に移行した際にこれらはエルミート共役な演算子に置き換わるが、これは後で述べるように、 $\alpha_n^\mu, \alpha_{-n}^\mu$ を対応する生成・消滅演算子の組と見なせるために必要なことである。

開弦の運動

自由端点の条件 $P^{\sigma\mu}(\tau, \sigma_*) = 0$
 \rightarrow Neumann境界条件 $X^{\mu'}(\tau, \sigma_*) = 0$

波動方程式の実数解は

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + 2\alpha'p^\mu\tau - i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^{\mu*} e^{in\tau} - a_n^\mu e^{-in\tau}) \frac{\cos n\sigma}{\sqrt{n}}$$

とモード展開される ($p^\mu = \int_0^\pi P^{\tau\mu} d\sigma = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^\pi \dot{X}^\mu d\sigma$ を考慮した)。

$$\alpha_0^\mu = \sqrt{2\alpha'}p^\mu, \quad \alpha_n^\mu = a_n^\mu \sqrt{n}, \quad \alpha_{-n}^\mu = a_n^{\mu*} \sqrt{n}, \quad n \geq 1$$

を導入すると

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^\mu\tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} \cos n\sigma$$

と書ける。

図 35

光錐ゲージ条件により、弦座標の全ての成分が独立とはいかない。例えば図 36 のように光錐座標 X^- を考えると、これは X^0 と X^1 の線形結合なので $X^\mu (\mu = 0, 1, \dots, d)$ と同じ波動方程式と境界条件を満たし、それ故、展開係数を α_n^- として X^μ 同様にモード展開されることは正しい。ところがパラメーター付けの制約条件によれば X^- (の導関数) は横方向座標 X^I (の導関数) を用いて表され、その結果、 X^- の展開係数 α_n^- は横

方向成分 X^I の展開係数 α_n^I を用いて表されることが分かる。具体的には α_n^- は、 α_n^I から作られる横方向の Virasoro モード L_n^\perp に比例する。

よって横方向成分 X^I が与えられているとき、 X^- の展開の定数項 x_0^- を与えれば X^- のダイナミクスは決定される。さらに保存する弦の運動量の光錐成分 p^+ が与えられると、残る弦の光錐座標 X^+ も光錐ゲージ条件 $X^+(\tau, \sigma) = 2\alpha' p^+ \tau$ によって決定される。したがって光錐ゲージにおいて、弦の時間発展は

$$X^I(\tau, \sigma), \quad p^+, \quad x_0^-$$

によって決定されることになる。

横方向のVirasoroモード

- 光錐座標 X^- のモード展開

$$X^-(\tau, \sigma) = x_0^- + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^- \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^- e^{-in\tau} \cos n\sigma$$

- パラメーター τ, σ の選択の含意

$$\dot{X}^- \pm X^{-'} = \frac{1}{\beta\alpha'} \frac{1}{2p^+} (\dot{X}^I \pm X^{I'})^2$$

$$\begin{aligned} \sqrt{2\alpha'} \alpha_n^- &= \frac{1}{p^+} L_n^\perp, \\ L_n^\perp &\equiv \frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I : \text{横方向のVirasoroモード} \end{aligned}$$

弦の時間発展は $X^I(\tau, \sigma), p^+, x_0^-$ により決定される (参考: 光錐ゲージ条件 $X^+(\tau, \sigma) = \beta\alpha' p^+ \tau$)

図 36

弦の質量 M は弦の運動量 p^μ の相対論的なスカラー積として求められる。ここで α_0^- が、したがって p^- が横方向の Virasoro モード L_0^\perp で与えられることを用いると、質量の自乗を横方向座標の展開係数で表した公式

$$M^2 = -p^2 = 2p^+ p^- - p^I p^I = \frac{1}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} n \alpha_n^{I*} \alpha_n^I$$

が得られる。

閉弦の運動

次に閉弦の座標のモード展開を考える (図 37 参照)。閉弦に対しては便宜的に σ の範囲を 0 から 2π に設定する。このとき σ を 2π だけ増加させると世界面上のもとの点にもどる。このようなパラメーター σ に関する周期 2π の周期境界条件がの下で、波動方程式の解である弦座標のモード展開には 2 種類の展開係数 $\alpha_n^\mu, \bar{\alpha}_n^\mu$ が現れる。開弦の場合と同様に、ゼロモード α_0^μ は弦の運動量に比例する。

開弦の量子論

開弦の正準量子化

ここまで弦の古典論を一通り見てきた。次に弦の量子論に移ろう。量子力学は系を量子化する枠組みであり、どのような対象にも適用することができるような量子化の手続きを提供する。我々は弦の古典論を踏ま

閉弦の運動

閉弦 → 周期境界条件 $X^\mu(\tau, \sigma) = X^\mu(\tau, \sigma + 2\pi)$

波動方程式の実数解は

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^\mu\tau + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{-in\tau}}{n} (\alpha_n^\mu e^{in\sigma} + \bar{\alpha}_n^\mu e^{-in\sigma})$$

とモード展開される。

α_0^μ は弦の運動量に比例する：

$$p^\mu = \int_0^{2\pi} \mathcal{P}^{\tau\mu}(\tau, \sigma) d\sigma = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^{2\pi} \dot{X}^\mu(\tau, \sigma) d\sigma = \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \alpha_0^\mu, \quad \alpha_0^\mu = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} p^\mu.$$

図 37

え、正準量子化の手法に従って弦の量子化を行う。

はじめに自由な端点を持つ開弦の量子化を考える (図 38 参照)。光錐ゲージにおいては基本となる力学変数の組を、横方向座標 X^I とこれに共役な運動量密度 $\mathcal{P}^{\tau I}$ 、および x_0^-, p^+ にとることができる。Heisenberg 描像を採用して、これらを時間に、したがってパラメーター τ に依存する演算子と見なす。そして正準交換関係

$$[X^I(\tau, \sigma), \mathcal{P}^{\tau J}(\tau, \sigma')] = i\eta^{IJ} \delta(\sigma - \sigma'), \quad [x_0^-(\tau), p^+(\tau)] = i\eta^{-+} = -i$$

を課し、量子化を行う。すると横方向座標の展開係数 α_n^I と定数項 x_0^I は図 38 に示した交換関係を満たす演算子となる。展開係数 α_n^I と関係付けられるものとの展開係数 a_n^I, a_n^{I*} もまた演算子 $a_n^I, a_n^{I\dagger}$ となり、展開係数 α に対する交換関係は演算子 a に対する調和振動子の交換関係に読み替えられる。よって $a_n^I, a_n^{I\dagger}$ の一方は生成演算子、他方は対応する消滅演算子となる。我々は a_n^I を消滅演算子、 $a_n^{I\dagger}$ を生成演算子と見なす。このとき演算子 α_n^I について言えば、 n が正の整数をとるものが消滅演算子、負の整数をとるものが生成演算子となる。

開弦の基本状態

図 39 のように運動量固有状態 $|p^+, \vec{p}_T\rangle$ を、消滅演算子が作用すると状態が消失するような基底状態 (真空状態) にとる。運動量が確定した一般的な基本状態は、これに生成演算子を作用させることで得られる。ただしこれは多粒子状態ではなく、1 粒子状態と見なす。1 本の弦を量子化しているため、得られる粒子が 1 個であると考えるのは自然だと言えよう。ここでは生成演算子は粒子数を増加させるのではなく、粒子の種類を変えていることになる。

開弦の状態としてどのような種類の粒子が得られているかを調べたい。その判断基準となるのは主に

- 弦の質量
- 弦状態の自由度
- 弦状態の波動関数の方程式

の 3 つである*15。まず考えている状態における弦の質量を計算し、それを粒子の質量と比較する必要がある。

*15 もっともこれらはあくまで判断材料であり、これだけでは粒子の種類を特定する決定的な証拠とまでは言えないだろう。実際には

開弦の正準量子化

基本となる変数 $(X^I(\sigma), x_0^-, \mathcal{P}^{\tau I}(\sigma), p^+)$

正準交換関係

$$[X^I(\tau, \sigma), \mathcal{P}^{\tau J}(\tau, \sigma')] = i\eta^{IJ}\delta(\sigma - \sigma'), \quad [x_0^-(\tau), p^+(\tau)] = -i, \quad \text{etc.}$$

$$[\alpha_m^I, \alpha_n^J] = m\eta^{IJ}\delta_{m+n,0}, \quad [x_0^-, p^+] = i\eta^{IJ}, \quad [x_0^-, \alpha_n^J] = 0 \quad \text{for } n \neq 0$$

$\alpha_n^I = a_n^I\sqrt{n}, \quad \alpha_{-n}^I = a_{-n}^{I\dagger}\sqrt{n}, \quad n \geq 1$ に対する **調和振動子の交換関係**

$$[a_m^I, a_n^{J\dagger}] = \delta_{mn}\eta^{IJ}, \quad [a_m^I, a_n^J] = 0, \quad [a_m^{I\dagger}, a_n^{J\dagger}] = 0$$

$a_n^I, \alpha_n^I \quad (n \geq 1)$: 消滅演算子, $a_n^{I\dagger}, \alpha_{-n}^I \quad (n \geq 1)$: 生成演算子

図 38

次に弦の量子化を光錐ゲージの下で行っているため、その結果を場の量子論によって記述される粒子と比較するには、場の量子化も光錐ゲージを用いてやり直す必要がある(教科書の第 10 章がその作業に充てられる)。その上で弦状態の自由度を場の自由度と比較することができる。さらに場の量子論において場によって記述される粒子が弦理論からも現れるならば、何らかの意味で弦理論から粒子と関係する場を導けると期待するのは自然である。実は粒子を記述する古典場は弦の状態を表す波動関数に同定される。基底状態に作用する生成演算子 $a_{n_1}^{I_1\dagger} \cdots a_{n_k}^{I_k\dagger}$ の定まった状態 $|\Psi, \tau\rangle$ に対して運動量空間の波動関数 $\psi_{I_1 \dots I_k}(\tau, p^+, \vec{p}_T) = \langle p^+, \vec{p}_T | \Psi, \tau \rangle$ を導入すると、これは Schrödinger 方程式

$$i \frac{\partial}{\partial \tau} \psi_{I_1 \dots I_k} = H \psi_{I_1 \dots I_k}$$

に従う(異なる弦状態は異なるハミルトニアン H を持つ)。このためある弦の状態に対する波動方程式が場の方程式と一致するかを調べることも、弦の状態が表す粒子を推定するための 1 つの判断材料となる。

開弦の質量とハミルトニアン

そこで以下では特に、弦の質量と Schrödinger 方程式におけるハミルトニアン H についてあらかじめ詳しく調べよう(図 40 参照)。質量の自乗 M^2 の公式は既に古典論において与えてあり、その中で展開係数 a_n^I, a_n^{I*} は生成・消滅演算子 $a_n^I, a_n^{I\dagger}$ に置き換わる。ハミルトニアンは τ 方向の推進操作を生成しなければならないことから、

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial X^+}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial X^+} = 2\alpha' p^+ \frac{\partial}{\partial X^+} \quad \leftrightarrow \quad H = 2\alpha' p^+ p^- = L_0^\perp$$

とおく($p^- \sim \alpha_0^- \sim L_0^\perp$)。ここでハミルトニアンが無次元になっているのは、時間座標 τ を無次元に選んでいるからである。ただし横方向の Virasoro モード L_0^\perp も、ここでは展開係数が生成・消滅演算子 $a_n^I, a_n^{I\dagger}$ に置き換わった横方向の Virasoro 演算子である。これらを扱いやすい形にするために正規順序化する、すなわち全ての消滅演算子が全ての生成演算子の右側に配置されている順序に並び替えることを考える(以下では正規

例えば「開弦の状態から 1 光子状態が得られた」と断言できるものではなく、「開弦のある状態を 1 光子状態に同定し得る」「1 光子状態を示唆する状態が得られる」と述べるのが穏当と考えられる。

開弦の基本状態

- 基底状態 (真空状態) $|p^+, \vec{p}_T\rangle$
 $\vec{p}_T = (p^2, \dots, p^{D-1})$: 横方向成分, D : 時空の次元
 $a_n^I |p^+, \vec{p}_T\rangle = 0$

- 開弦の基本状態

$$|\lambda\rangle = \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{I=2}^{D-1} (a_n^{I\dagger})^{\lambda_{n,I}} |p^+, \vec{p}_T\rangle \leftrightarrow \text{1粒子状態}$$

$$\lambda_{n,I} : \text{非負整数 (生成演算子が作用する回数)}$$

図 39

順序化を $N[\dots]$ で表す). 生成・消滅演算子の交換関係を用いて

$$H = L_0^\perp, \quad \alpha' M^2 = \alpha'(2p^+p^- - p^I p^I) = L_0^\perp - \alpha' p^I p^I$$

を正規順序化すると, これらはともに同じ正規順序化定数 a だけシフトする.

$$L_0^\perp = N[L_0^\perp] + a, \quad \alpha' M^2 = \alpha' N[M^2] + a.$$

正規順序化した質量の自乗の演算子 $N[M^2]$ は, (係数 α' の違いを除いて) 数演算子 N^\perp となる. これは基本状態 $|\lambda\rangle$ を作っている生成演算子のモード番号の和を固有値 N_λ^\perp に持つ. 例えば

$$|\lambda\rangle = a_5^{I\dagger} a_3^{J\dagger} a_3^{J\dagger} a_2^{K\dagger} a_1^{J\dagger} a_1^{I\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle \quad (I, J \text{ について和をとらない})$$

$$\Rightarrow N_\lambda^\perp = 5 + 3 + 3 + 2 + 1 + 1$$

である. 展開係数の交換関係を用いて付加定数 a を計算した結果

$$a = \frac{1}{2}(D-2) \sum_{p=1}^{\infty} p = \frac{1}{2}(D-2)(1+2+3+4+\dots)$$

は, 無限大であるように見える. しかし最右辺において整数を無限に足した結果が $1+2+3+4+\dots = -1/12$ になるという数学公式により, これは有限値をとることが示唆される.

理論の Lorentz 不変性, 時空次元・正規順序化定数の決定

これを正当化するために, 理論の Lorentz 不変性を要請する (図 41 参照). Lorentz 不変性の条件は次のように考える. 相対論的な点粒子に対して, Lorentz 不変性に付随するチャージ $M^{\mu\nu}$ は図 41 に示した交換関係を満たす. これは両辺が同じ種類のテンソルから成るため, Lorentz 変換に対して共変的な関係式になっている. そして (それ故) これは光錐成分 M^{-I} に対する交換関係 $[M^{-I}, M^{-J}] = 0$ を含んでいる. そうであるならば, 類似の演算子 $M^{\mu\nu}$ が交換関係 $[M^{-I}, M^{-J}] = 0$ を満たさない理論は Lorentz 不変ではない.

そこで光錐ゲージを用いた弦理論に対しても, 弦の作用の Lorentz 不変性に伴うチャージの光錐成分 M^{-I} を, 正規順序化されたエルミート演算子の形に定義し, これが同様の交換関係を満たすことを要求する. する

開弦の質量 (演算子)

$N[\dots]$: 正規順序化

$$\begin{aligned}\alpha' M^2 &= \alpha' N[M^2] + a, \\ \alpha' N[M^2] &= N^\perp \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{I\dagger} a_n^I : \text{数演算子}, \\ \text{正規順序化定数 } a &= \frac{1}{2}(D-2) \sum_{p=1}^{\infty} p = -\frac{1}{24}(D-2) \\ &\left(\because \sum_{p=1}^{\infty} p = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots = -\frac{1}{12} \right)\end{aligned}$$

図 40

と再び質量の定数シフトの式 $a = -\frac{1}{24}(D-2)$ が得られ、同時に時空の次元も $D = 26$ に確定する。よって質量の定数シフトは $a = -1$ であることになり、したがって

$$H = N[L_0^\perp] - 1 = \alpha' p^I p^I + N^\perp - 1, \quad \alpha' M^2 = N^\perp - 1$$

となる。

理論の Lorentz 不変性

点粒子の Lorentz チャージ $M^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu$ は交換関係
 $[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = i\eta^{\mu\rho} M^{\nu\sigma} - i\eta^{\nu\rho} M^{\mu\sigma} + i\eta^{\mu\sigma} M^{\rho\nu} - i\eta^{\nu\sigma} M^{\rho\mu}$,
 $\therefore [M^{-I}, M^{-J}] = 0$ を満たす。

弦の Lorentz チャージ

$$M^{\mu\nu} = \int_0^\pi (X_\mu \mathcal{P}^\nu - X_\nu \mathcal{P}^\mu) d\sigma = x_0^\mu p^\nu - x_0^\nu p^\mu - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^\mu \alpha_n^\nu - \alpha_{-n}^\nu \alpha_n^\mu)$$

(開弦を考え $0 \leq \sigma \leq \pi$ とした、最右辺のモード展開は光錐ゲージに対して)
 の光錐成分を、正規順序化された Hermite 演算子

$$\begin{aligned}M^{-I} &= x_0^- p^I - \frac{1}{2}(x_0^I p^- + p^- x_0^I) - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^- \alpha_n^I - \alpha_{-n}^I \alpha_n^-) \\ &= x_0^- p^I - \frac{1}{4\alpha' p^+} \{x_0^I (N[L_0^\perp] + a) + (N[L_0^\perp] + a) x_0^I\} - \frac{i}{\sqrt{2\alpha' p^+}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (L_{-n}^\perp \alpha_n^I - \alpha_{-n}^I L_n^\perp) \\ &\left(\because \sqrt{2\alpha'} \alpha_n^- = \frac{1}{p^+} L_n^\perp, \quad 2\alpha' p^- = \frac{1}{p^+} (N[L_0^\perp] + a) \right) \text{として定義し,}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0 &= [M^{-I}, M^{-J}] \\ &= -\frac{1}{\alpha' (p^+)^2} \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_{-m}^I \alpha_m^J - \alpha_{-m}^J \alpha_m^I) \left[m \left\{ 1 - \frac{1}{24}(D-2) \right\} + \frac{1}{m} \left\{ \frac{1}{24}(D-2) + a \right\} \right]\end{aligned}$$

を要求

$$\begin{aligned}\Rightarrow & \boxed{a = -\frac{1}{24}(D-2), \quad D = 26} \\ & \alpha' M^2 = N^\perp - 1\end{aligned}$$

図 41

タキオン, 光子

以上を踏まえて, 開弦の状態として固有値 $N^\perp = 0, 1$ の状態を調べよう (図 42 参照).

基底状態 $|p^+, \vec{p}_T\rangle$ は数演算子の固有値が $N^\perp = 0$ なので, 質量の自乗が負の値を持つ. これはタキオンを表している.

また質量がゼロとなる時, 数演算子の固有値は $N^\perp = 1$ でなければならないため, そのような状態は一般には基底状態に第 1 モードの展開係数 $a_1^{I\dagger}$ を 1 つだけ作用させた基本状態の線形結合

$$\sum_{I=2}^{25} \xi_I a_1^{I\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle$$

の形をとる. これは 1 光子状態に同定される. 実際, 光子は質量を持たない. また光錐ゲージ条件の下では電磁ポテンシャルの Fourier 成分 $A^\mu(p)$ の独立な成分は $D - 2 (= 24)$ 個の横方向成分のみであり, 場の方程式は単に質量のないスカラー場の方程式 $p^2 A^I(p) = 0$ になる. これを

$$\left(i \frac{\partial}{\partial \tau} - \alpha' p^J p^J \right) A^I(\tau, p^+, \vec{p}_T) = 0$$

と書き換えると, $N^\perp = 1$ の弦の波動関数に対する Schrödinger 方程式に一致していることが見て取れる. さらに電磁場はスカラー場と同様に量子化され, 展開係数は生成演算子 $a_{p^+, \vec{p}_T}^{I\dagger}$ になり, $D - 2 (= 24)$ 個の自由度を担う偏光ベクトル ξ_I で特徴付けられる 1 光子状態

$$\sum_{I=2}^{25} \xi_I a_{p^+, \vec{p}_T}^{I\dagger} |\Omega\rangle$$

を形成する. これは上記の開弦の無質量状態と同じ構造をしており, 両者を互いに対応付けることができる. 以上より開弦の量子論において無質量で偏極を持ち, 波動方程式が電磁場の方程式に従うような, 光子状態に対応する状態が得られたことになる.

閉弦の量子論

閉弦の正準量子化

次に閉弦の量子化に移ろう (図 43 参照). 再び正準交換関係を考えると, ここから 2 組の展開係数 $\alpha, \bar{\alpha}$ に対する交換関係, および x_0^I の満たす交換関係が導かれる. ただし 2 種類の振動子のゼロモード $\alpha_0^\mu, \bar{\alpha}_0^\mu$ は等しいものとして定義されている (図 37 における閉弦座標のモード展開を参照). 開弦の場合と同様に $\alpha, \bar{\alpha}$ と関係付けられる演算子 a, \bar{a} とそのエルミート共役を導入すると, これらは調和振動子の交換関係を満たすため, a_n^I と \bar{a}_n^I を消滅演算子, $a_n^{I\dagger}$ と $\bar{a}_n^{I\dagger}$ を生成演算子と見なすことができる. このとき演算子 α_n^I および $\bar{\alpha}_n^I$ について言えば, n が正の整数をとるものが消滅演算子, 負の整数をとるものが生成演算子となる.

閉弦の質量とハミルトニアン

閉弦に対しては 2 組の横方向 Virasoro 演算子 $\bar{L}_n^\perp, L_n^\perp$ を定義できる. そして横方向座標 X^- の 2 種類の展開係数 $\bar{\alpha}_n^-, \alpha_n^-$ は, それぞれ 2 種類の横方向 Virasoro 演算子 $\bar{L}_n^\perp, L_n^\perp$ で与えられることが分かる. また閉弦に対してハミルトニアン H は

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial X^+}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial X^+} = \alpha' p^+ \frac{\partial}{\partial X^+} \quad \leftrightarrow \quad H = \alpha' p^+ p^- = L_0^\perp$$

$$\alpha' M^2 = N^\perp - 1$$

タキオン

- 基底状態 $|p^+, \vec{p}_T\rangle$ ($N^\perp = 0, \alpha' M^2 = -1$)

タキオン状態

光子

- 無質量状態 ($N^\perp = 1, \alpha' M^2 = 0$)

$$\sum_{I=2}^{25} \xi_I a_1^{I\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle$$

$$\text{1光子状態 } \sum_{I=2}^{25} \xi_I a_{p^+, \vec{p}_T}^{I\dagger} |\Omega\rangle$$

ξ_I : 偏極ベクトル,
 $a_{p^+, \vec{p}_T}^{I\dagger}$: 生成演算子, $|\Omega\rangle$: 真空状態

電磁ポテンシャルのFourier成分 $A^\mu(p)$

光錐ゲージ条件 $A^+(p) = 0$

場の方程式 \rightarrow 質量のないスカラー場の方程式 $p^2 A^I(p) = 0$

図 42

閉弦の正準量子化

正準交換関係

$$[X^I(\tau, \sigma), P^{\tau J}(\tau, \sigma')] = i\eta^{IJ} \delta(\sigma - \sigma'), \quad [x_0^-, p^+] = -i, \quad \text{etc.}$$

$$[\alpha_m^I, \alpha_n^J] = m\eta^{IJ} \delta_{m+n,0}, \quad [\bar{\alpha}_m^I, \bar{\alpha}_n^J] = m\eta^{IJ} \delta_{m+n,0}, \quad [\alpha_m^I, \bar{\alpha}_n^J] = 0,$$

$$[x_0^I, p^J] = i\eta^{IJ}, \quad [x_0^I, \alpha_n^J] = 0, \quad [x_0^I, \bar{\alpha}_n^J] = 0 \quad \text{for } n \neq 0$$

$$\text{ただし } \bar{\alpha}_0^\mu = \alpha_0^\mu$$

$$\alpha_n^I = a_n^I \sqrt{n}, \quad \alpha_{-n}^I = a_n^{I\dagger} \sqrt{n},$$

$$\bar{\alpha}_n^I = \bar{a}_n^I \sqrt{n}, \quad \bar{\alpha}_{-n}^I = \bar{a}_n^{I\dagger} \sqrt{n}, \quad n \geq 1 \quad \text{に対する調和振動子の交換関係}$$

$$[a_m^I, a_n^{J\dagger}] = \delta_{mn} \eta^{IJ}, \quad [\bar{a}_m^I, \bar{a}_n^{J\dagger}] = \delta_{mn} \eta^{IJ}, \quad \text{etc.}$$

$$a_n^I, \alpha_n^I, \bar{a}_n^I, \bar{\alpha}_n^I : \text{消滅演算子}, \quad a_n^{I\dagger}, \alpha_{-n}^I, \bar{a}_n^{I\dagger}, \bar{\alpha}_{-n}^I : \text{生成演算子 } (n \geq 1)$$

図 43

と設定される (開弦の場合との係数の違いは光錐ゲージ条件 $X^+ = \beta \alpha' p^+ \tau$ における係数 β の違いに由来) 閉弦に対して質量の自乗 M^2 とハミルトニアンは、ともに 2 種類の横方向 Virasoro 演算子 $\bar{L}_n^\perp, L_n^\perp$ ないし 2 種類の数演算子 N^\perp, \bar{N}^\perp を用いて

$$M^2 = \frac{2}{\alpha'} (N[L_0^\perp] + N[\bar{L}_0^\perp] - 2) - p^I p^I = \frac{2}{\alpha'} (N^\perp + \bar{N}^\perp - 2),$$

$$H = N[L_0^\perp] + N[\bar{L}_0^\perp] - 2 = \frac{\alpha'}{2} p^I p^I + N^\perp + \bar{N}^\perp - 2$$

と表されることが見出される (以上, 図 44 参照).

閉弦のVirasoro演算子

$$\begin{aligned} \text{閉弦のVirasoro演算子} \quad \bar{L}_n^\perp &= \frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \bar{\alpha}_p^I \bar{\alpha}_{n-p}^I, & L_n^\perp &= \frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \alpha_p^I \alpha_{n-p}^I \\ \sqrt{2\alpha'} \bar{\alpha}_n^- &= \frac{2}{p^+} \bar{L}_n^\perp, & \sqrt{2\alpha'} \alpha_n^- &= \frac{2}{p^+} L_n^\perp \end{aligned}$$

閉弦の質量

$$\begin{aligned} \alpha' p^- &= \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^- \quad (\because \alpha_0^\mu = \sqrt{\alpha'/2} p^\mu) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{p^+} L_0^\perp + \frac{2}{p^+} \bar{L}_0^\perp \right) \\ &= \frac{1}{p^+} \left(\frac{\alpha'}{2} p^I p^I + N^\perp + \bar{N}^\perp - 2 \right), \\ N^\perp &\equiv \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{I\dagger} a_n^I, & \bar{N}^\perp &\equiv \sum_{n=1}^{\infty} n \bar{a}_n^{I\dagger} \bar{a}_n^I \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \nearrow M^2 \\ = 2p^+ p^- - p^I p^I \\ = \frac{2}{\alpha'} (N[L_0^\perp] + N[\bar{L}_0^\perp] - 2) - p^I p^I \\ = \frac{2}{\alpha'} (N^\perp + \bar{N}^\perp - 2) \end{array}$$

図 44

レベル整合条件

ところで 2 つのゼロモード $\alpha_0^\mu, \bar{\alpha}_0^\mu$ が等しいことから, 2 つの数演算子 N^\perp, \bar{N}^\perp が等しいことが導かれる. これはレベル整合条件と呼ばれ, 2 つの数演算子の固有値が等しくなければならないという, 閉弦の状態に対する制約を与える. 我々は閉弦の状態として, これを満たす状態だけを考えなければならない.

レベル整合条件の意味は次のように解釈できる (図 45 参照). まず 2 つの数演算子の差 $P = N^\perp - \bar{N}^\perp$ を考えると, これはパラメーター σ の巡回的なずらしを生成する. パラメーター σ を定数 σ_0 だけ変化させる操作に伴う閉弦の状態 $|\Psi\rangle$ の変化は, 演算子 P を用いて $|\Psi\rangle \rightarrow e^{-iP\sigma_0} |\Psi\rangle$ と表される. このときレベル整合条件により P がゼロになることは, パラメーター σ のずらしの操作の下で, 閉弦の状態が不変に留まることを意味する. これは閉弦の世界面にパラメーター σ を導入するとき, $\sigma = 0$ の線をどこに入れるかを選ぶ任意性が残されていることを考えれば, もっともである. この任意性に対応して, 我々はパラメーター σ の巡回的なずらしの操作の下で不変な閉弦の状態だけを考えなければならないことになる.

重力子

閉弦の量子状態から現れる粒子を調べるにあたり, ここでは特に無質量状態を取り上げる. レベル整合条件の下で無質量状態 ($M^2 = 0$) は, 2 つの数演算子の固有値がともに $N^\perp = \bar{N}^\perp = 1$ となるときに実現される. そのような一般的な状態は, 生成演算子の第 1 モード $a_1^{I\dagger}, \bar{a}_1^{J\dagger}$ を 1 つずつ基底状態に作用させて得られる基本状態の線形結合

$$\sum_{I,J} R_{IJ} a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle$$

の形をとる. 次に係数 R_{IJ} を分解することを考える. 一般に 2 つの添字を持つ量 R_{IJ} は

- 対称部分 $S_{IJ} \equiv \frac{1}{2}(R_{IJ} + R_{JI})$
- 反対称部分 $A_{IJ} \equiv \frac{1}{2}(R_{IJ} - R_{JI})$

レベル整合条件

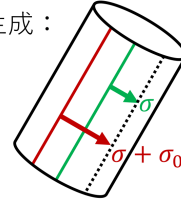
$$\alpha_0^\mu = \bar{\alpha}_0^\mu \Rightarrow N^\perp = \bar{N}^\perp : \text{レベル整合条件}$$

$P \equiv N^\perp - \bar{N}^\perp$ はパラメータ σ の巡回的なずらしを生成：

$$[P, X^I(\tau, \sigma)] = -i \frac{\partial X^I}{\partial \sigma}$$

パラメータ σ のずらしの操作 $\sigma \rightarrow \sigma + \sigma_0$ の下での閉弦の状態の変化

$$|\Psi\rangle \rightarrow e^{-iP\sigma_0} |\Psi\rangle$$



閉弦の世界面

レベル整合条件 $P = 0$	\Leftrightarrow	パラメータ σ の巡回的なずらしの下での、 閉弦の状態の不変性
--------------------	-------------------	---

図 45

に分けることができ、さらに対称部分 S_{IJ} は

- トレース $S \equiv \delta_{IJ} S_{IJ} = \text{tr}(S_{IJ})$, $S' \equiv \frac{S}{D-2}$ に比例する部分 $S' \delta_{IJ}$
- トレースレスの対称部分 $\hat{S}_{IJ} \equiv S_{IJ} - S' \delta_{IJ}$

に分けることができる。

$$R_{IJ} = \hat{S}_{IJ} + A_{IJ} + S' \delta_{IJ}.$$

ここでトレースレスの対称部分 \hat{S}_{IJ} が担う状態

$$\sum_{I,J} \hat{S}_{IJ} a_1^{I\dagger} \bar{a}^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle$$

は重力子の 1 粒子状態に同定されることを説明する。弱い重力場を考え、計量テンソルの Minkowski 計量からのズレを $h_{\mu\nu}$ とする。このとき $h_{\mu\nu}$ が小さいという条件を保持するような一連の座標変換が存在して、 $h^{\mu\nu}$ の Fourier 成分 $h^{\mu\nu}(p)$ が光錐ゲージ条件 $h^{+\mu}(p) = 0$ (ただし $\mu = \pm, I$) を満たすような座標系をとることができる (このように弱い重力場に対するゲージ変換は、具体的には座標変換である)。重力場の方程式によれば、光錐ゲージにおいて独立な Fourier 成分は横方向成分 $h^{IJ}(p)$ のみであり、これはトレースレスの条件 $h^{II}(p) = 0$ を満たすため $n(D) = \frac{1}{2}D(D-3)$ 個の自由度を担い ($D = 26$)、質量のないスカラー場の運動方程式 $p^2 h^{IJ}(p) = 0$ に従う。したがって重力子もまた無質量である。これを

$$\left(i \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\alpha'}{2} p^K p^K \right) h^{IJ}(\tau, p^+, \vec{p}_T) = 0$$

と書き換えると、 $N^\perp = \bar{N}^\perp = 1$ の弦の波動関数に対する Schrödinger 方程式に一致する。このため重力場はスカラー場と同様に量子化され、展開係数は生成演算子 $a_{p^+, \vec{p}_T}^{IJ\dagger}$ になり、 $n(D)$ 個の自由度を担う重力場の偏極テンソル ξ_{IJ} (ただし $\xi_{II} = 0$) で特徴付けられる 1 重力子状態

$$\sum_{I,J} \xi_{IJ} a_{p^+, \vec{p}_T}^{IJ\dagger} |\Omega\rangle$$

を形成する。これは確定した運動量を持つ無質量状態であり、係数がトレースレスで対称であるという点で閉弦の状態 $\sum_{I,J} \hat{S}_{IJ} a_1^{I\dagger} \bar{a}^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle$ と同じ構造を持つ (それ故, 同じ数の自由度を持つ)。こうして閉弦の状態から, 1 重力子状態に対応付けられる状態が得られたことになる。弦理論を特殊相対性理論の範囲で考えているにも関わらず, 重力場の量子状態が現れていることに注意する。

参考文献

- [1] F. マンドル, G. ショー, 2013, 場の量子論 第2巻 素粒子の相互作用 (樺沢宇紀訳), 丸善プラネット株式会社, 東京.
- [2] エリ・デ・ランダウ, イェ・エム・リフシッツ, 2015, ランダウ=リフシッツ理論物理学教程 場の古典論 (原書第6版)(恒藤敏彦, 広重徹訳), 東京図書株式会社, 東京.
- [3] シュッツ, 2010, 第2版シュッツ 相対論入門 (江里口良治, 二間瀬敏史訳), 丸善株式会社, 東京.
- [4] 内山龍雄, 2014, 相対性理論 物理テキストシリーズ 8, 株式会社岩波書店, 東京.
- [5] 山本義隆, 中村孔一, 2013, 朝倉物理学大系 1 解析力学 I, 株式会社朝倉書店, 東京.
- [6] F. マンドル, G. ショー, 2011, 場の量子論 第1巻 量子電磁力学 (樺沢宇紀訳), 丸善プラネット株式会社, 東京.
- [7] J.J.Sakurai, 2017, 現代の量子力学 (上)(桜井明夫訳), 株式会社吉岡書店, 京都.