物理数学に関する雑多な考察

目次

本稿の他にも理論物理の各種ノートを以下のページで公開している.

http://everything-arises-from-the-principle-of-physics.com/

1　トランプのカードを用い，和の順序交換を視覚化する

■Einstein の規約　3 つの添字 i, j, k を持つ量 $A_{ijk}B_{ijk}$ に対し

$$\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} A_{ijk}B_{ijk}$$

を考えると，これはまず k について和をとり，次いで j について和をとり，最後に i について和をとることを意味する．ところが 2 度以上現れる添字については和をとるという Einstein の規約を適用してこれを単に

$$A_{ijk}B_{ijk}$$

と書くと，どの添字から順に和をとるかという情報が失われる．よってこのような表現が意味を持つためには，どの添字から和をとるかによって計算結果が変わらないことが必要である．

■和の順序交換　実際に和をとる順序によって計算結果は変わらないためには，2 重和の順序交換

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} A_{ij}$$

が可能であれば十分である．これが正しいことは，A_{ij} を行列のように

$$\begin{matrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & \dots & A_{mn} \end{matrix}$$

と並べると理解できる．すなわち

- 最初に j 列目の成分の和 $\sum_{i=1}^{m} A_{ij}$ を計算し，次いでこれを各列 j について足し合わせても，
- 最初に i 行目の成分の和 $\sum_{j=1}^{n} A_{ij}$ を計算し，次いでこれを各行 i について足し合わせても，

上に書き出した全成分 A_{ij} の合計値が得られる．

成分 A_{ij} を絵柄が i，数字が j のトランプのカードと考えると，図 1 のようにこのことは，

- 最初に各数字 j ごとにカードの束を作ってから，それらの束を集めても，
- 最初に各絵柄 i ごとにカードの束を作ってから，それらの束を集めても，

全てのカードを回収できることとしてイメージできる:

$$\sum_{i=\spadesuit}^{\diamondsuit}\sum_{j=1}^{13} A_{ij} = \sum_{j=1}^{13}\sum_{i=\spadesuit}^{\diamondsuit} A_{ij}.$$

2　直交変換

2.1　直交変換と反変ベクトル成分の変換則

原点を共有する 2 つの直交座標系を考え，それぞれの基底を $\{\boldsymbol{e}_i\}, \{\boldsymbol{e}_i{}'\}$ と書く．また，共通の位置ベクトル $\boldsymbol{x}$ で表される，空間に与えられた同一点をそれぞれの座標系で見たときの座標を $x_i, x'{}_i$ と書く．このとき

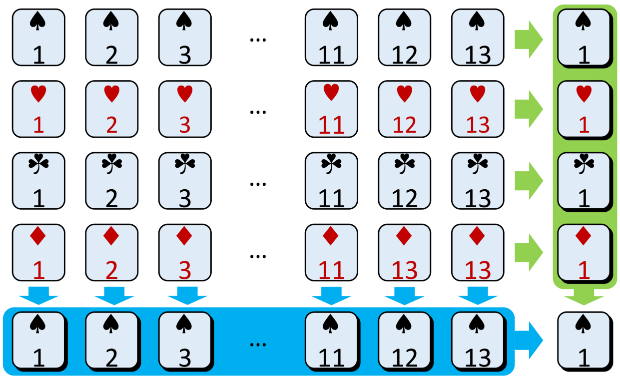

図 1　トランプを回収する 2 通りの方法

$a_{ij} \equiv \boldsymbol{e}_i{}' \cdot \boldsymbol{e}_j$ として座標 x_i と基底 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ は共通の変換則

$$x'_i = \sum_j a_{ij} x_j, \qquad \boldsymbol{e}_i{}' = \sum_j a_{ij} \boldsymbol{e}_j \tag{1}$$

に従う (第 2.4 節参照).

第 1 式を x_k で微分すると

$$\frac{\partial x'_i}{\partial x_k} = \sum_j a_{ij} \delta_{jk} = a_{ik} \equiv \boldsymbol{e}_i{}' \cdot \boldsymbol{e}_k \tag{2}$$

となる．これは次のことを意味する．

- 線形変換 $x'_i = \sum_j a_{ij} x_j$ の変換係数 a_{ij} が作る行列

$$O \equiv (a_{ij}) = \left(\frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \right)$$

  は Jacobi 行列に他ならない．
- 変換則 (1) は反変ベクトル成分の変換則に他ならない [1, pp.256–257] [2, pp.126–127].
  - 微分演算子 $\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}$ は共変ベクトルだから (第 2.4 節参照),
    基底ベクトル $\boldsymbol{e}_i = \partial_i \boldsymbol{x}$ もまた共変ベクトルとなるはずである [3, pp.26–27].
    しかし第 2.2 節で見るように，直交座標系を用いる限り反変ベクトル成分の変換則は,
    共変ベクトル成分の変換則に一致してしまう．
  - このことは次の能動変換と受動変換の関係と何ら矛盾しない．
    すなわち基底にある変換をすると,
    座標系に固定した視点からは空間に固定したベクトルがその逆変換で移されて見える．
    - (例 1) 駅に向かう者にとっては，逆に駅が自分の方に近づいて来るように見える．
    - (例 2) 回転する椅子に座ると，周りの風景が逆回転して見える．

なお，上式 (2) で 2 つの座標系の役割を入れ替えた式

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j{}' = \frac{\partial x_i}{\partial x'_j} \tag{3}$$

が成り立つ．

2.2　直交変換に対する Newton の運動方程式の共変性

物理法則を両辺が同じ種類のテンソルで書かれた方程式で表せば，これは座標変換に対して形を変えず共変性の要請を満たす [2, pp.53–54]．ここで Newton の運動方程式の共変性を取り上げよう．ポテンシャル V を持つ保存力場の下で運動する質量 m の粒子に対し，Newton の運動方程式は

$$m\ddot{x}_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \tag{4}$$

である．この式の左辺は反変ベクトル成分であるのに対し，右辺は共変ベクトル成分である (第 2.4 節参照)．従ってこれが一般の座標変換に対して共変的であることは保証されない．しかし用いる座標系を直交座標系に限れば，運動方程式 (4) は形を変えないと考えられる．実際このとき，式 (2)，式 (3) より

$$\frac{\partial {x'}_j}{\partial x_i} = {\boldsymbol{e}_j}' \cdot \boldsymbol{e}_i = \frac{\partial x_i}{\partial {x'}_j} \tag{5}$$

なので，反変ベクトル成分の変換則は，共変ベクトル成分の変換則に一致してしまう:

$${x'}_i = \sum_j \frac{\partial {x'}_i}{\partial x_j} x_j = \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial {x'}_i} x_j.$$

このため運動方程式 (4) の両辺は同じ変換則に従い，新しい座標系でも式 (4) の形の運動方程式

$$m\ddot{x}'_i = -\frac{\partial V}{\partial {x'}_i}$$

が成り立つことになる．なお，上式 (5) は行列 O が直交行列であること

$$(O^T)_{ij} = (O^{-1})_{ij}$$

を意味している．

2.3　主軸変換とテンソルの変換則

慣性テンソル I_{ij} を (i,j) 成分に持つ行列 $I = (I_{ij})$ を考えるとこれは対称行列なので，適当な直交行列 O を用いて

$$I' = OIO^{-1}$$

と対角化できる．これは適当な座標系において $I = (I_{ij})$ が対角行列となることを意味する．実際，座標変換 ${x'}_i = \sum_j a_{ij} x_j$ における変換係数の成す行列

$$O \equiv (a_{ij}) = \left(\frac{\partial {x'}_i}{\partial x_j} \right)$$

を用い，2 階テンソルの変換則は

$$I' = OIO^{-1}$$

と書ける．ここで式 (5) により，$(2,0), (1,1), (0,2)$ テンソルの変換則が一致することを思い出そう．

2.4 直交変換 (補足)

座標 x_i と基底 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ の変換則 (1) は次のように確かめられる．

$$\boldsymbol{e}_i{}' = \sum_j (\boldsymbol{e}_i{}' \cdot \boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{e}_j = \sum_j a_{ij}\boldsymbol{e}_j,$$
$$\boldsymbol{x} = \sum_j x_j \boldsymbol{e}_j = \sum_{i,j} x_j(\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_i{}')\boldsymbol{e}_i{}', \qquad \therefore x'_i = \sum_j (\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_i{}')x_j = \sum_j a_{ij}x_j$$

運動方程式 (4) の両辺の変換則について，以下の量は数学的に変換則が定まっている [3, pp,26–27].

$$\text{座標の微分 } \mathrm{d}x_i \text{は反変ベクトル：} \qquad \mathrm{d}x'_i = \sum_j \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} x_j \quad \Leftarrow \quad \text{全微分}$$
$$\text{微分演算子} \partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} \text{は共変ベクトル：} \qquad \partial_i{}' = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i}\partial_j \quad \Leftarrow \quad \text{合成関数の微分}$$

3 $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$ について

Kronecker のデルタと Levi-Civita 記号に対する公式

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \tag{6}$$

は

$$\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{prs} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{ir} & \delta_{is} \\ \delta_{kp} & \delta_{kr} & \delta_{ks} \\ \delta_{lp} & \delta_{lr} & \delta_{ls} \end{vmatrix} \tag{7}$$

から得られる．

この式 (7) を確かめるには，次のことに気付けば良い．まず式 (7) 左辺は添字 i, k, l および p, r, s について反対称である．一方，行列の行の入れ替えと列の入れ替えに対して行列式は符号を変えるから，式 (7) 右辺もまた添字 i, k, l および p, r, s について反対称である．よって相異なる添字のある組 i, k, l および p, r, s に対して式 (7) が成り立っていることを確かめれば，任意の添字の組 i, k, l および p, r, s に対して式 (7) が成り立つことになる．そこで例えば $(i, k, l) = (p, r, s) = (1, 2, 3)$ とすると

$$\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{prs} = 1 \times 1 = 1, \qquad \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{ir} & \delta_{is} \\ \delta_{kp} & \delta_{kr} & \delta_{ks} \\ \delta_{lp} & \delta_{lr} & \delta_{ls} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

だから成り立っている．

あるいは等価的に次のように説明することもできる．式 (7) の右辺は 3 次の単位行列 I の行や列を入れ替えて得られる行列の行列式である．ところが行列式は行や列を入れ替えるたびに符号が入れ替わるから，

$$\begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{ir} & \delta_{is} \\ \delta_{kp} & \delta_{kr} & \delta_{ks} \\ \delta_{lp} & \delta_{lr} & \delta_{ls} \end{vmatrix} = \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{prs}|I| = \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{prs}.$$

■$\boldsymbol{\nabla}$ の公式への応用　以下に挙げる $\boldsymbol{\nabla}$ の公式を証明しよう．

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a})-\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{b}) \tag{8}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b} \tag{9}$$

$$\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{b})+\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a}) \tag{10}$$

式 (9)，式 (10) を証明するのに公式 (6) が有用である:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) =&\partial_i\varepsilon_{i\alpha\beta}a_\alpha b_\beta\\
=&\varepsilon_{i\alpha\beta}b_\beta\partial_i a_\alpha+a_\alpha\varepsilon_{i\alpha\beta}\partial_i b_\beta\\
=&\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a})-\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{b}):(8),\qquad(\because\varepsilon_{i\alpha\beta}=-\varepsilon_{\alpha i\beta})\\
(\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}))_i =&\varepsilon_{irs}\partial_r\varepsilon_{s\alpha\beta}a_\alpha b_\beta\\
=&(\delta_{i\alpha}\delta_{r\beta}-\delta_{i\beta}\delta_{r\alpha})\partial_r a_\alpha b_\beta\\
=&b_\beta\partial_\beta a_i+a_i\partial_\beta b_\beta-a_\alpha\partial_\alpha b_i-b_i\partial_\alpha a_\alpha\\
=&((\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b})_i:(9),\\
&[(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{b})]_i\\
=&a_j\partial_j b_i+b_j\partial_j a_i+\varepsilon_{i\alpha\beta}b_\alpha\varepsilon_{\beta rs}\partial_r a_s+\varepsilon_{i\alpha\beta}a_\alpha\varepsilon_{\beta rs}\partial_r b_s\\
=&a_j\partial_j b_i+b_j\partial_j a_i+(\delta_{ir}\delta_{\alpha s}-\delta_{is}\delta_{\alpha r})b_\alpha\partial_r a_s+(\delta_{ir}\delta_{\alpha s}-\delta_{is}\delta_{\alpha r})a_\alpha\partial_r b_s\\
=&b_\alpha\partial_i a_\alpha+a_\alpha\partial_i b_\alpha+(a_j\partial_j b_i-a_\alpha\partial_\alpha b_i)+(b_j\partial_j a_i-b_\alpha\partial_\alpha a_i)\\
=&\partial_i a_\alpha b_\alpha=[\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})]_i:(10).
\end{aligned}$$

4　近似式

4.1　落雷地点までの距離を求める近似式

雷の光を見てから音を聞くまでの時間から，落雷地点までの距離を求めることを考えよう．時刻 $t=0$ に距離 L だけ離れた地点に雷が落ち，時刻 $t=t_1$ に光が，時刻 $t=t_2$ に音が届いたとする．光速を c，音速を V と書くと

$$L=ct_1=Vt_2$$

なので，光を見てから音を聞くまでの時間は

$$\Delta t\equiv t_2-t_1=L\left(\frac{1}{V}-\frac{1}{c}\right)$$

と表される．よって時間差 Δt から落雷地点までの距離が

$$L=\frac{\Delta t}{\frac{1}{V}-\frac{1}{c}}=V\Delta t\frac{1}{1-\frac{V}{c}} \tag{11}$$

と求まる．

今，音速 V が光速 c に比べて小さいこと

$$\frac{V}{c}\simeq\frac{3\times10^2\mathrm{m/s}}{3\times10^8\mathrm{m/s}}\sim10^{-6}$$

に注目して距離 L を求める近似式を作ると

$$L = V\Delta t\left\{1 + \frac{V}{c} + \left(\frac{V}{c}\right)^2 + \cdots\right\} \simeq V\Delta t$$

を得る．これは光が一瞬で伝わると考え，Δt を音の伝播時間 L/V と見なすことに他ならない．実際，式 (11) において $c \to \infty$ とすると $L \to V\Delta t$ となる．

4.2 Feynman による 3 乗根の近似計算

Feynman はそろばんの使い手と計算の速さを競い合い，1729.03 の 3 乗根を求める問題で近似計算を用いて圧勝した [4]．その計算方法を数式に起こしてみよう．

近似計算を行うには，答の大まかな値をあらかじめ知っている必要がある．今，1 立方フィートは 1728 立方インチであることに注目しよう．これは $12^3 = 1728$ を意味する:

$$1\ \mathrm{ft}^3 = (12\ \mathrm{in})^3 = 1728\ \mathrm{in}^3, \qquad \therefore 12^3 = 1728.$$

1728 は 1729.03 に 1.03 だけ足りない．そこで $(1729.03)^{1/3} \simeq 12$ を第 0 近似として 1.03 について補正すると

$$\begin{aligned}(1729.03)^{1/3} =& (1728 + 1.03)^{1/3} = 12 \times \left(1 + \frac{1.03}{1728}\right) \simeq 12 \times \left(1 + \frac{1}{1728}\right)\\ \simeq& 12 \times \left(1 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{1728}\right) = 12.002\cdots\end{aligned}$$

となる．

4.3 トイレットペーパーの弧長の近似計算

『たけしのコマ大数学科』第 10 回 (2006 年 6 月 22 日放送) では次のような問題が扱われた．

> 芯の直径が $2a$ =4cm の，直径 $2b$ =11cm のトイレットペーパーの全長が $L = 6 \times 10^3$cm のとき，このトイレットペーパーの巻き数を見積もれ．

ここではトイレットペーパーのロールの断面が図 2 のような螺旋

$$r = A\theta + \mathrm{const}, \qquad (0 \leq \theta \leq \theta_{\max}) \tag{12}$$

を描くと仮定し，ロールの 1 周が円に近いことに着目した近似計算を行い，巻き数を求めよう．

螺旋 (12) は点 $(r, \theta) = (a, 0), (b, \theta_{\max})$ を通るので $\mathrm{const} = a$ と定まり，

$$r = A\theta + a, \qquad b = A\theta_{\max} + a$$

を得る．全長 L に対する条件から未知数 A を定めれば，ここからトイレットペーパーの巻き数

$$N = \frac{\theta_{\max}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\frac{b - a}{A} \tag{13}$$

が求まる．

螺旋上の線要素は

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}r^2 + (r\mathrm{d}\theta)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{r}{A}\right)^2}\mathrm{d}r \qquad (\because \mathrm{d}r = A\mathrm{d}\theta)$$

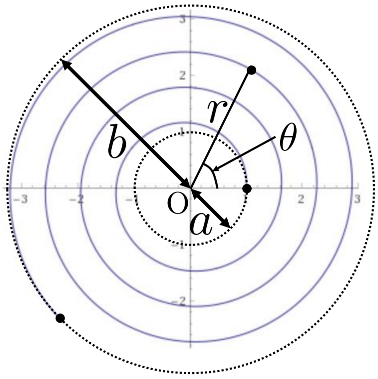

図2　トイレットペーパーのロールが描く螺旋

なので全長は

$$L = \int_0^{\theta_{\max}} \sqrt{1+\left(\frac{r}{A}\right)^2}\mathrm{d}r$$

と表される．この積分は $r/A = \sinh\phi$ と変数変換すると実行できる．ここではトイレットペーパーにおいて螺旋の 1 周はほぼ円であること，すなわち

$$\frac{r}{A} \ll 1$$

と考えられることに注目して

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1+\left(\frac{r}{A}\right)^2}\mathrm{d}r = \frac{r}{A}\sqrt{1+\left(\frac{A}{r}\right)^2}\,\mathrm{d}r \simeq \frac{r}{A}\mathrm{d}r$$

と近似する．すると

$$L \simeq \frac{b^2-a^2}{2A}$$

となるので巻き数 (13) が

$$\begin{aligned} N \simeq& \frac{L}{\pi(a+b)} \\ =& \frac{6\times10^3\ \mathrm{cm}}{\pi\times7.5\ \mathrm{cm}} \simeq 255 \end{aligned} \tag{14}$$

と求まる．

なお上式 (14) は，ロールの 1 周の平均的な長さ $2\pi\times\frac{a+b}{2} = \pi(a+b)$ で全長 L を割ると巻き数 N が得られることを意味している．

4.4　近接した 2 点までの距離の差の近似式 ($\frac{\partial R}{\partial x} = \cos\phi, \frac{\partial\phi}{\partial x} = -\frac{\sin\phi}{R}$ の図形的解釈)

図 3 のように近接した 2 点 A,B をとり，原点からの距離 $\overline{\mathrm{OA}}, \overline{\mathrm{OB}}$ の差 $\Delta R = \overline{\mathrm{BC}}$ を考える．距離 $\overline{\mathrm{BC}}$ を近似的に距離 $\overline{\mathrm{BC'}}$ で置き換えたときの誤差は

$$\overline{\mathrm{CC'}} = \overline{\mathrm{OC}} - \overline{\mathrm{OC'}} = R(1-\cos\Delta\phi) = O(\Delta\phi^2)$$

なので，$\Delta\phi$ の 1 次までの近似で

$$\Delta R \simeq \overline{\mathrm{BC'}} = \Delta x\cos\phi$$

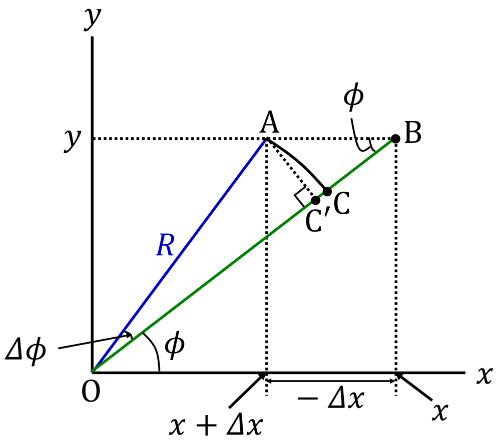

図 3　$\frac{\partial R}{\partial x} = \cos\phi$ の図形的解釈

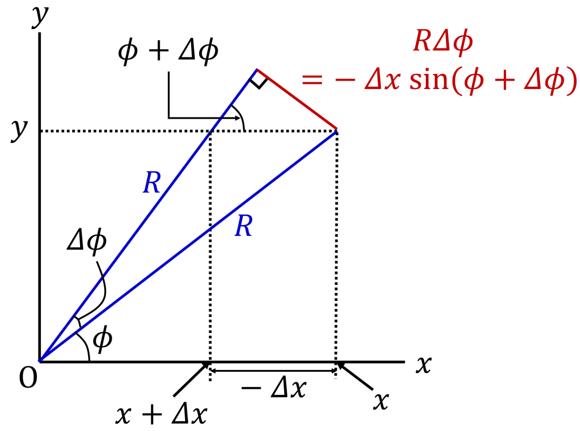

図 4　$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\sin\phi}{R}$ の図形的解釈

が成り立つ．またこれは

$$\begin{aligned}\frac{\partial R}{\partial x} =& \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ =& \frac{x}{R} = \cos\phi\end{aligned}$$

の図形的解釈となっている．

さらに図 4 において，$\Delta x, \Delta\phi$ の 1 次までの近似で赤い円弧の長さは

$$R\Delta\phi = -\Delta x \sin\phi$$

で与えられる．これは

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\arctan\frac{y}{x} = \frac{1}{1+(y/x)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{\sin\phi}{R}$$

の図形的解釈となっている．

5　微小変化の視覚化

5.1　Leibniz ルール

図 5 のように縦の長さを f，横の長さを g とする長方形を考えると，その微小変化 $\Delta f, \Delta g$ に伴う長方形の面積 fg の変化量は

$$\Delta(fg) \simeq \Delta f \times g + f \times \Delta g \tag{15}$$

となっていることが図 5 から読み取れる．特に辺の長さ f, g が時刻 t の関数である場合，長さの変化 $\Delta f, \Delta g$ を時間変化 Δt に伴うものと見なすと

$$\begin{aligned}\Delta f =& f'\Delta t + O(\Delta t^2), \\ \Delta g =& g'\Delta t + O(\Delta t^2)\end{aligned}$$

なので Leibniz ルールが

$$\Delta(fg) = (f'g + fg')\Delta t + O(\Delta t^2), \qquad \therefore (fg)' = f'g + fg' \tag{16}$$

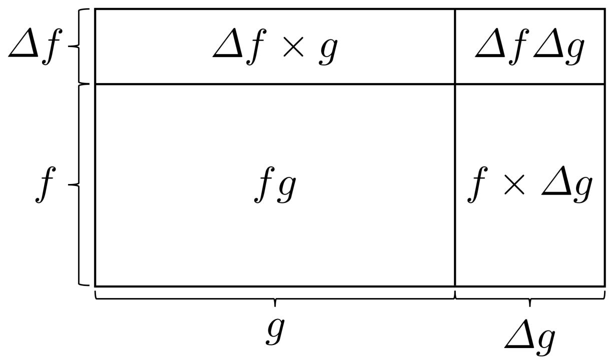

図 5　長方形の面積 fg の微小変化

と説明される．

さらに長方形が一辺 t の正方形である場合を考えれば，これは

$$\mathrm{d}(t^2) = 2t\mathrm{d}t, \qquad (t^2)' = 2t$$

の図形的解釈になっている．同様に一辺 t の立方体の体積変化を考えれば

$$\mathrm{d}(t^3) = 3t^2\mathrm{d}t, \qquad (t^3)' = 3t^2$$

を得る．

■一般的な注意　ここでは微小量 $\Delta f, \Delta g$ がどれだけ小さな量であるかを問題にしていない．実際，面積変化の式 (15) は $\Delta f, \Delta g$ が単に微小であれば成り立つものである．従って長さの変化 $\Delta f, \Delta g$ を特に微小時間 Δt の経過に伴う変化量と考えることが可能となり，Leibniz ルール (16) が導かれた．そしてここでは微小量 $\Delta f, \Delta g$ がどれだけ小さな量であるかということよりもむしろ，$\Delta f, \Delta g$ は微小時間 Δt の間の f, g の変化量であるという微小量の間の関係が重要であることが分かる．

5.2　球座標系での線要素，面積要素，体積要素の表式

図 6 のように，球座標 r, θ, ϕ がそれぞれ $\mathrm{d}r, \mathrm{d}\theta, \mathrm{d}\phi$ 変化して作られる領域を考える．球座標 r, θ, ϕ が増大する 3 方向は互いに直交するから，これは 3 辺が $\mathrm{d}r, r\mathrm{d}\theta, r\sin\theta\mathrm{d}\phi$ の直方体と見なせる．よって図 6 の線要素 $\mathrm{d}l$，面積要素 $\mathrm{d}S$，体積要素 $\mathrm{d}V$ はそれぞれ

$$\begin{aligned}\mathrm{d}l^2 =& \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2,\\ \mathrm{d}S =& r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi,\\ \mathrm{d}V =& r^2\sin\theta\mathrm{r}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\end{aligned}$$

と表される．

特に $\mathrm{d}r, \mathrm{d}\theta, \mathrm{d}\phi$ を無限小時間 $\mathrm{d}t$ における粒子の座標変化と見なせば，粒子の質量を m として球座標で表した運動エネルギーの表式

$$T = \frac{1}{2}m\{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + (r\sin\theta\dot{\phi})^2\}$$

を書き下せる．

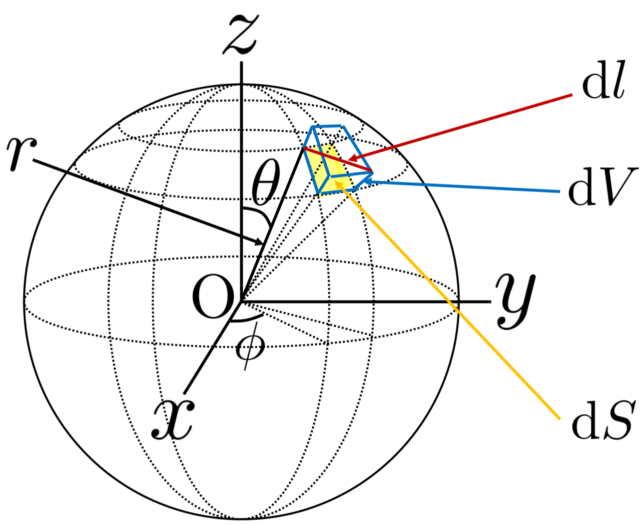

図 6　球座標 r, θ, ϕ がそれぞれ $\mathrm{d}r, \mathrm{d}\theta, \mathrm{d}\phi$ 変化して作られる直方体

6　次元解析

- 三角関数，指数関数の引数は無次元量である．
  - $x = 0, L$ を固定端とする x 軸上の場 $u(x) = \sum_k a_k \sin(kx)$ に対して，境界条件から許される波数は $k = \frac{\pi}{L} n$ である $(n = 0, 1, 2, \cdots)$．
    - 直感的には const を無次元量として

$$k = \mathrm{const} \times \frac{1}{L}$$

      とおくと，位相 kx が無次元量であることが保証される．
      境界条件 $u(L) = 0$ から $\mathrm{const} = \pi n$ と定まる．
  - 例えば Planck 定数 h，作用 S，運動量 $\boldsymbol{p}$，位置ベクトル $\boldsymbol{r}$，エネルギー E，時刻 t，角運動量 $\boldsymbol{J}$ に対して

$$[h] = [S] = [Et] = [\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{r}] = [\boldsymbol{J}]$$

    なので，

$$e^{iS/\hbar}, e^{i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r} - Et)/\hbar}, e^{i\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{n}\phi/\hbar}$$

    といった表現において位相は確かに無次元である ($\boldsymbol{n}$ は単位ベクトル，ϕ は角度を表す)．
- log の真数は本来，無次元量である．
  - しかし真数 A が無次元量であっても，次元を持つ量 B, C(ただし $A = BC$) を用いて

$$\log A = \log B + \log C$$

    とできる．
    逆に言えば，これを用いていつでも真数を無次元化できる．
  - $\mathrm{pH} = -\log_{10}[\mathrm{H}^+]$ における真数は正確には，水素イオン濃度 $[\mathrm{H}^+]$ を 1mol/L で割った無次元量である．

- デルタ関数 $\delta(x)$ は引数 x の逆数の次元を持つ:

$$[\delta(x)] = \frac{1}{[x]}.$$

  - これは

$$\int \delta(x)\mathrm{d}x = 1, \qquad \therefore [\delta(x)][\mathrm{d}x] = 1$$

    による．

■Gauss 積分等の次元解析 Gauss 積分とそれに類似の積分

$$I \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \qquad J \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\alpha^{-3/2}$$

を考えよう．以下のように次元解析を行うと，

$$I \propto \alpha^{-1/2}, \qquad J \propto \alpha^{-3/2}$$

であることが期待される．例えば x に長さの次元を与えると，指数関数 $e^{-\alpha x^2}$ の引数が無次元量でなければならないことから

$$[\alpha] = [x]^{-2}$$

が結論され，

$$[I] = [x] = [\alpha]^{-1/2}, \qquad [J] = [x]^3 = [\alpha]^{-3/2}$$

を得る．

7 $\int_0^{2L} \sin^2\left(n\pi\frac{x}{L}\right)\mathrm{d}x = L$ のイメージ

$y = \sin\left(n\pi\frac{x}{L}\right)$ のグラフは図 7 の青い曲線のようである (ただし図は $n = 3$ として描いている)．$\sin^2 x \leq |\sin x|$ に注意して $y = \sin^2\left(n\pi\frac{x}{L}\right)$ のグラフを描くと，図 7 の赤い曲線のようになる．ここから以下のことが読み取れる．

- 半角公式

$$\sin^2\left(n\pi\frac{x}{L}\right) = \frac{1-\cos\left(2n\pi\frac{x}{L}\right)}{2}. \tag{17}$$

- $y = \sin^2\left(n\pi\frac{x}{L}\right)$ の平均

$$\overline{\sin^2\left(n\pi\frac{x}{L}\right)} \equiv \frac{1}{2L}\int_0^{2L} \sin^2\left(n\pi\frac{x}{L}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

  または三角関数の直交性に関する式

$$\int_0^{2L} \sin^2\left(n\pi\frac{x}{L}\right)\mathrm{d}x = L.$$

  - ここで左辺が図 7 の緑の長方形の面積 $\frac{1}{2} \times 2L = L$ であることを考えた．

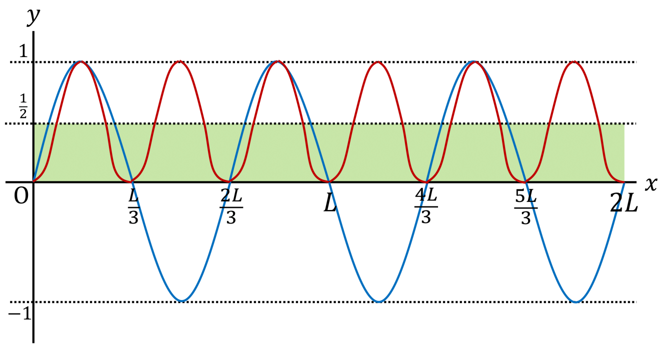

図 7　$y=\sin\left(n\pi\frac{x}{L}\right), y=\sin^2\left(n\pi\frac{x}{L}\right)$ のグラフ．ただし $n=3$ として描いている．

– 実際この積分は半角公式 (17) を用いて

$$\int_0^{2L}\sin^2\left(n\pi\frac{x}{L}\right)\mathrm{d}x=\int_0^{2L}\frac{1-\cos\left(2n\pi\frac{x}{L}\right)}{2}\mathrm{d}x=L$$

と計算できる．この計算の意味は，被積分関数 $\sin^2\left(n\pi\frac{x}{L}\right)$ を平均の高さ $\frac{1}{2}$ とその周りの振動に分けたとき，振動を表す三角関数 $-\frac{1}{2}\cos\left(2n\pi\frac{x}{L}\right)$ の積分が消えて長方形の面積 $\frac{1}{2}\times 2L=L$ が得られるということに他ならない．

– なお，積分範囲を半分に減らしても

$$\int_0^{L}\sin^2\left(n\pi\frac{x}{L}\right)\mathrm{d}x=\frac{L}{2}$$

が成り立つ．

8　Cauchy の積分定理，完全微分方程式と渦無し場

■Cauchy の積分定理

- Cauchy-Riemann の方程式 [5, p.136]
  - 領域 D で定義された関数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ について，$u(x,y)$ と $v(x,y)$ が連続な偏導関数をもつとする．このとき，(複素) 関数 $f(z)$ が正則であるための必要十分条件は

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{18}$$

- Cauchy の積分定理 [5, p.160]

  単一閉曲線 C と C の内部を含む領域で正則な関数 $f(z)$ に対して

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=0$$

  となる．

以上は次のように解釈できる．複素積分

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \oint_C (u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y) + i\oint (v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y)$$

は 2 種類のベクトル場 $\boldsymbol{A} = (u, -v), \boldsymbol{B} = (v, u)$ の線積分から成る．ここで Cauchy-Riemann の方程式 (18) はベクトル場 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ が渦無し場であることを意味し，従ってこの周回積分はゼロになる [6].

■完全微分方程式　1 階微分方程式

$$P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y = 0 \tag{19}$$

は，左辺 $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ がある関数 $u(x, y)$ の全微分となっているとき完全微分方程式と呼ばれ，その一般解は

$$u(x, y) = \mathrm{const}$$

で与えられる．そして式 (19) が完全微分方程式であるための条件は

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

である [5, p.17].

以上は次のように解釈できる．式 (19) が完全微分方程式であれば，ベクトル場 (P, Q) の線積分 (終点を (x, y) とする) は経路によらず

$$\int (P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y) = u(x, y) + \mathrm{const}$$

となるはずである．これはベクトル場 (P, Q) に渦が無いこと

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

を意味する．

9　$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}$ 型の式変形

■2 階テンソルを対称テンソルと反対称テンソルに分ける　2 階テンソル T_{ij} は対称テンソル $T_{ij}^{(\mathrm{S})}$ と反対称テンソル $T_{ij}^{(\mathrm{A})}$ の和で書ける:

$$T_{ij} = T_{ij}^{(\mathrm{S})} + T_{ij}^{(\mathrm{A})}, \qquad T_{ij}^{(\mathrm{S})} \equiv \frac{T_{ij} + T_{ji}}{2} = T_{ji}^{(\mathrm{S})}, \qquad T_{ij}^{(\mathrm{A})} \equiv \frac{T_{ij} - T_{ji}}{2} = -T_{ji}^{(\mathrm{A})}.$$

例えば距離 $\delta\boldsymbol{r}$ 隔たる流体の 2 点における速度の差 $\delta\boldsymbol{v}$ を

$$\delta v_i = \partial_j v_i \delta x_j = \frac{1}{2}(e_{ij} + \omega_{ij})\delta x_j, \qquad e_{ij} \equiv \partial_i v_j + \partial_j v_i, \qquad \omega_{ij} \equiv \partial_i v_j - \partial_j v_i$$

と書くと，対称テンソル e_{ij} の寄与は流体の変形を，反対称テンソル ω_{ij} の寄与は流体の剛体的回転を表す．なお，e_{ij} は変形速度と呼ばれる [7, pp.30–34,pp.182–183].

■関数を偶関数と奇関数に分ける　(実数全体で定義された) 関数 $u(x)$ は偶関数 $u_{\mathrm{e}}(x)$ と奇関数 $u_{\mathrm{o}}(x)$ の和で書ける:

$$u(x) = u_{\mathrm{e}}(x), \qquad u_{\mathrm{e}}(x) \equiv \frac{u(x) + u(-x)}{2}, \qquad u_{\mathrm{o}}(x) \equiv \frac{u(x) - u(-x)}{2}.$$

特に $u(x) = e^x$ を考えると，これは

$$e^x = \cosh x + \sinh x$$

を与える．

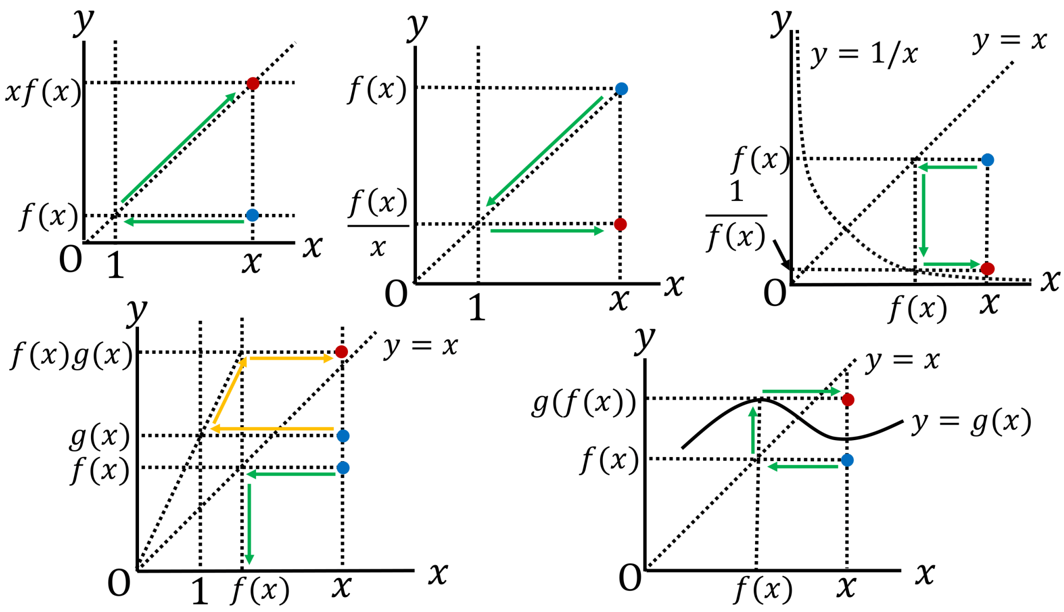

図 8　点 $(x, f(x))$(および点 $(x, g(x))$) から出発して，点 $(x, F(x))$ をプロットする方法

10　点 $(x, F(x))$ をプロットする

$y = f(x), y = g(x)$ のグラフが分かっているとき，

$$F(x) = xf(x), \quad \frac{f(x)}{x}, \quad \frac{1}{f(x)}, \quad f(x)g(x), \quad g(f(x))$$

のグラフを描くことを考える．図 8 のように $y = f(x)$ のグラフ上の点 $(x, f(x))$(および $y = g(x)$ のグラフ上の点 $(x, g(x))$) から出発して，$y = F(x)$ のグラフ上の点 $(x, F(x))$ をプロットすることができる．これを各 x に対して逐次繰り返せば，$y = F(x)$ のグラフ全体をイメージできる．

11　積分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ は「$f(x)$ の和」ではなく，「$f(x)\mathrm{d}x$ の和」

積分

$$I = \int f(x)\mathrm{d}x$$

は「$f(x)$ の和」ではなく，正確には「$f(x)\mathrm{d}x$ の和」である．「$f(x)$ の和」と「$f(x)\mathrm{d}x$ の和」では一般に，物理量としての次元が異なる．あらゆる x に対する $f(x)$ が I に寄与していると言うことはできる．そのように解釈される積分の現れる例を以下に列挙する．

- Green 関数 $G(t, t')$

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2\right) G(t, t') = \delta(t - t'), \qquad x(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{f(t')}{m} G(t - t')\mathrm{d}t' \\ \Rightarrow \quad &\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2\right) x(t) = \frac{f(t)}{m} \end{aligned}$$

- Huygens の原理 [1, pp.164–166]
  観測点 P における場
  $$u_{\mathrm{P}} = a\int \frac{ue^{ikR}}{R}\mathrm{d}f_n.$$
  – スクリーンの開口部分を覆う面の，面積素ベクトル $\mathrm{d}\boldsymbol{f}$ を持つ面積素を考える．
    面積素における場 u が距離 R 隔たる点 P に作る場は
    $$au\frac{e^{ikR}}{R}\mathrm{d}f_n$$
    と書ける．
    ここに $\mathrm{d}f_n$ は光源から面積素に向かう方向単位ベクトルを $\boldsymbol{n}$ として $\mathrm{d}f_n = \mathrm{d}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}$ である．
- 固有値が連続変数 ξ' となる場合の固有ケット $|\xi'\rangle$ による展開 [8, p.55]
  $$|\alpha\rangle = \int \mathrm{d}\xi' \, |\xi'\rangle \langle\xi'|\alpha\rangle .$$
- Feynman の経路積分 [8, p.163]
  $$\langle x_N, t_N | x_1, t_1\rangle = \int_{x_1}^{x_N} \mathcal{D}[x(t)]e^{iS[x(t)]/\hbar}.$$

11.1 Fourier 展開の波数空間体積素は何に由来するか

真空中の任意の電磁波はあらゆる波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ に対する平面波 $\boldsymbol{E}_0e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}\pm\omega_{\boldsymbol{k}}t)}, \boldsymbol{E}_0e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}\pm\omega_{\boldsymbol{k}}t)}$ を重ね合せて得られ ($\omega_{\boldsymbol{k}} \equiv c|\boldsymbol{k}|$),

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) &= \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\left(\boldsymbol{\mathcal{E}}_+(\boldsymbol{k})e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\omega_{\boldsymbol{k}}t)} + \boldsymbol{\mathcal{E}}_-(\boldsymbol{k})e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega_{\boldsymbol{k}}t)}\right),\\ \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) &= \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\left(\boldsymbol{\mathcal{B}}_+(\boldsymbol{k})e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\omega_{\boldsymbol{k}}t)} + \boldsymbol{\mathcal{B}}_-(\boldsymbol{k})e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega_{\boldsymbol{k}}t)}\right)\end{aligned} \tag{20}$$

と表される (第 11.2 節参照)．ただし振幅 $\boldsymbol{E}_0, \boldsymbol{B}_0$ と異なり，Fourier 成分 $\boldsymbol{\mathcal{E}}_\pm(\boldsymbol{k}), \boldsymbol{\mathcal{B}}_\pm(\boldsymbol{k})$ は (電磁場) × (長さ)^3 の次元を持つ．これは次の事情による．空間を 1 辺 L の立方体領域 V と見なすと周期境界条件の下で場は $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \sum_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{k},t)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}, \boldsymbol{k} = \frac{2\pi}{L}\boldsymbol{n}$ と Fourier 展開される ($\boldsymbol{n}$ は整数を成分とするベクトル)．$L\to\infty$ の極限で展開係数 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k},t)$ から波数空間の体積要素 d^3k がくくり出されて

$$\begin{array}{rc|c|c} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = & \displaystyle\sum_{\boldsymbol{k}} & \boldsymbol{E}(\boldsymbol{k},t) & e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = & \displaystyle\int & \dfrac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{k},t) & e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \end{array} \tag{21}$$

と積分に移行する (第 11.2 節参照)．

11.2 Fourier 展開 (補足)

電磁場の Fourier 展開 (20) を得るには任意の場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ を $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{k},t)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ と Fourier 展開し，展開係数 $\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{k},t)$ の時間依存性を波動方程式から

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = 0 \quad\to\quad \left\{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - (i\boldsymbol{k})^2\right\}\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{k},t) = 0 \quad\to\quad \boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{k},t) = \boldsymbol{\mathcal{E}}_+(\boldsymbol{k})e^{i\omega_{\boldsymbol{k}}t} + \boldsymbol{\mathcal{E}}_-(\boldsymbol{k})e^{-i\omega_{\boldsymbol{k}}t}$$

と定めれば良い．

Fourier 展開の積分への移行 (21) は展開係数を求める式

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k},t) =& \frac{1}{L^3}\int_V \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}^3x, \qquad \boldsymbol{k}=\frac{2\pi}{L}\boldsymbol{n},\\ \boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{k},t) =& \lim_{L\to\infty}\int_V \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}^3x \equiv \lim_{L\to\infty}\boldsymbol{\mathcal{E}}_V(\boldsymbol{k},t)\end{aligned}$$

を比較すると

$$\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{k}=\frac{2\pi}{L}\boldsymbol{n},t\right) = \frac{1}{L^3}\boldsymbol{\mathcal{E}}_V\left(\boldsymbol{k}=\frac{2\pi}{L}\boldsymbol{n},t\right) \to \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{k},t)$$

となることから分かる．

12 円偏光と床屋のサインポール

円偏光において電場 $\boldsymbol{E}$ と磁束密度 $\boldsymbol{B}$ は，座標系 (時間の原点を含めて) を適当に選ぶと

$$\boldsymbol{E} = a\begin{pmatrix}\cos(kz-\omega t)\\ \sin(kz-\omega t)\\ 0\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = a\begin{pmatrix}\cos\left(kz-\omega t+\frac{\pi}{2}\right)\\ \sin\left(kz-\omega t+\frac{\pi}{2}\right)\\ 0\end{pmatrix} \tag{22}$$

という形に表される [1, pp.130–131]．よって z 軸上の各点に分布する電磁場ベクトル $\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}$ の先端は図 9 のように常螺旋を描く．そしてベクトル $\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}$ は $z=\mathrm{const}$ の水平面内で回転する．この様子は床屋のサインポールに似ている．

床屋のサインポールでは赤と青の螺旋が中心軸の周りに回転しており，その結果として赤と青の縞模様が上昇していくように見える．x 軸正の方向をサインポールの正面とすると，より正確には図 9 に示した正面の中心線と，螺旋との交点が上昇する．すなわち正面方向の方位角は $\phi=0$ であり，常螺旋の式 (22) においてベクトルの指す方向の方位角が

$$kz-\omega t = \mathrm{const}(=0), \qquad kz-\omega t+\frac{\pi}{2} = \mathrm{const}(=0)$$

を満たすような座標 (高さ)z が時間とともに増大する．ここで上昇速度は

$$\dot{z} = \frac{\omega}{k}$$

であり，これは式 (22) の位相が一定となる条件から得られたものだから，位相速度と呼ばれるのはもっともである．

特に円偏光に対してはその時間発展 (22) が Maxwell 方程式に従うことから，上昇速度は

$$\frac{\omega}{k} = c$$

でなければならない．すなわち電磁波の位相速度は光速 c である．

13 積分変数の変換 $\mathrm{d}^nx \to |J|\mathrm{d}^nx'$ は $\mathrm{d}x'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\mathrm{d}x^j$ に対して $\mathrm{d}^nx = |J|\mathrm{d}^nx'$ を意味しない

積分変数を $\boldsymbol{x}$ から $\boldsymbol{x}'$ に変換するには，積分の中で

$$\mathrm{d}^nx \to |J|\mathrm{d}^nx', \qquad J \equiv \frac{\partial(\boldsymbol{x})}{\partial(\boldsymbol{x}')} : \mathrm{Jacobian}$$

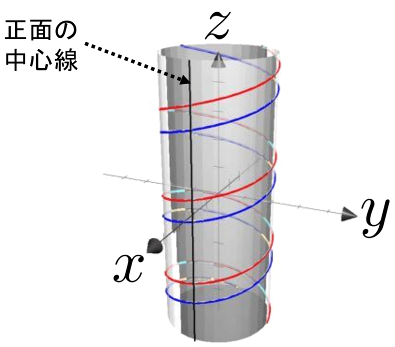

図 9　円偏光と床屋のサインポール

の置き換えをすれば良い．ただしこれは座標 x^i の変化 $\mathrm{d}x^i$ に伴う座標 x'^i の変化 $\mathrm{d}x'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\mathrm{d}x^j$ に対して

$$\mathrm{d}^n x = |J|\mathrm{d}^n x'$$

が成り立つことを意味するものではない．

実際に $\mathrm{d}^n x \neq |J|\mathrm{d}^n x'$ となる具体的な例を考えよう．無限小ベクトル $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = (1,1)\delta$ を考えると，これを対角線に持つ正方形の面積は $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \delta^2$ である．ここで $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ を原点周りに $\pi/6$ 回転したベクトルを $\mathrm{d}\boldsymbol{r'} = (\mathrm{d}x', \mathrm{d}y')$ とおくと

$$\mathrm{d}x' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\mathrm{d}y\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)\delta, \qquad \mathrm{d}y' = \left(\frac{1}{2}\mathrm{d}x + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{d}y\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\delta$$

より $\mathrm{d}\boldsymbol{r'}$ を対角線に持つ長方形の面積は

$$\mathrm{d}x'\mathrm{d}y' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\delta^2 = \frac{1}{2}\delta^2$$

であり，位置ベクトル $\boldsymbol{x} = (x, y)$ とこれを原点周りに $\pi/6$ 回転したベクトル $\boldsymbol{x'} = (x', y')$ に対して

$$J \equiv \frac{\partial(\boldsymbol{x})}{\partial(\boldsymbol{x'})} = 1$$

なので，

$$\mathrm{d}x'\mathrm{d}y' = \frac{1}{2}\delta^2 \neq \delta^2 = |J|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

である．

さらにこの点を踏まえて，図 10 に示した面積 1 の正方形 D を原点周りに $\pi/6$ 回転した正方形 D' の面積を求める問題を考える．もちろん，D' の面積は 1 である．$\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ を対角線に持つ面積 δ^2 の矩形で D を敷き詰められても，図 10 のように $\mathrm{d}\boldsymbol{r'}$ を対角線に持つ面積 $\frac{1}{2}\delta^2$ の青い矩形で D' を敷き詰められないことに対応して，D' の面積を

$$\begin{aligned}\int_{D'} |J|\mathrm{d}x'\mathrm{d}y' &= \int_D \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\mathrm{d}y\right)\left(\frac{1}{2}\mathrm{d}x + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{d}y\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 \mathrm{d}x + \frac{3}{4}\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 \mathrm{d}y - \frac{1}{4}\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 \mathrm{d}y - \frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^1 \mathrm{d}y = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

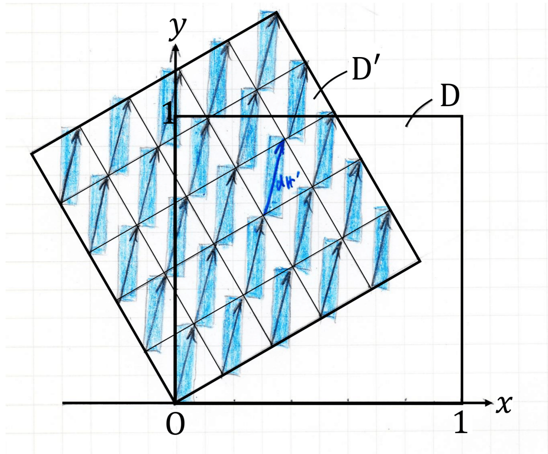

図 10　面積 1 の正方形 D と，これを原点周りに $\pi/6$ 回転した正方形 D'

と計算するとするのは誤りである．正しくは

$$\int_{D'} |J| \mathrm{d}x' \mathrm{d}y' = \int_0^1 \mathrm{d}x' \int_0^1 \mathrm{d}y' = 1$$

である．

14　微分形式に対する Stokes の定理の使い方

本章ではまず第 14.1 節で，微分形式と呼ばれる写像 ω に対する Stokes の定理

$$\int_D \mathrm{d}\omega = \int_{\partial D} \omega$$

の内容を理解するための説明を行う [3, pp.37–46,pp.67–76,pp.79–99]．そこで微分形式の積分

$$\int_A \omega \equiv \int_{\bar{A}} \left\langle \omega \,\middle|\, \frac{\partial}{\partial \xi^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial \xi^p} \right\rangle \mathrm{d}\xi^1 \cdots \mathrm{d}\xi^p$$

から，どのようにして無限小ベクトル $\mathrm{d}^{(1)}q, \cdots, \mathrm{d}^{(p)}q$ の張る面積要素

$$\begin{vmatrix} \mathrm{d}^{(1)}q^{i_1} & \cdots & \mathrm{d}^{(p)}q^{i_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathrm{d}^{(1)}q^{i_p} & \cdots & \mathrm{d}^{(p)}q^{i_p} \end{vmatrix}$$

が得られるかを明らかにする．Stokes の定理の証明は行わない．

続く節では Stokes の定理を用いて，以下に列挙する定理 [1, pp.22–24] [2, pp.79–99] [7, p.14] の証明を行う．

- Gauss の定理
  3 次元空間の領域 V と，面積素ベクトル $\mathrm{d}\boldsymbol{f}$ を持つその表面 ∂V に対して

$$\int_{\partial V} p \mathrm{d}\boldsymbol{f} = \int_V \boldsymbol{\nabla} p \mathrm{d}V. \tag{23}$$

- 4 次元空間における Stokes の定理

  4 次元空間に横たわる 2 次元の超曲面 S とその境界 $C = \partial S$ を考える．4 元ベクトル A_μ に対して

$$f_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

  を定義し，S を (ξ, ξ') でパラメトライズしたときの

$$\mathrm{d}x^\alpha \equiv \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi}\mathrm{d}\xi, \qquad \mathrm{d}x'^\alpha \equiv \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi'}\mathrm{d}\xi'$$

  に対して

$$\mathrm{d}\sigma^{\mu\nu} \equiv \begin{vmatrix} \mathrm{d}x^\mu & \mathrm{d}x'^\mu \\ \mathrm{d}x^\nu & \mathrm{d}x'^\nu \end{vmatrix}$$

  とおくと，$\sum'$ を $\mu < \nu$ の和として

$$\int_S \sum{}' f_{\mu\nu}\mathrm{d}\sigma^{\mu\nu} = \int_C A_\mu \mathrm{d}x^\mu. \tag{24}$$

- 4 次元空間における 3 次元的 Gauss の定理

  4 次元空間に横たわる 3 次元の超曲面 V とその境界 $S = \partial V$ を考える．反対称テンソル $A_{\mu\nu}$ に対して

$$F_{\lambda\mu\nu} \equiv \partial_\lambda A_{\mu\nu} + \partial_\mu A_{\nu\lambda} + \partial_\nu A_{\lambda\mu}$$

  を定義し，V を (ξ, ξ', ξ'') でパラメトライズしたときの

$$\mathrm{d}x^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi}\mathrm{d}\xi, \qquad \mathrm{d}x'^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi'}\mathrm{d}\xi', \qquad \mathrm{d}x''^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi''}\mathrm{d}\xi''$$

  に対して

$$\mathrm{d}v^{\lambda\mu\nu} \equiv \begin{vmatrix} \mathrm{d}x^\lambda & \mathrm{d}x'^\lambda & \mathrm{d}x''^\lambda \\ \mathrm{d}x^\mu & \mathrm{d}x'^\mu & \mathrm{d}x''^\mu \\ \mathrm{d}x^\nu & \mathrm{d}x'^\nu & \mathrm{d}x''^\nu \end{vmatrix}$$

  とおくと，$\sum''$ を $\lambda < \mu < \nu$ の和として

$$\int_V \sum{}'' F_{\lambda\mu\nu}\mathrm{d}v^{\lambda\mu\nu} = \int_S \sum{}' A_{\mu\nu}\mathrm{d}\sigma^{\mu\nu}. \tag{25}$$

  - これはデュアルテンソル

$$\mathrm{d}S_\mu \equiv -\frac{1}{3!}e_{\mu\nu\lambda\rho}\mathrm{d}v^{\nu\lambda\rho}, \qquad \mathrm{d}f^*_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2!}e_{\mu\nu\lambda\rho}\mathrm{d}\sigma^{\lambda\rho}, \qquad A^{*\lambda\rho} \equiv \frac{1}{2!}e^{\lambda\rho\mu\nu}A_{\mu\nu}$$

    を用いて

$$\frac{1}{2}\int_S A^{*\lambda\rho}\mathrm{d}f^*_{\lambda\rho} = \int_V \partial_\lambda A^{*\rho\lambda}\mathrm{d}S_\rho \tag{26}$$

    と書き換えられる．

- 4 次元的 Gauss の定理

  4 次元空間の領域 Ω とその境界 $V = \partial\Omega$ を考える．完全反対称テンソル $T_{\lambda\mu\nu}$ に対して

$$W_{\rho\lambda\mu\nu} \equiv \partial_\rho T_{\lambda\mu\nu} - \partial_\lambda T_{\mu\nu\rho} + \partial_\mu T_{\nu\rho\lambda} - \partial_\nu T_{\rho\lambda\mu}$$

  を定義すると，これも添字に関して完全反対称であり，4 次元空間の体積要素を $\mathrm{d}\Omega \equiv \mathrm{d}x^0 \cdots \mathrm{d}x^3$ と書くと $\sum'$ を $\lambda < \mu < \nu$ の和として

$$\int_\Omega W_{0123}\mathrm{d}\Omega = \int_V \sum{}' T_{\lambda\mu\nu}\mathrm{d}v^{\lambda\mu\nu}. \tag{27}$$

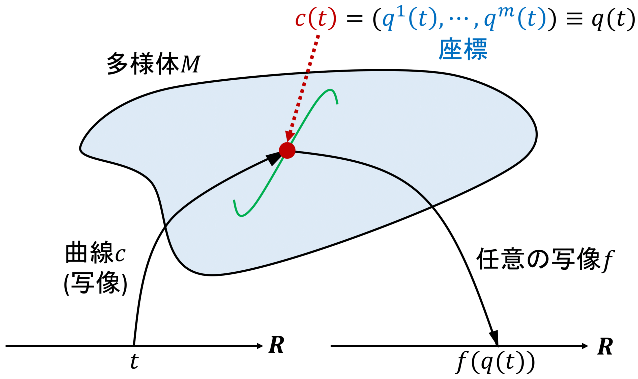

図 11　合成写像 $t \in \boldsymbol{R} \mapsto c(t) \in \mathrm{M} \mapsto f \circ c(t) \equiv f(c(t)) \in \boldsymbol{R}$

– これはデュアルテンソル

$$T^{*\rho} \equiv \frac{1}{3!} e^{\rho\lambda\mu\nu} T_{\lambda\mu\nu}, \qquad \mathrm{d}S_\rho \equiv -\frac{1}{3!} e_{\rho\lambda\mu\nu} \mathrm{d}v^{\lambda\mu\nu}$$

を用いて

$$\int_V T^{*\rho} \mathrm{d}S_\rho = \int_\Omega \partial_\rho T^{*\rho} \mathrm{d}\Omega \tag{28}$$

と書き換えられる．

14.1　微分形式に対する Stokes の定理

接ベクトル　多様体 M の各点における微分作用素 $v = v^i \partial_i$.

$$\text{図 11 の曲線 } c \text{ に沿った方向微分} \quad \frac{\mathrm{d}f(q(t))}{\mathrm{d}t} = \dot{q}^i \partial_i \qquad (\partial_i \equiv \partial/\partial q^i)$$

$$\to \quad \text{方向微分作用素 } v = \dot{q}^i \partial_i$$

$c(t)$ に応じて (つまり動点の運動に応じて)$\{\partial_i\}$ を基底とする様々な速度 $\{\dot{q}^i\}$ を持つ作用素 v が得られる．その全体が接空間を張る．

次に多様体の接空間に限らず，抽象的ベクトル空間 V を考える．その基底を $\{e_i\}$，元を $u_{(i)} = {u_{(i)}}^j e_j$ と書く．

p ベクトル　p 個のベクトル $u_{(1)}, \cdots, u_{(p)}$ を実数に対応させる写像のうち，引数となるベクトルについて

$$p \text{ 重線形：} \quad \omega^p[u_{(1)}, \cdots, au_{(i)} + bv_{(i)}, \cdots, u_{(p)}] = a\omega^p[u_{(1)}, \cdots, u_{(i)}, \cdots, u_{(p)}] + b\omega^p[u_{(1)}, \cdots, v_{(i)}, \cdots, u_{(p)}]$$

$$\text{歪対称：} \quad \omega^p[u_{(1)}, \cdots, u_{(i)}, \cdots, u_{(j)}, \cdots, u_{(p)}] = -\omega^p[u_{(1)}, \cdots, u_{(j)}, \cdots, u_{(i)}, \cdots, u_{(p)}]$$

となる ω^p のこと．

- 例えば 1 ベクトル ω は

$$\omega : V \to \boldsymbol{R} : u \in V \mapsto \omega[u] \in \boldsymbol{R}$$

  という線形写像．

- 特に 1 ベクトル $\mathcal{E}^i$ を，
$$\mathcal{E}^i[u^j e_j] = u^i$$
で定義しておく．これはベクトル $u = u^j e_j$ の第 i 成分 u^i を取り出す写像である．

1 ベクトル $\omega_{(1)}, \cdots, \omega_{(p)}$ から p ベクトルを構成することを考える．

テンソル積 $\omega_{(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{(p)}$

テンソル積 $\omega_{(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{(p)}$ を
$$(\omega_{(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{(p)})[u_{(1)}, \cdots, u_{(p)}] = \omega_{(1)}[u_{(1)}] \cdots \omega_{(p)}[u_{(p)}]$$
で定義する．

外積 $\omega_{(1)} \wedge \cdots \wedge \omega_{(p)}$

テンソル積 $\omega_{(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{(p)}$ を用いて外積 $\omega_{(1)} \wedge \cdots \wedge \omega_{(p)}$ を
$$(\omega_{(1)} \wedge \cdots \wedge \omega_{(p)})[u_{(1)}, \cdots, u_{(p)}] = \sum_\pi \mathrm{sgn}(\pi)(\omega_{(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{(p)})[u_{(\pi 1)}, \cdots, u_{(\pi p)}]$$
で定義する．ここに
$$\text{置換}\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & p \\ \pi 1 & \pi 2 & \cdots & \pi p \end{pmatrix}, \qquad \text{その符号 } \mathrm{sgn}(\pi) = \begin{cases} +1 & (\text{偶置換}) \\ -1 & (\text{奇置換}) \end{cases}$$
である．

これは行列式
$$\begin{vmatrix} \omega_{(1)}[u_{(1)}] & \cdots & \omega_{(1)}[u_{(p)}] \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \omega_{(p)}[u_{(1)}] & \cdots & \omega_{(p)}[u_{(p)}] \end{vmatrix}$$
であり，$u_{(1)}, \cdots, u_{(p)}$ について歪対称だから p ベクトルである．

また，ここから外積は $\omega_{(1)}, \cdots, \omega_{(p)}$ についても歪対称であることが分かる．

さらにこれは転置行列の行列式にも一致するから
$$\sum_\pi \mathrm{sgn}(\pi)(\omega_{(\pi 1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{(\pi p)})[u_{(1)}, \cdots, u_{(p)}]$$
とも書け，
$$\omega_{(1)} \wedge \cdots \wedge \omega_{(p)} = \sum_\pi \mathrm{sgn}(\pi)(\omega_{(\pi 1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{(\pi p)}).$$

p ベクトル ω^p が
$$\omega^p = \sum{}' a_{i_1 \cdots i_p} \mathcal{E}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathcal{E}^{i_p} \tag{29}$$
と展開されることを示す (ただし $\sum'$ は $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq \dim V$ の和)．$a_{i_1 \cdots i_p} \equiv \omega^p[e_{i_1}, \cdots, e_{i_p}]$ とおくと，これは添字に関して反対称である．
$$\begin{aligned} \omega^p[u_{(1)}, \cdots, u_{(p)}] =& \omega^p[e_{i_1}, \cdots, e_{i_p}] {u_{(1)}}^{i_1} \cdots {u_{(p)}}^{i_p} \qquad (\omega^p\text{の線形性}) \\ =& a_{i_1 \cdots i_p} \mathcal{E}^{i_1}[u_{(1)}] \cdots \mathcal{E}^{i_p}[u_{(p)}] \\ =& a_{i_1 \cdots i_p} \mathcal{E}^{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}^{i_p}[u_{(1)}, \cdots, u_{(p)}] \end{aligned}$$

なので，

$$\omega^p = a_{i_1\cdots i_p}\mathcal{E}^{i_1}\otimes\cdots\otimes\mathcal{E}^{i_p}$$

と書ける．よって

$$\begin{aligned}
\omega^p =& {\sum}' \sum_\pi a_{\pi i_1\cdots\pi i_p}\mathcal{E}^{\pi i_1}\otimes\cdots\otimes\mathcal{E}^{\pi i_p}\\
&(\text{ここで}{\textstyle\sum}'\text{で}\ 1\le i_1<\cdots<i_p\le\dim V\ \text{と大小関係を指定する代わりに，}\\
&\ \text{置換}\pi=\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_p\\ \pi i_1 & \pi i_2 & \cdots & \pi i_p\end{pmatrix}\text{で順序を混ぜている})\\
=& {\sum}' \sum_\pi \mathrm{sgn}(\pi) a_{i_1\cdots i_p}\mathcal{E}^{\pi i_1}\otimes\cdots\otimes\mathcal{E}^{\pi i_p}\qquad (a_{i_1\cdots i_p}\text{の反対称性})\\
=& {\sum}' a_{i_1\cdots i_p}\mathcal{E}^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathcal{E}^{i_p}.
\end{aligned}$$

V として多様体の接空間をとり p ベクトル $\omega^p = \sum' a_{i_1\cdots i_p}\mathcal{E}^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathcal{E}^{i_p}$ を考える．

微分 $\mathrm{d}f$　接ベクトル $v = v^i\partial_i$ に作用して方向微分 $v^i\partial_i f$ を与える 1 ベクトル (従って写像)

$$\mathrm{d}f[v] = v^i\partial_i f = (\partial_i f)\mathcal{E}^i[v], \qquad \therefore \mathrm{d}f = (\partial_i f)\mathcal{E}^i \tag{30}$$

を導入する．

$$q^j(q) = q^j$$

で定義される座標関数 q^j を f にとると，微分 $\mathrm{d}f$ の式 (30) に現れる $\partial_i f$ における $f(q) = q^j(q) = q^j$ は座標関数ではなく座標成分となることに注意して

$$\partial_i f = \delta_i^{\ j}, \qquad \therefore \mathrm{d}q^j = \mathcal{E}^j$$

を得る．

よって p ベクトルは

$$\omega^p = {\sum}' a_{i_1\cdots i_p}\mathrm{d}q^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}q^{i_p}$$

と表される．ω^p は多様体のある点 Q の接ベクトルに作用する (点 Q の接ベクトルを引数とする) 写像であることを明記するため，これを $(\omega^p)_{\mathrm{Q}}$ と書く．

p**(次微分) 形式** ω^p　多様体の各点で p ベクトル $(\omega^p)_{\mathrm{Q}}$ を与える“場”

$$\omega^p = {\sum}' a_{i_1\cdots i_p}\mathrm{d}q^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}q^{i_p}.$$

全微分 $\mathrm{d}f$　微分 $(\mathrm{d}f)_{\mathrm{Q}}$ の“場”である 1 形式 $\mathrm{d}f = (\partial_i f)\mathrm{d}q^i$．

座標関数の全微分は $\mathrm{d}\bar{q}^i = \frac{\partial\bar{q}^i}{\partial q^j}\mathrm{d}q^j$ より反変ベクトル成分の変換則に従うため，p 形式 $\sum' a_{i_1\cdots i_p}\mathrm{d}q^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}q^{i_p}$ が座標系に依らない意味を持つには $a_{i_1\cdots i_p}$ は p 階共変テンソルの変換則に従わなければならない．

外微分　p 形式

$$\omega = {\sum}' f_{i_1\cdots i_p}\mathrm{d}q^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}q^{i_p}$$

を外微分すると，$\mathrm{d}f_{i_1\cdots i_p}$ を $f_{i_1\cdots i_p}$ の全微分 (従って 1 形式) として $p+1$ 形式

$$\mathrm{d}\omega = {\sum}' \mathrm{d}f_{i_1\cdots i_p}\wedge\mathrm{d}q^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}q^{i_p}$$

を得る．

■微分形式の積分　以下では $\omega^p[u_{(1)},\cdots,u_{(p)}] \equiv \langle \omega^p | u_{(1)},\cdots,u_{(p)} \rangle$ という記法を用いる．多様体上の積分領域 A を $(\xi^1,\cdots,\xi^p)$ でパラメトライズし，領域 A に対応する $(\xi^1,\cdots,\xi^p)$ の範囲を $\bar{A}$ とする．このとき p 形式 ω^p の積分は

$$\int_A \omega^p \equiv \int_{\bar{A}} \left\langle \omega^p \,\middle|\, \frac{\partial}{\partial \xi^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial \xi^p} \right\rangle \mathrm{d}\xi^1 \cdots \mathrm{d}\xi^p$$

で定義される．ここで

$$\frac{\partial}{\partial \xi^j} = \frac{\partial q^k}{\partial \xi^j}\frac{\partial}{\partial q^k}, \qquad \therefore \mathrm{d}q^i \left[\frac{\partial}{\partial \xi^j}\right] = \mathcal{E}^i \left[\frac{\partial q^k}{\partial \xi^j}\frac{\partial}{\partial q^k}\right] = \frac{\partial q^i}{\partial \xi^j}$$

なので

$$\begin{aligned}
\left\langle \omega^p \,\middle|\, \frac{\partial}{\partial \xi^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial \xi^p} \right\rangle =& \sum{}' f_{i_1\cdots i_p} \left\langle \mathrm{d}q^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q^{i_p} \,\middle|\, \frac{\partial}{\partial \xi^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial \xi^p} \right\rangle \\
=& \sum{}' f_{i_1\cdots i_p} \begin{vmatrix} \mathrm{d}q^{i_1}[\partial/\partial\xi^1] & \cdots & \mathrm{d}q^{i_1}[\partial/\partial\xi^p] \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathrm{d}q^{i_p}[\partial/\partial\xi^1] & \cdots & \mathrm{d}q^{i_p}[\partial/\partial\xi^p] \end{vmatrix} \\
=& \sum{}' f_{i_1\cdots i_p} \frac{\partial(q^{i_1},\cdots,q^{i_p})}{\partial(\xi^1,\cdots,\xi^p)}, \\
\therefore \int_A \omega^p =& \int_{\bar{A}} \sum{}' f_{i_1\cdots i_p} \frac{\partial(q^{i_1},\cdots,q^{i_p})}{\partial(\xi^1,\cdots,\xi^p)} \mathrm{d}\xi^1 \cdots \mathrm{d}\xi^p
\end{aligned} \tag{31}$$

と書き換えられる．なお

$$\frac{\partial(q^{i_1},\cdots,q^{i_p})}{\partial(\xi^1,\cdots,\xi^p)} \mathrm{d}\xi^1 \cdots \mathrm{d}\xi^p \equiv \frac{\partial(q)}{\partial(\xi)}\mathrm{d}^p\xi = \frac{\partial(q)}{\partial(\xi)}\frac{\partial(\xi)}{\partial(\bar{\xi})}\mathrm{d}^p\bar{\xi} = \frac{\partial(q)}{\partial(\bar{\xi})}\mathrm{d}^p\bar{\xi}$$

より，この積分はパラメータ $(\xi^1,\cdots,\xi^p)$ の取り方に依らない．

■Stokes の定理　n 次元の領域 D と境界 ∂D に向きのつけられるとき，任意の $p \equiv (n-1)$ 形式 ω に対して

$$\int_D \mathrm{d}\omega = \int_{\partial D} \omega \tag{32}$$

が成り立つ．

■面積要素を構成する　領域 D の境界 ∂D を $(\xi^1,\cdots,\xi^p)$ でパラメトライズする．1 つのパラメータ ξ^j が動いてできる座標曲線上の 2 点 $q(\xi^j), q(\xi^j + \mathrm{d}\xi^j)$ を結ぶ ∂D の接ベクトルを $\mathrm{d}^{(j)}q$ とすると，その第 i 成分は $\mathrm{d}^{(j)}q^i = \frac{\partial q^i}{\partial \xi^j}\mathrm{d}\xi^j$($j$ について和をとらない) なので，∂D にわたる ω^p の積分から

$$\frac{\partial(q^{i_1},\cdots,q^{i_p})}{\partial(\xi^1,\cdots,\xi^p)} \mathrm{d}\xi^1 \cdots \mathrm{d}\xi^p = \begin{vmatrix} \frac{\partial q^{i_1}}{\partial \xi^1}\mathrm{d}\xi^1 & \cdots & \frac{\partial q^{i_1}}{\partial \xi^p}\mathrm{d}\xi^p \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial q^{i_p}}{\partial \xi^1}\mathrm{d}\xi^1 & \cdots & \frac{\partial q^{i_p}}{\partial \xi^p}\mathrm{d}\xi^p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{d}^{(1)}q^{i_1} & \cdots & \mathrm{d}^{(p)}q^{i_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathrm{d}^{(1)}q^{i_p} & \cdots & \mathrm{d}^{(p)}q^{i_p} \end{vmatrix}$$

が現れる．これは無限小ベクトル $\mathrm{d}^{(1)}q,\cdots,\mathrm{d}^{(p)}q$ の張る面積要素を与える．

14.2　Gauss の定理 (23):$\int_{\partial V} p\mathrm{d}\boldsymbol{f} = \int_V \boldsymbol{\nabla} p \mathrm{d}V$

領域 V の流体に働く総圧力は

$$-\int_{\partial V} p\mathrm{d}\boldsymbol{f} = -\int_V \boldsymbol{\nabla} p \mathrm{d}V$$

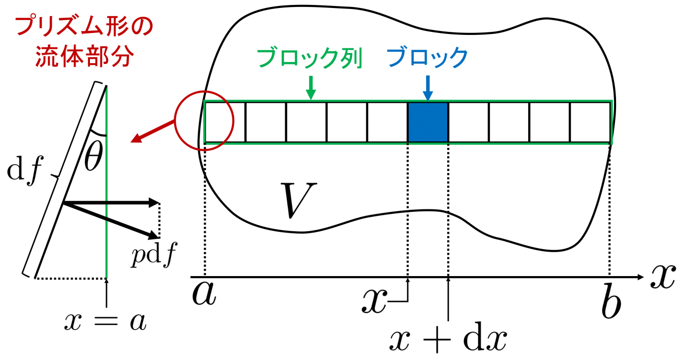

図 12　領域 V の流体をブロックに分ける

で与えられる．この積分公式は Gauss の定理と呼ばれる [7, p.14]．これは通常の発散定理と同様，以下で示すように 2 形式に対する Stokes の定理から導かれる．

直感的には次のように考えられるだろう．図 12 の位置 x のブロックに働く圧力の x 成分は

$$\{p(x)-p(x+\mathrm{d}x)\}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=-\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

だからブロック列の両端にかかる圧力の x 成分は

$$-\left(\int_a^b\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

である．図 12 の微小なプリズム形の流体部分に働く面積力はつり合わなければならないから [7, pp.7–8]，ブロック列の端 $x=a$ にかかる圧力の x 成分 $p(x=a)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ は表面 $\mathrm{d}f$ にかかる圧力の x 成分 $p\mathrm{d}f\cos\theta$ に等しい．よって総圧力の x 成分は $-\int_V\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}V$ で与えられることが分かる．

■微分形式に対する Stokes の定理 (32) を用いた証明　2 形式 $\omega=p\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$ に対して外微分は

$$\mathrm{d}\omega=\partial_xp\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z\qquad(\because\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}y=\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}z=0)$$

である．$\omega,\mathrm{d}\omega$ の積分を定義式 (31) に従って通常の積分に書き換えよう．

積分変数に空間座標 (x,y,z) そのものをとれば

$$\int_V\mathrm{d}\omega=\int_V\partial_xp\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=\int_V\partial_xp\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(x,y,z)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_V\partial_xp\mathrm{d}V$$

となる．

一方，∂V を (ξ,ξ') でパラメトライズし，これらを積分変数にとる．ここで ξ(または ξ') が動いてできる座標曲線上で座標が ξ と $\xi+\mathrm{d}\xi$(または ξ' と $\xi'+\mathrm{d}\xi'$) の 2 点を結ぶベクトルを $\mathrm{d}\boldsymbol{X}$(または $\mathrm{d}\boldsymbol{X}'$) とする．このときこれらの第 i 成分は

$$\mathrm{d}X^i=\frac{\partial x^i}{\partial\xi}\mathrm{d}\xi,\qquad\mathrm{d}X'^i=\frac{\partial x^i}{\partial\xi'}\mathrm{d}\xi'$$

なので

$$\left\langle\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z\,\middle|\,\frac{\partial}{\partial\xi},\frac{\partial}{\partial\xi'}\right\rangle=\begin{vmatrix}\frac{\partial y}{\partial\xi}&\frac{\partial y}{\partial\xi'}\\\frac{\partial z}{\partial\xi}&\frac{\partial z}{\partial\xi'}\end{vmatrix}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\xi'=\begin{vmatrix}\mathrm{d}X^2&\mathrm{d}X'^2\\\mathrm{d}X^3&\mathrm{d}X'^3\end{vmatrix}=(\mathrm{d}\boldsymbol{X}\times\mathrm{d}\boldsymbol{X}')_x\equiv\mathrm{d}f_x$$

は ∂V 上で $\mathrm{d}\boldsymbol{X},\mathrm{d}\boldsymbol{X}'$ が張る平行四辺形の x 軸に垂直な面への射影を与える．よって

$$\int_{\partial V}\omega=\int_{\partial V}p\mathrm{d}f_x$$

を得る．

以上より Stokes の定理 (32) は Gauss の定理 (23):

$$\int_{\partial V}p\mathrm{d}f_x=\int_V\partial_x p\mathrm{d}V$$

を与える．

14.3 4 次元空間における Stokes の定理 (24)

1 形式 $\omega=A_\mu\mathrm{d}x^\mu$ に対して外微分は

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega=&\partial_\nu A^\mu\mathrm{d}x^\nu\wedge\mathrm{d}x^\mu=\sum{}'(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)\mathrm{d}x^\mu\wedge\mathrm{d}x^\nu\\ \equiv&\sum{}'f_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\wedge\mathrm{d}x^\nu\qquad\left(\sum{}'\text{は}\mu<\nu\text{の和}\right)\end{aligned}$$

となる．$\omega,\mathrm{d}\omega$ の積分を定義式 (31) に従って通常の積分に書き換えよう．

4 次元空間に横たわる 2 次元の超曲面 S を (ξ,ξ') でパラメトライズする．ここで ξ(または ξ') が動いてできる座標曲線上で座標が ξ と $\xi+\mathrm{d}\xi$(または ξ' と $\xi+\mathrm{d}\xi'$) の 2 点を結ぶ 4 元ベクトル $\mathrm{d}x$(または $\mathrm{d}x'$) を定義すると，その第 α 成分は

$$\mathrm{d}x^\alpha=\frac{\partial x^\alpha}{\partial\xi}\mathrm{d}\xi,\qquad\mathrm{d}x'^\alpha=\frac{\partial x^\alpha}{\partial\xi'}\mathrm{d}\xi'$$

なので

$$\begin{aligned}\sum{}'\int_S f_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\wedge\mathrm{d}x^\nu=&\sum{}'\int_S f_{\mu\nu}\begin{vmatrix}\frac{\partial x^\mu}{\partial\xi}&\frac{\partial x^\mu}{\partial\xi'}\\\frac{\partial x^\nu}{\partial\xi}&\frac{\partial x^\nu}{\partial\xi'}\end{vmatrix}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\xi'=\sum{}'\int_S f_{\mu\nu}\mathrm{d}\sigma^{\mu\nu},\\ \mathrm{d}\sigma^{\mu\nu}\equiv&\begin{vmatrix}\mathrm{d}x^\mu&\mathrm{d}x'^\mu\\\mathrm{d}x^\nu&\mathrm{d}x'^\nu\end{vmatrix}\end{aligned}$$

を得る．

一方，S の境界 $C=\partial S$ を η でパラメトライズしたとき，$\frac{\partial}{\partial\eta}=\frac{\partial x^\mu}{\partial\eta}\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ に注意すると

$$\left\langle\mathrm{d}x^\mu\,\middle|\,\frac{\partial}{\partial\eta}\right\rangle\mathrm{d}\eta=\frac{\partial x^\mu}{\partial\eta}\mathrm{d}\eta=\mathrm{d}x^\mu$$

なので (最左辺の $\mathrm{d}x^\mu$ は 1 形式ではなく，通常の線要素)，

$$\int_{\partial S}\omega=\int_C A_\mu\mathrm{d}x^\mu$$

を得る．

以上より Stokes の定理 (32) は 4 次元空間における Stokes の定理 (24):

$$\int_S\sum{}'f_{\mu\nu}\mathrm{d}\sigma^{\mu\nu}=\int_C A_\mu\mathrm{d}x^\mu$$

を与える．

14.4　4 次元空間における 3 次元的 Gauss の定理 (25)

2 形式

$$\omega = \sum{}' A_{\mu\nu} \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \qquad \left(\sum{}' \text{は} \mu < \nu \text{の和}\right)$$

の外微分は，

$$F_{\lambda\mu\nu} \equiv \partial_\lambda A_{\mu\nu} + \partial_\mu A_{\nu\lambda} + \partial_\nu A_{\lambda\mu}$$

とおくと

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega = &\left(\sum_{\lambda<\mu<\nu} + \sum_{\mu<\lambda<\nu} + \sum_{\mu<\nu<\lambda}\right) \partial_\lambda A_{\mu\nu} \mathrm{d}x^\lambda \wedge \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \\
=&\sum{}''(\partial_\lambda A_{\mu\nu} \mathrm{d}x^\lambda \wedge \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu + \partial_\mu A_{\lambda\nu} \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\lambda \wedge \mathrm{d}x^\nu + \partial_\nu A_{\lambda\mu} \mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\lambda \wedge \mathrm{d}x^\mu) \\
=&\sum{}''\{\partial_\lambda A_{\mu\nu} \mathrm{d}x^\lambda \wedge \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu + (-\partial_\mu A_{\nu\lambda})(-\mathrm{d}x^\lambda \wedge \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu) + \partial_\nu A_{\lambda\mu} \mathrm{d}x^\lambda \wedge \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu\} \\
=&\sum{}'' F_{\lambda\mu\nu} \mathrm{d}x^\lambda \wedge \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \qquad \left(\sum{}'' \text{は} \lambda < \mu < \nu \text{の和}\right)
\end{aligned}$$

となる．$\omega, \mathrm{d}\omega$ の積分を定義式 (31) に従って通常の積分に書き換えよう．

4 次元空間に横たわる 3 次元の超曲面 V を (ξ, ξ', ξ'') でパラメトライズする．ここで ξ(または ξ', ξ'') が動いてできる座標曲線上で座標が ξ と $\xi + \mathrm{d}\xi$(または ξ' と $\xi' + \mathrm{d}\xi'$，ξ'' と $\xi'' + \mathrm{d}\xi''$) の 2 点を結ぶ 4 元ベクトル $\mathrm{d}x$(または $\mathrm{d}x'$，$\mathrm{d}x''$) を定義すると，その第 α 成分は

$$\mathrm{d}x^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi}\mathrm{d}\xi, \qquad \mathrm{d}x'^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi'}\mathrm{d}\xi', \qquad \mathrm{d}x''^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi''}\mathrm{d}\xi''$$

なので

$$\begin{aligned}
\left\langle \mathrm{d}x^\lambda \wedge \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \,\middle|\, \frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial \xi'}, \frac{\partial}{\partial \xi''} \right\rangle \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\xi' \mathrm{d}\xi'' &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi} & \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi'} & \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi''} \\ \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi} & \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi'} & \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi''} \\ \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi} & \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi'} & \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi''} \end{vmatrix} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\xi' \mathrm{d}\xi'' = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi}\mathrm{d}\xi & \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi'}\mathrm{d}\xi' & \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi''}\mathrm{d}\xi'' \\ \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi}\mathrm{d}\xi & \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi'}\mathrm{d}\xi' & \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi''}\mathrm{d}\xi'' \\ \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi}\mathrm{d}\xi & \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi'}\mathrm{d}\xi' & \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi''}\mathrm{d}\xi'' \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \mathrm{d}x^\lambda & \mathrm{d}x'^\lambda & \mathrm{d}x''^\lambda \\ \mathrm{d}x^\mu & \mathrm{d}x'^\mu & \mathrm{d}x''^\mu \\ \mathrm{d}x^\nu & \mathrm{d}x'^\nu & \mathrm{d}x''^\nu \end{vmatrix} \equiv \mathrm{d}v^{\lambda\mu\nu}
\end{aligned}$$

となるから

$$\int_V \mathrm{d}\omega = \int_V \sum{}'' F_{\lambda\mu\nu} \mathrm{d}v^{\lambda\mu\nu}$$

を得る．

一方，超曲面 $S = \partial V$ を (η, η') でパラメトライズすると同様に

$$\left\langle \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \,\middle|\, \frac{\partial}{\partial \eta}, \frac{\partial}{\partial \eta'} \right\rangle = \begin{vmatrix} \mathrm{d}x^\mu & \mathrm{d}x'^\mu \\ \mathrm{d}x^\nu & \mathrm{d}x'^\nu \end{vmatrix} \equiv \mathrm{d}\sigma^{\mu\nu}, \qquad \therefore \int_{\partial V} \omega = \int_S \sum{}' A_{\mu\nu} \mathrm{d}\sigma^{\mu\nu}$$

を得る．

以上より Stokes の定理 (32) は 4 次元空間における 3 次元的 Gauss の定理 (25):

$$\int_V \sum{}'' F_{\lambda\mu\nu} \mathrm{d}v^{\lambda\mu\nu} = \int_S \sum{}' A_{\mu\nu} \mathrm{d}\sigma^{\mu\nu}$$

を与える．

■3 次元的 Gauss の定理の式 (26) への書き換え　3 次元的 Gauss の定理 (25) を，デュアルテンソル

$$\mathrm{d}S_\mu \equiv -\frac{1}{3!}e_{\mu\nu\lambda\rho}\mathrm{d}v^{\nu\lambda\rho}, \qquad \mathrm{d}f^*_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2!}e_{\mu\nu\lambda\rho}\mathrm{d}\sigma^{\lambda\rho}$$

を導入して書き換える ($e^{\lambda\mu\nu\rho}$ は完全反対称テンソルであり，$e^{0123}=1, \therefore e_{0123}=-1$)．これらを元のテンソルについて逆に解くと

$$\begin{aligned}
e_{nklm}\mathrm{d}S^n =& -\frac{1}{6}e_{nklm}e^{nprs}\mathrm{d}v_{prs}\\
=&\frac{1}{6}\begin{vmatrix}\delta^p{}_k & \delta^p{}_l & \delta^p{}_m\\ \delta^r{}_k & \delta^r{}_l & \delta^r{}_m\\ \delta^s{}_k & \delta^s{}_l & \delta^s{}_m\end{vmatrix}\mathrm{d}v_{prs}\\
=&\frac{1}{6}(\mathrm{d}v_{klm}-\mathrm{d}v_{kml}-\mathrm{d}v_{lkm}+\mathrm{d}v_{mkl}+\mathrm{d}v_{lmk}-\mathrm{d}v_{mlk}) \qquad \text{(行列式を 1 行目で展開した)}\\
=&\mathrm{d}v_{klm},\\
\therefore \mathrm{d}v^{\lambda\mu\nu} =& e^{\rho\lambda\mu\nu}\mathrm{d}S_\rho
\end{aligned}$$

および

$$-\frac{1}{2}e^{\mu\nu\lambda\rho}\mathrm{d}f^*_{\lambda\rho} = -\frac{1}{4}e^{\mu\nu\lambda\rho}e_{\lambda\rho\alpha\beta}\mathrm{d}\sigma^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\delta^\mu{}_\alpha\delta^\nu{}_\beta - \delta^\mu{}_\beta\delta^\nu{}_\alpha)\mathrm{d}\sigma^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\mathrm{d}\sigma^{\mu\nu}-\mathrm{d}\sigma^{\nu\mu}) = \mathrm{d}\sigma^{\mu\nu}$$

なので

$$\begin{aligned}
\sum{}' A_{\mu\nu}\mathrm{d}\sigma^{\mu\nu} =& \frac{1}{2!}A_{\mu\nu}\mathrm{d}\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2!}A_{\mu\nu}\left(-\frac{1}{2}e^{\mu\nu\lambda\rho}\mathrm{d}f^*_{\lambda\rho}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2!}e^{\lambda\rho\mu\nu}A_{\mu\nu}\right)\mathrm{d}f^*_{\lambda\rho} \equiv -\frac{1}{2}A^*_{\lambda\rho}\mathrm{d}f^*_{\lambda\rho},\\
\sum{}'' F_{\lambda\mu\nu}\mathrm{d}v^{\lambda\mu\nu} =& \frac{1}{3!}F_{\lambda\mu\nu}\mathrm{d}v^{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{3!}F_{\lambda\mu\nu}(e^{\rho\lambda\mu\nu}\mathrm{d}S_\rho) = \left(\frac{1}{3!}e^{\rho\lambda\mu\nu}F_{\lambda\mu\nu}\right)\mathrm{d}S_\rho \equiv -F^{*\rho}\mathrm{d}S_\rho
\end{aligned}$$

であり，ここで

$$\begin{aligned}
F^{*\rho} =& -\frac{1}{3!}e^{\rho\lambda\mu\nu}F_{\lambda\mu\nu} = -\frac{1}{3}\left\{\partial_\lambda\left(\frac{1}{2!}e^{\rho\lambda\mu\nu}A_{\mu\nu}\right) + \partial_\mu\left(\frac{1}{2!}e^{\rho\lambda\mu\nu}A_{\nu\lambda}\right) + \partial_\mu\left(\frac{1}{2!}e^{\rho\lambda\mu\nu}A_{\lambda\mu}\right)\right\}\\
=& -\frac{1}{3}(\partial_\lambda A^{*\rho\lambda} + \partial_\mu A^{*\rho\mu} + \partial_\nu A^{*\rho\nu}) = -\partial_\lambda A^{*\rho\lambda}
\end{aligned}$$

なので 3 次元的 Gauss の定理 (25) は式 (26):

$$\frac{1}{2}\int_S A^{*\lambda\rho}\mathrm{d}f^*_{\lambda\rho} = \int_V \partial_\lambda A^{*\rho\lambda}\mathrm{d}S_\rho$$

と書き換えられる．

14.5　4 次元的 Gauss の定理 (27)

3 形式

$$\omega = \sum{}' T_{\lambda\mu\nu}\mathrm{d}x^\lambda \wedge \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \qquad \left(\sum{}' \text{は } 0 \le \lambda < \mu < \nu \le 3 \text{ の和}\right)$$

に対して外微分は

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega =& {\sum}' \partial_\rho T_{\lambda\mu\nu} \mathrm{d}x^\rho \wedge \mathrm{d}x^\lambda \wedge \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \\
=& \partial_0 T_{123} \mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 \quad \Leftarrow \quad \rho = 0 \text{ の項，} \mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^0 = 0 \\
+& \partial_1 T_{023} \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 \quad \Leftarrow \quad \rho = 1 \text{ の項，} \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^1 = 0 \\
+& \partial_2 T_{013} \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^3 \quad \Leftarrow \quad \rho = 2 \text{ の項，} \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^2 = 0 \\
+& \partial_3 T_{012} \mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \quad \Leftarrow \quad \rho = 3 \text{ の項，} \mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^3 = 0 \\
=& (\partial_0 T_{123} - \partial_1 T_{023} + \partial_2 T_{013} - \partial_3 T_{012}) \mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 \\
=& W_{0123} \mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3
\end{aligned}
$$

となる．$\omega, \mathrm{d}\omega$ の積分を定義式 (31) に従って通常の積分に書き換えよう．

積分変数に空間座標 (x^0, x^1, x^2, x^3) そのものをとれば

$$
\int_\Omega \mathrm{d}\omega = \int_\Omega W_{0123} \mathrm{d}x^0 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^3 = \int_\Omega W_{0123} \frac{\partial(x^0, \cdots, x^3)}{\partial(x^0, \cdots, x^3)} \mathrm{d}x^0 \cdots \mathrm{d}x^3 = \int_\Omega W_{0123} \mathrm{d}\Omega
$$

となる．

次に 4 次元空間に横たわる 3 次元の超曲面 $\partial_\Omega = V$ を (ξ, ξ', ξ'') でパラメトライズする．ここで ξ(または ξ', ξ'') が動いてできる座標曲線上で座標が ξ と $\xi + \mathrm{d}\xi$(または ξ' と $\xi' + \mathrm{d}\xi'$，ξ'' と $\xi'' + \mathrm{d}\xi''$) の 2 点を結ぶ 4 元ベクトル $\mathrm{d}x$(または $\mathrm{d}x'$，$\mathrm{d}x''$) を定義すると，その第 α 成分は

$$
\mathrm{d}x^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi} \mathrm{d}\xi, \qquad \mathrm{d}x'^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi'} \mathrm{d}\xi', \qquad \mathrm{d}x''^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi''} \mathrm{d}\xi''
$$

なので

$$
\begin{aligned}
\left\langle \mathrm{d}x^\lambda \wedge \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \,\middle|\, \frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial \xi'}, \frac{\partial}{\partial \xi''} \right\rangle \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\xi' \mathrm{d}\xi'' &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi} & \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi'} & \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi''} \\ \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi} & \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi'} & \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi''} \\ \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi} & \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi'} & \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi''} \end{vmatrix} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\xi' \mathrm{d}\xi'' = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi} \mathrm{d}\xi & \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi'} \mathrm{d}\xi' & \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi''} \mathrm{d}\xi'' \\ \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi} \mathrm{d}\xi & \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi'} \mathrm{d}\xi' & \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi''} \mathrm{d}\xi'' \\ \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi} \mathrm{d}\xi & \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi'} \mathrm{d}\xi' & \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi''} \mathrm{d}\xi'' \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \mathrm{d}x^\lambda & \mathrm{d}x'^\lambda & \mathrm{d}x''^\lambda \\ \mathrm{d}x^\mu & \mathrm{d}x'^\mu & \mathrm{d}x''^\mu \\ \mathrm{d}x^\nu & \mathrm{d}x'^\nu & \mathrm{d}x''^\nu \end{vmatrix} \equiv \mathrm{d}v^{\lambda\mu\nu}
\end{aligned}
$$

となるから

$$
\int_V \omega = \int_V {\sum}' T_{\lambda\mu\nu} \mathrm{d}v^{\lambda\mu\nu}
$$

を得る．

以上より Stokes の定理は 4 次元的 Gauss の定理 (27):

$$
\int_\Omega W_{0123} \mathrm{d}\Omega = \int_V {\sum}' T_{\lambda\mu\nu} \mathrm{d}v^{\lambda\mu\nu}
$$

を与える．

■4 次元的 Gauss の定理の式 (28) への書き換え　4 次元的 Gauss の定理 (27) を，デュアルテンソル

$$
W^* \equiv \frac{1}{4!} e^{\rho\lambda\mu\nu} W_{\rho\lambda\mu\nu}, \qquad T^{*\rho} \equiv \frac{1}{3!} e^{\rho\lambda\mu\nu} T_{\lambda\mu\nu}
$$

を導入して書き換える ($e^{\lambda\mu\nu\rho}$ は完全反対称テンソルであり，$e^{0123}=1, \therefore e_{0123}=-1$).

$$
\begin{aligned}
W_{0123} = W^* =& \frac{1}{4!} e^{\rho\lambda\mu\nu}(\partial_\rho T_{\lambda\mu\nu} - \partial_\lambda T_{\mu\nu\rho} + \partial_\mu T_{\nu\rho\lambda} - \partial_\nu T_{\rho\lambda\mu}) \\
=& \frac{1}{4!}\{e^{\rho\lambda\mu\nu}\partial_\rho T_{\lambda\mu\nu} - (-e^{\lambda\mu\nu\rho})\partial_\lambda T_{\mu\nu\rho} + (+e^{\mu\nu\rho\lambda})\partial_\mu T_{\nu\rho\lambda} - (-e^{\nu\rho\lambda\mu})\partial_\nu T_{\rho\lambda\mu}\} \\
=& \frac{1}{4!} \times 4 e^{\rho\lambda\mu\nu}\partial_\rho T_{\lambda\mu\nu} \\
=& \partial_\rho T^{*\rho}
\end{aligned}
$$

であり，さらに

$$
\begin{aligned}
{\sum}' T_{\lambda\mu\nu} \mathrm{d}v^{\lambda\mu\nu} =& T_{123}\mathrm{d}v^{123} + T_{023}\mathrm{d}v^{023} + T_{013}\mathrm{d}v^{013} + T_{012}\mathrm{d}v^{012} \\
=& T^{*0}\mathrm{d}v^{123} + (-T^{*1})\mathrm{d}v^{023} + T^{*2}\mathrm{d}v^{013} + (-T^{*3})\mathrm{d}v^{012} \\
=& -\frac{1}{3!} e_{\rho\lambda\mu\nu} T^{*\rho}\mathrm{d}v^{\lambda\mu\nu} \\
\equiv& T^{*\rho}\mathrm{d}S_\rho
\end{aligned}
$$

なので 4 次元的 Gauss の定理 (27) は式 (28):

$$
\int_V T^{*\rho}\mathrm{d}S_\rho = \int_\Omega \partial_\rho T^{*\rho}\mathrm{d}\Omega
$$

と書き換えられる．

15　3 次元球面

有限の拡がりを持つものの境界のない宇宙の形として，3 次元球面が考えられる．面白いことに，3 次元球面の宇宙観は Dante (ダンテ)『神曲』において既に，2 つの 3 次元球を境界で貼り合わせた構造として描かれている [9, pp.40–43]．3 次元球面をこのような仕方で捉えられることを理解するのは，実はさほど困難ではない．実際，3 次元球面は 4 次元空間に埋め込まれた超曲面

$$
x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = a^2
$$

として表すことができ，ここに定数パラメータ $a > 0$ は半径と呼べる．他方で 3 次元球面の内部の立場では，その位置を表すのに 3 つの座標 (x, y, z) を用いることができる．このとき指定した w の値 (ただし $|w| \leq a$) に対して

$$
x^2 + y^2 + z^2 = a^2 - w^2 \tag{33}
$$

は (x, y, z) 空間における通常の 2 次元球面を表す．$|w| : 0 \to a$ とすると球面が通過した領域として，半径 a の 3 次元球が得られる．w の符号に応じて得られる 3 次元球は 2 つある．それらは 4 次元空間から見れば $w \gtreqless 0$ に位置する“北半球”と“南半球”に対応し，各々の 3 次元球の表面にあたる 2 次元球面は“赤道” $w = 0$ で貼り合わせられている (図 13)．これは 2 次元球面が (トポロジカルには) 2 つの半球を赤道面に射影した円盤を，その円周 (赤道) で貼り合わせた構造として理解できることとアナロガスである．

15.1　詳しい説明

通常の球面はあえて言えば 2 次元球面であるのに対して，ここで考えている 3 次元球面はその高次元への一般化であり，あくまで 3 次元の領域である．図 13 の左側では常套的に空間の次元を 1 つ落として，3 次元球面

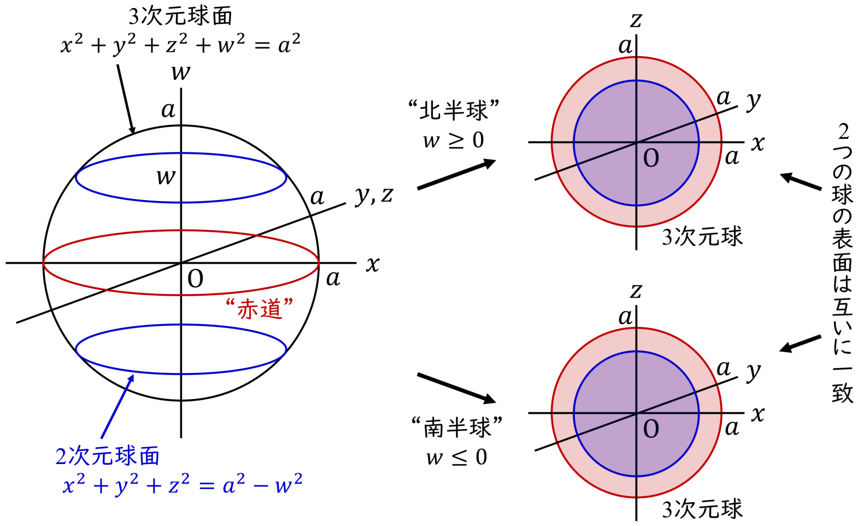

図 13　3 次元球面は 2 つの 3 次元球を表面で貼り合わせた構造として理解できる

をあたかも半径 a の 2 次元の球面であるかのように描いている．また高さ $\pm w$ の青いリングのように見えているのが，実際には 2 次元球面である．さらに北半球を水平な“xyz 平面”に投影すると，視覚的には半径 a の円盤のようなものが得られる．それは実際には 3 次元球となっており，その半径は先ほどの a に一致する．ここで球 (ball) とは中身の詰まった領域を指し，その表面であるところの球面 (sphere) と区別されることも，言葉の定義として注意を要する．さて，青いリングが北極から赤道に移動するとき，“xyz 平面”への投影図ではリングが円盤の中心から円周に移動する．このとき実際には 2 次元球面が，3 次元球の中心から表面に移動するということが起きている．北半球と南半球のいずれに対応する 3 次元球 (図 13 の右側) も，表面の 2 次元球面が図 13 の左側では赤道に来るので，2 つの表面は一致する．なお式 (33) では w を固定しているので，右辺 $a^2 - w^2$ は定数である．すると式 (33) は 3 変数 x, y, z に対する 1 つの拘束条件を課しているので，2 次元の領域を表していることが納得できる．実際，式 (33) は単に半径 $\sqrt{a^2 - w^2}$ の通常の球面の方程式である．

15.2　宇宙モデルとしての 3 次元球面

例えばレンコンのようにデタラメに孔のあいた領域の表面もまた，有限であって境界がない．しかしそのような構造は明らかに宇宙の一様・等方性を満たさない．トーラス (ドーナツ) も少なくとも等方性はない：我々は 2 種類の円周方向を区別できる．

物理的な空間としては，それを超曲面として内に含む高次元空間に依拠せずに，空間内部の幾何学を定義できれば良い．実際，球体を 2 つ貼り合わせるという 3 次元球面の構成は，そのような観点からの記述になっていると言える．北半球という名の球体内を出発して 1 方向に進んで行くと，いずれ表面から宇宙の外に抜け出せるかと思いきや，実際には地球の表面上で赤道を超えるときのように，何事もなく南半球という名のもう 1 つの球体に突入するに過ぎない．さらに進むと北半球に戻って来る．

実際に一様等方な宇宙の内部幾何学はいわゆる Robertson–Walker 計量で記述できて，必ず平坦な宇宙，閉じた宇宙 (球面)，開いた宇宙 (双曲面) の 3 パターンのいずれかに帰着することを証明できる [10, pp.449–454]．特に 3 次元球面のモデルには，なるほど，「宇宙は無限に拡がっているのか」という疑問に対する 1 つの魅力的な答という意味がある．

参考文献

[1] エリ・デ・ランダウ，イェ・エム・リフシッツ，2015，ランダウ=リフシッツ理論物理学教程 場の古典論 (原書第 6 版)(恒藤敏彦，広重徹訳)，東京図書株式会社，東京.

[2] 内山龍雄，2014，相対性理論 物理テキストシリーズ 8，株式会社岩波書店，東京.

[3] 山本義隆，中村孔一，2013，朝倉物理学大系 1 解析力学 I，株式会社朝倉書店，東京.

[4] R.P. ファインマン，2013，ご冗談でしょう，ファインマンさん (下)(大貫昌子訳)，株式会社朝倉書店，東京，10–15.

[5] 矢野健太郎，石原繁，2013，基礎解析学 (改訂版)，株式会社裳華房，東京.

[6] 長沼伸一郎，2013，物理数学の直観的方法〈普及版〉理工系で学ぶ数学「難所突破」の特効薬，株式会社講談社，東京，149–152.

[7] 今井功，2003，流体力学 物理テキストシリーズ 9，株式会社岩波書店，東京.

[8] J.J.Sakurai，2007，現代の量子力学 (上)(桜井明夫訳)，株式会社吉岡書店，京都.

[9] C. ロヴェッリ，2023，一般相対性理論 (真貝寿明訳)，森北出版株式会社，東京.

[10] シュッツ，2010，第 2 版シュッツ 相対論入門 (江里口良治，二間瀬敏史訳)，丸善株式会社，東京.